22/5/2020

$X \subset \mathbb{A}^n$ varietà affine

$\mathcal{I}(X) = (g_1, \dots, g_r)$

P punto $\in X$ $\quad P = (a_1, \dots, a_n)$

sp. tangente AFFINE (o geometrico) a X in P

$$T_{X,P} = \bigcap_{i=1}^{r} T_{V(g_i),P}$$

$$= \bigcap_{i=1}^{r} \left(g_{i,p}^{(1)} = 0 \right)$$

dove $g_{i,p}^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(p)(x_j - a_j)$

$V(g_i)$ = ipersuperficie

$$T_{V_{g_i},p} = \left(g_{i,p}^{(1)} = 0 \right)$$

OSS.

$\mathbb{A}^n$ spazio affine

= spazio omogeneo su $\mathbb{K}^n$

$P - Q = v$ vettore $\in \mathbb{K}^n$

Quindi se $X = V(g)$ ipersuperficie

Sp. tangente (vettoriale)

$$T_{X,P} = \left\{ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n : \nabla g \cdot v = 0 \right\}$$

idea: $v = X - P = \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix}$

In generale:

X varietà $I(X) = (f_1, \dots, f_r)$

$$T_{X,P} = \bigcap_{i=1}^{r} T_{V(f_i, P)}$$

In questo modo

$T_{X,P}$ è sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$

$$T_{X,p} = \left\{ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n : \nabla g_i \cdot v = 0 \quad \forall\, i = 1 \ldots l \right\}$$

⊙ varietà q. proiettive

X varietà quasi proiettive

$X \subset \mathbb{P}^n$

Sia $P \in X$

Consideriamo aperto $U \cong \mathbb{A}^n$

t.c. $P \in U$

Poniamo $X_0 = U \cap X$

Def. Sp. tangente a X nel punto p

$$= T_{X_0, p}$$

Def. Spazio tangente proiettivo

$$\doteq \overline{T_{X_0, p}}$$

chiusura proiettiva di $T_{X_0, p}$ in $\mathbb{P}^n$

NATURA ALGEBRICA di $T_{X,P}$

$X \subset \mathbb{A}^n$ varietà affine

$P = (a_1, \ldots, a_n) \in X$

consideriamo l'ideale massimale di P

$$\mathcal{I}_P = \{ f \in \mathbb{K}[X] : f(P) = 0 \}$$

Interpretazione algebrica di $\mathcal{I}_P$:

1. $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \twoheadrightarrow \mathbb{K}[X]$

$$\ker = \mathcal{I}(X)$$

2. $\mathcal{I}_{P, \mathbb{A}^n} = \{ f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] : f(P) = 0 \}$

$$= \big((x_1 - a_1), (x_2 - a_2), \dots, (x_n - a_n) \big)$$

3.
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] & \twoheadrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{K}[\{P\}] = \mathbb{K} \end{array}$$

1. + 2. + 3. $\Longrightarrow$ $\square$

$$\mathcal{I}_p = \mathcal{I}_{p,\mathbb{A}^n} / \mathcal{I}(X)$$

MAPPA DIFFERENZIALE in $\underline{p}$

$$d_p = d_{X,p} : \mathcal{I}_p \to (T_{X,p})^*$$

$$f \mapsto \left.\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)(x_i - a_i)\right|_{T_{X,p}}$$

forma lineare
RISTRETTA al
sottospazio vettoriale
$T_{X,p}$

TEOREMA. $d_{X,p}$ induce isomorfismo

$$\mathcal{I}_p / \mathcal{I}_p^2 \cong (T_{X,p})^*$$

DUALE

Teorema $\longrightarrow$ $T_{X,p} \cong \left(\mathcal{I}_p / \mathcal{I}_p^2\right)^*$

DIM. mappa induce appl. lineare

$$f \longmapsto \left(d_{X,p}(f) : T_{X,p} \longrightarrow \mathbb{K}\right)$$

1. $d_{X,p}$ è ben definita

OVVERO $f \in \mathbb{K}[X]$

$$f = F_1|_X = F_2|_X$$

con $F_1, F_2 \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$

$$\Rightarrow \quad d_p(F_1)|_{T_{X,p}} = d_p(F_2)|_{T_{X,p}}$$

se poniamo $F = F_1 - F_2$

$F \in \mathcal{I}(X)$

Tesi segue se $d_{X,p}(F)|_{T_{X,p}} \equiv 0$

vero poiché

$$F \in \mathcal{I}(X) \Rightarrow F = \sum a_i g_i$$

$$\mathcal{I}(X) = (g_1, \dots, g_r)$$

$$\Rightarrow \quad d_p(F) \in (d_p g_1, \dots, d_p g_r)$$

per la regola di Leibniz

2) $d_p = d_{X,p}$ è surgettiva

$f \in \mathbb{K}[X]$

$p \in X$

loc.^{mte} $$f(x) = f(p) + \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)(x_i - p_i) + f^{(2)}$$

con $f^{(2)} \in I^2_{P,\mathbb{A}^n}$

(sviluppo di Taylor)

Quindi: data

$\varphi : T_{X,P} \to \mathbb{K}$ lineare

considero $\tilde{\varphi} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ lineare

t.c. $\tilde{\varphi}|_{T_{X,P}} = \varphi$

$$\tilde{\varphi} = \sum \lambda_i (x_i - a_i)$$

Poniamo $f = \tilde{\varphi}|_X$

$d_{P,X}(f) = \varphi$

3. $\operatorname{Ker}(d_{X,p}) = \mathcal{I}_p^2$

<u>FATTO</u>: (alg. commutative)

$$\mathcal{I}_p / \mathcal{I}_p^2 = \mathcal{I}_{p,\mathbb{A}^n} \Big/ (\mathcal{I}_{p,\mathbb{A}})^2 + \mathcal{I}(X)$$

