23/4/2020

Teorema

$X \subset \mathbb{P}^n$ chiuso irriducibile

$E \subset \mathbb{P}^n$ sottospazio lineare t.c. $E \cap X = \{\emptyset\}$

Sia

$$\pi = \pi_{E|X} : X \longrightarrow \pi(X)$$

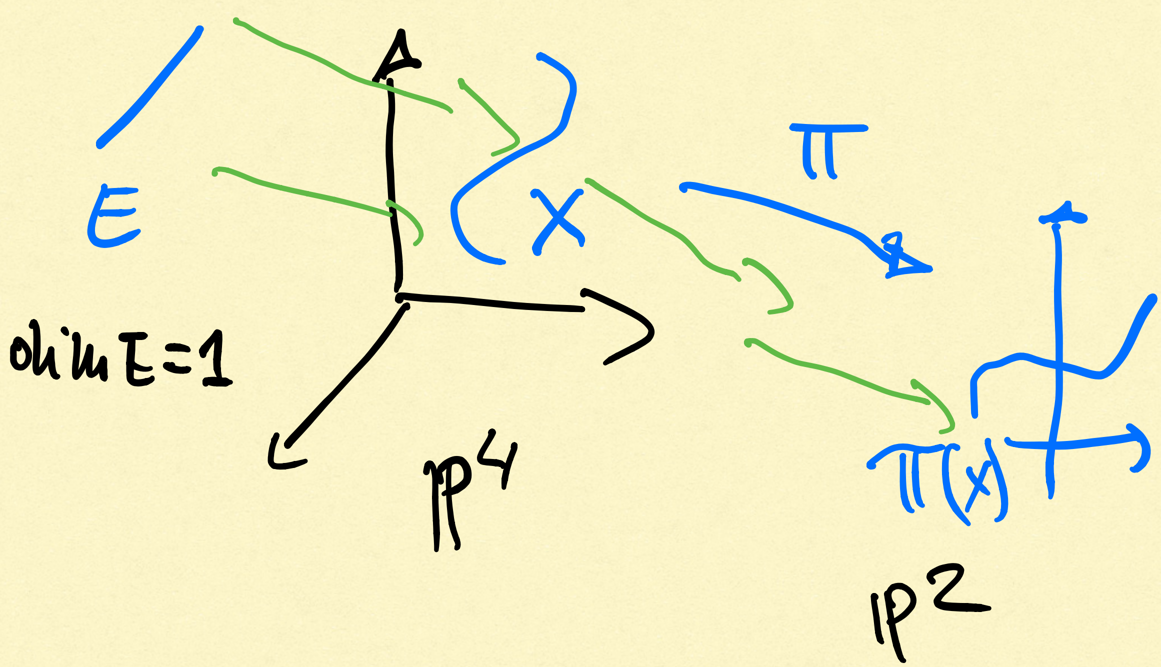
$$x \mapsto (L_0(x), \dots, L_{n-d-1}(x))$$

dove $E = \{ L_0 = \ldots = L_{n-d-1} = 0 \}$

$\pi(X) \subset \mathbb{P}^{n-d-1}$

ALLORA $\pi : X \longrightarrow \pi(X)$

è morfismo finito



<u>dim</u> $\pi_E : \mathbb{P}^n \setminus E \longrightarrow \mathbb{P}^{n-d-1}$

coord. $(y_0, \ldots, y_{n-d-1})$

$y_J = L_J(x) \quad \forall J$

Consideriamo ricoprimento affine di $\mathbb{P}^{n-d-1}$

$\{U_i\}$ dove $U_i = \{y_i \neq 0\}$

varietà affine irrid.

$$\pi^{-1}(U_i) \cap X =$$

$$= X_{L_i} = \{ x \in X : L_i(x) \neq 0 \}$$

var. affine irriducibile

<u>TESI</u>: $\forall i$

$$\pi|_{X_{L_i}} : X_{L_i} \to \pi(X) \cap V_i$$

è morfismo finito di var. affini

morfismo: ok perchè π è mappa polinomiale ben definita

$\forall i \quad L_i =$ pol. omogeneo
deg $= 1$

&

$X \cap E = \emptyset \Rightarrow$

$\forall x \in X \ \exists \ i$ t.c. $L_i(x) \neq 0$

FINITEZZA

Sia $g \in \mathbb{K}[X_{L_i}]$

g verifica eq:

$$g^h - \sum A_j g^j = 0$$

con $A_j \in \mathbb{K}[v_i]$

$g \in \mathbb{K}[X_{L_i}]$ la scrivo

come $g = \dfrac{G(x_0, \ldots, x_n)}{L_i^m}$

dove $m = \deg G$

Consideriamo mappa ausiliaria

$$\varphi : X \longrightarrow \mathbb{P}^{n-d}$$

$$x \mapsto \left(L_0^m(x) : \ldots : L_{n-d-1}^m(x) : G(x) \right)$$

coord. $z_0, \ldots, z_{n-d}$

φ è morfismo &

$\varphi(X) \subset \mathbb{P}^{n-d}$ è chiuso

Sia $I(\varphi(X)) = (F_1, \ldots, F_s)$

ideale dell'immagine

Per ipotesi $E \cap X = \{\emptyset\}$

$\Rightarrow \quad P = (0 : \ldots 0 : 1) \notin \varphi(X)$

ovvero $\sqrt{\left(I(\varphi(X)), I(P) \right)}$ ≥ Ideale irrilevante

per NSS proiettivo

CIOÈ

$$\sqrt{(\underbrace{F_1,\dots,F_s}_{I(\varphi(x))}, \underbrace{z_0,\dots,z_{n-d-1}}_{I(P)})} \supseteq (z_0,\dots,z_{n-d})$$

In particolare $\exists\, h$ t.c.

$$z_{n-d}^{h} \in (z_0,\dots,z_{n-d-1},F_1,\dots,F_s)$$

CIOÈ possiamo scrivere

$$z_{n-d}^{h} = \sum H_r \cdot z_r + \sum G_t \cdot F_t$$

consideriamo parte omogenea di grado h

& Restringiamo a $\varphi(X)$

$$\Downarrow$$

$$Z_{n-d}^{h} = P^{h}(Z) \quad \text{in } \mathbb{K}[\varphi(X)]$$

dove

$$P^{h}(z) = \sum A_{h-j}\, Z_{n-d}^{j}$$

con $A_{h-j} = A_{h-j}(z_0, \dots, z_{n-d-1})$

Per costruzione:

$$Z_j = L_j^{m} \qquad j = 0, \dots, n-d-1$$

$$Z_{n-d} = G$$

Pertanto

$$G^h = \sum A_{h-j}(L_0^m, \ldots, L_{n-d-1}^m) G^j$$

Ma $G = g \cdot L_i^m$

disomogenizzando rispetto a L_i

otteniamo

$$g^h = \sum A_{h-j}(y_0^m, \ldots, 1, \ldots y_{n-d}^m) \cdot g^j$$

$\square$

CONSEGUENZE

Teorema di normalizzazione di Noether

Teo 1 $X \subset \mathbb{P}^n$ varietà irriducibile

$\Rightarrow$ $\exists$ morfismo finito $X \to \mathbb{P}^m$ per $m < n$ opportuno

dim Sia $X \subset \mathbb{P}^n$

Se $X = \mathbb{P}^n$ O.K.

Se $X \subsetneq \mathbb{P}^n$ allora

$\exists\ P \notin X$, quindi

$$\pi_P : X \longrightarrow \pi_P(X) \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$$

è morfismo finito

Se $\pi_P(X) = \mathbb{P}^{n-1}$ O.K.

altrimenti $\exists\ Q \notin \pi_P(X)$

quindi

$$\pi_Q : \pi_P(X) \longrightarrow \pi_Q(\pi_P(X)) \subseteq \mathbb{P}^{n-2}$$

è morfismo finito

MA $\quad \pi_Q \circ \pi_P = \pi_E$

dove $E = P * Q'$

con $Q' \in \pi_P^{-1}(\underline{P})$

CIOE' $\pi_E : X \longrightarrow \pi_E(X) \subseteq \mathbb{P}^{n-2}$

se $\pi_E(X) = \mathbb{P}^{n-2}$ OK

altrimenti iteriamo il procedimento

$\square$

Teo. 2 $X \subseteq \mathbb{A}^n$ var. affine irriducibile

ALLORA:

$\exists \ \pi : X \to \mathbb{A}^m$ finito

CIOE' $\exists$ coord. $y_1, \dots, y_m$

t.c. $\mathbb{K}[y_1, \dots, y_m] \hookrightarrow \mathbb{K}[X]$ è finito

---

dim

Consideriamo la chiusura proiettiva di $X = \overline{X}$

$$X \subset \mathbb{A}^n = \mathbb{P}^n \setminus H_0$$

$$\begin{array}{l} X \\ \downarrow \\ \overline{X} \subset \mathbb{P}^n \end{array}$$

Prendiamo $\quad p \in \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{A}^n \setminus \overline{X}$

$$\pi_p : \overline{X} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$$

ALLORA

$$\pi_p\big|_X : X \longrightarrow \mathbb{A}^{n-1} \;\; = \text{ũ}'$$

$$\mathbb{A}^{n-1} = \mathbb{P}^{n-1} \setminus \pi_p(H_0)$$

iperpiano

Quindi:

$$\begin{array}{ccc} \pi_p : \overline{X} \cap U_0 & \longrightarrow & \pi_p(\overline{X}) \cap U_0' \\ \| & & \| \\ X & & \pi_p(X) \subset \mathbb{A}^{n-1} \\ \cap & & \\ \mathbb{A}^n & & \end{array}$$

$\square$

vedremo : m = dimensione di X

PARENTESI (Esempio di morfismi proiettivi):

MAPPE di VERONESE

Dato $\mathbb{P}^n$ coord. $(x_0, \dots, x_n)$
Fissato $d \in \mathbb{N}$
consideriamo tutti i monomi di grado $= d$

$$= \{ x^I \}$$

notazione con multiindici

$$X = (x_0, \ldots, x_n)$$

$$I = (i_0, \ldots, i_n) \quad \text{con} \sum_{s=0}^{n} i_s = d$$

$$\Rightarrow \quad X^I = x_0^{i_0} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n}$$

$|I|$ = lunghezza del multiindice $= d$

consideriamo

$$V = \{ \text{polinomi omogenei di grado } d \}$$

Poniamo $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(V^\vee)$

$$\dim V = \binom{n+d}{d}$$

$$N = \binom{n+d}{d} - 1$$

<u>DEF</u>. mappa di VERONESE

$$\nu_{n,d}$$

$$\nu_{n,d} : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^N$$

$$x = (x_0, \dots, x_n) \longmapsto \left(x^I : |I| = d \right)$$

$$I \in \mathbb{N}^{n+1}$$

STUDIO di $\nu_{1,d}$

$$\nu_{1,d} : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^d$$

$$(x_0 : x_1) \longmapsto (x_0^d : x_0^{d-1} x_1 : \ldots : x_1^d)$$

In $\mathbb{P}^d$ consideriamo coordinate

$y_0, \ldots, y_d$

Prendiamo ricoprimento aperto di $\mathbb{P}^1$: $\{U_0, U_1\}$

$U_0 = \{x_0 \neq 0\} \Leftarrow$ coord. $t = \frac{x_1}{x_0}$

$U_1 = \{x_1 \neq 0\} \leftarrow$ coord $s = \frac{x_0}{x_1}$

In $\mathbb{P}^d$ consideriamo

$V_0 = \{y_0 \neq 0\}$

$V_d = \{y_d \neq 0\}$

$$\nu_{1,d}\big|_{U_0} : U_0 \longrightarrow V_0$$
$$(1,t) \longmapsto (1, t, t^2, \dots, t^d)$$

$$\nu_{1,d}\big|_{\mathcal{U}_1} : \mathcal{U}_1 \longrightarrow V_d$$
$$(s,1) \longmapsto (s^d, s^{d-1}, \ldots, s, 1)$$

Quindi $\nu_{1,d}$ è

morfismo iniettivo

$$\mathrm{Im}\,(\nu_{1,d}) = ?$$

DEF. curva razionale normale di grado d in $\mathbb{P}^d$

$$C_d = \left\{ (y_0 : \dots : y_d) \;\middle|\; \mathrm{rk}\begin{pmatrix} y_0 & y_1 & \dots & y_{d-1} \\ y_1 & y_2 & \dots & y_d \end{pmatrix} \leq 1 \right\}$$

$$\begin{pmatrix} y_0 & y_1 & \dots & y_{d-1} \\ y_1 & y_2 & \dots & y_d \end{pmatrix}$$ matrice $2 \times d$

$$\mathrm{rk} \leq 1 \iff \mathrm{rk} = 1$$

poiché $\mathrm{rk} = 0$ impossibile in $\mathbb{P}^d$

<u>OSS</u>: $rk \leq 1 \iff$

$\det(M) = 0 \quad \forall \; M$ minore 2×2

$\uparrow$

polinomio di grado 2

CIOE' $I(C_d)$ è generato da polinomi di grado 2

$\Downarrow$

C_d è intersezione di Quadriche

Teorema: $\nu_{1,d} : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^d$

induce ISOMORFISMO

$$\mathbb{P}^1 \cong C_d$$

DIM

Tesi $\quad \nu_{1,d}(\mathbb{P}^1) = C_d$

$$C_d \cap V_0 =$$

$$= \left\{ (1 : y_1 : \dots : y_d) : rk\begin{pmatrix} 1 & y_1 & \dots & y_{d-1} \\ y_1 & y_2 & \dots & y_d \end{pmatrix} = 1 \right\}$$

CIOE:

$$y_2 = y_1^2$$

$$y_1 y_3 = y_2^2 \longrightarrow y_3 = y_1^3$$

$$y_4 = y_1^4 \quad \ldots$$

Quindi

$$v_0 = (1, t) \longrightarrow \begin{array}{c} C_d \cap V_0 \\ \shortparallel \\ (1, t, t^2, \ldots t^d) \end{array}$$

semplicemente $y_1 = t$

e tutto segue

Analogamente:

$$C_d \cap V_d = \left\{ (y_0, \ldots, y_{d-1}, 1) : \operatorname{rk} \begin{pmatrix} y_0 & \ldots & y_{d-1} \\ y_1 & \ldots & y_d & 1 \end{pmatrix} = 1 \right\}$$

CIOE':
$$y_{d-2} = y_{d-1}^2$$
$$\vdots$$

Quindi:

$$\begin{aligned} U_1 &\longrightarrow C_d \cap V_d \\ (s:1) &\longmapsto (s^d : \ldots : s : 1) \end{aligned}$$

Conclusione

$$\nu_{1,d} : \mathbb{P}^1 \longrightarrow C_d$$

- è morfismo
- è bigettiva

RIMANE

$$(\nu_{1,d})^{-1} : C_d \longrightarrow \mathbb{P}^1 \text{ è morfismo}$$

costruzione di $\nu_{1,d}^{-1}$:

$$\nu_{1,d}^{-1}\big|_{V_d} : C_d \cap V_d \longrightarrow U_1 \cong \mathbb{A}^1$$

$$(y_0, \dots, y_{d-1}, 1) \longmapsto (y_{d-1}, 1)$$

$$\nu_{1,d}^{-1}\big|_{V_0} : C_d \cap V_0 \longrightarrow U_0 \cong \mathbb{A}^1$$

$$(1, y_1, \dots, y_d) \longmapsto (1, y_1)$$

queste meppe sono

polinomiali

&

$\mathrm{Im}\ C_d \cap V_0 \cap V_d$

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} y_0 & \text{---} & y_{d-1} \\ y_1 & \text{---} & y_d \end{pmatrix} \leq 1$$

$$\Updownarrow$$

tutte le colonne sono multiple

$$\Updownarrow$$

rappresentano lo stesso punto di $\mathbb{P}^1$

$$\underset{\text{in } \mathbb{P}^1}{(y_0 : y_1)} = (y_1 : y_2) \text{---} = (y_{d-1}, y_d)$$

$\square$

STUDIO di

$\nu_{2,2}$

$$\nu_{2,2} : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^5$$

$$(x_0 : x_1 : x_2) \longmapsto (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2)$$

<u>Morfismo</u>

Per capire l'immagine riscriviamo la mappa

$$(x_0 : x_1 : x_2) \longmapsto \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0x_1 & x_0x_2 \\ x_0x_1 & x_1^2 & x_1x_2 \\ x_0x_2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix}$$

In $\mathbb{P}^5$ consideriamo coordinate

$$(z_{00}, z_{01}, z_{02}, z_{11}, z_{12}, z_{22})$$

In questo modo

$$z_{ij} = x_i x_j \quad \forall i,j = 0,1,2$$

Consideriamo la superficie

$S \subset \mathbb{P}^5$ coord. z_{ij}

$$S = \left\{ z_{ij} \,,\, 0 \leq i,j \leq 2 \;:\; \operatorname{rk} \begin{pmatrix} z_{00} & z_{01} & z_{02} \\ z_{01} & z_{11} & z_{12} \\ z_{02} & z_{12} & z_{22} \end{pmatrix} \leq 1 \right\}$$

$\operatorname{rk} \leq 1 \iff \operatorname{rk} = \underline{1}$

$\iff$ tutti i minori M 2×2 hanno $\det = 0$

CIOÈ $S = \bigcap$ QUADRICHE

Teorema:

$$\nu_{2,2} : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^5$$

induce isomorfismo $\mathbb{P}^2 \cong S$

DIM

$\nu_{2,2}$ morfismo

perché mappa polinomiale

$\nu_{2,2}$ iniettiva

$$\mathrm{Im}(\nu_{2,2}) = S$$

$\boxed{\subseteq :}$

Consideriamo ricoprimento di $\mathbb{P}^2 = \{ U_0, U_1, U_2 \}$

$$U_i = \{ x_i \neq 0 \}$$

Consideriamo i seguenti aperti di $\mathbb{P}^5$

$$V_i = \{ z_{ii} \neq 0 \}$$

$i = 0, 1, 2$

$$\nu_{2,2} : \mathbb{A}^2 \cong U_i \longrightarrow S \cap V_i$$

è bigettiva

$i = 0$:

$$(1, x_1, x_2) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix}$$

VICE VERSA:

$\mathrm{rk} = 1 \Rightarrow$ tutte le righe sono multiple di $(1, x_1, x_2)$

Si ha:

$S \cap V_0$, $S \cap V_1$, $S \cap V_2$

è ricop. di S

&

$\nu_{2,2}|_{U_i \cap U_j}$ è ben definita

Inoltre

$\nu_{2,2}^{-1}$ è morfismo

Perchè

$$\nu_{r,i}^{-1} : S \cap V_i \longrightarrow \text{riga } i \text{ della matrice}$$

mappa polinomiale

$\square$