Sia $F \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ t.c.

$$d_{X,p}(F) \equiv 0 \quad \text{su } T_{X,p}$$

ALLORA: $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ t.c.

$$d_{x,p}(F) = \lambda_1 \, d_{x,p} g_1 + \dots + \lambda_r \, d_{x,p} g_r$$

perché $\mathcal{I}(X) = (g_1, \dots, g_r)$

Poniamo $G \doteq F - \sum \lambda_i g_i$

ALLORA: $\begin{cases} G \equiv F & \text{in } \mathbb{K}[X] \\ d_{x,p}(G) \equiv 0 & \text{su } \mathbb{K}^n \end{cases}$

CIOE' $\Rightarrow \quad G \in \left(\mathcal{I}_{p, \mathbb{A}^n}\right)^2$

conclusione:

$$F \in (\mathcal{I}_{p,\mathbb{A}})^2 + \mathcal{I}(X)$$

$$= (\mathcal{I}_p)^2$$

per FATTO

$\square$

NATURA intrinseca di $T_{X,p}$
(struttura locale)

Consideriamo l'anello locale

$\mathcal{O}_{p,X}$

$\mathcal{O}_{P,X} \doteq$ anello dei GERMI di funzioni regolari in P

dove

GERME = classe di equivalenza (U, f_U)

con U aperto t.c. $P \in U$
f_U funzione regolare in U

RELAZIONE di equivalenza: $(U, f_U) \sim (W, f_W)$ se $f_U \equiv f_W$ in $U \cap W$

PROP. $X \subset \mathbb{A}^n$ varietà affine

ALLORA:

$$\mathcal{O}_{P,X} = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} : \begin{array}{l} f(x), g(x) \in \mathbb{K}[X] \\ g(P) \neq 0 \end{array} \right\}$$

$$= \mathbb{K}[X]_{I_P}$$

dim. X affine $\Rightarrow$

$$\mathbb{K}[X] \cong \mathcal{O}_X(X)$$

Induce morfismo

$$\alpha : \mathbb{K}[X]_{\chi_P} \longrightarrow \mathcal{O}_{P,X}$$

α è iniettivo

se $\frac{a}{b} \in \mathrm{Ker}(\alpha)$

$\Rightarrow \exists$ intorno U di P t.c.

$a \equiv 0$ in U

event.^{nte} cambiando U possiamo

assumere $U = V_h$

aperto principale

con $h(P) \neq 0$

CIOE': $\frac{a}{b} \in \mathrm{Ker}(\alpha)$

$\Rightarrow \quad P_h \cdot Q \equiv 0$ in $\mathbb{K}[X]$

$\Rightarrow \quad Q = 0$ in $\mathbb{K}[X]_h$

$\Rightarrow \quad Q = 0$ in $\mathbb{K}[X]_{I_p}$

α è surgettiva: data

(v, f_v)

consideriamo aperto principale

V_h t.c.

$(V_h, f_{V_h}) \sim (v, f_v)$

$f_{V_h} = \dfrac{Q}{h^n} \in \mathbb{K}[X]_{I_p}$ $\square$

OSS. $\mathcal{O}_{P,X}$ è ANELLO LOCALE

CIOE' ammette un UNICO IDEALE MASSIMALE

$$\mathfrak{m}_{P,X} = \{ f \in \mathcal{O}_{P,X} : f(P) = 0 \}$$

$$\mathcal{O}_{P,X} / \mathfrak{m}_{P,X} \cong \mathbb{K}$$

valutazione in P $\boxed{ev_P : \mathcal{O}_{P,X} \longrightarrow \mathbb{K}}$

$$\boxed{\quad g \mapsto g(p) \quad}$$

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{rel}_p) = \mathfrak{m}_{p,X}$$

TEOREMA. 2

$$\mathfrak{m}_{p,X} / (\mathfrak{m}_{p,X})^2 \cong \mathcal{I}_{p,X} / (\mathcal{I}_{p,X})^2 \cong \left(T_{p,X}\right)^*$$

<u>dim</u>. (IDEA)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{I}_{p,X} \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[dr, "\psi"'] & \mathfrak{m}_{p,X} \arrow[d, two heads, "\pi"] \\ & \mathfrak{m}_{p,X} / (\mathfrak{m}_{p,X})^2 \end{tikzcd}$$

sia $\psi = \pi \circ \iota$

$$\mathrm{Ker}(\psi) = \{ p(x) \in \mathbb{K}[X] : p(x) \in (\mathfrak{m}_{p,X})^2 \}$$

$$= (\mathfrak{m}_{p,X})^2 \cap \mathbb{K}[X]$$

Tesi: $\mathrm{Ker}(\varphi) = (\mathcal{I}_{p,x})^2$

$$p(x) = \sum \underbrace{\frac{h_i}{q_i}}_{\in \mathfrak{m}_p} \cdot \underbrace{\frac{\ell_i}{\overline{q_i}}}_{\in \mathfrak{m}_p}$$

Posto $q(x) = \text{m.c.m.}(q_i, \overline{q_i})$

$$p(x) \cdot q(x) = \sum h_i \ell_i \in \mathcal{I}_p^2$$

Ma $q(p) \neq 0$

Quindi $p(x) \in \mathcal{I}_p^2$

Trucco:

$$p(x) = \frac{p(x)\cdot q(x) - \big(p(x)\cdot(q(x) - q(p)\big)}{q(p)}$$

$$\in I_p^2$$

ψ e surgettiva

$$f(x) = \frac{h(x)}{q(x)} \in \mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2$$

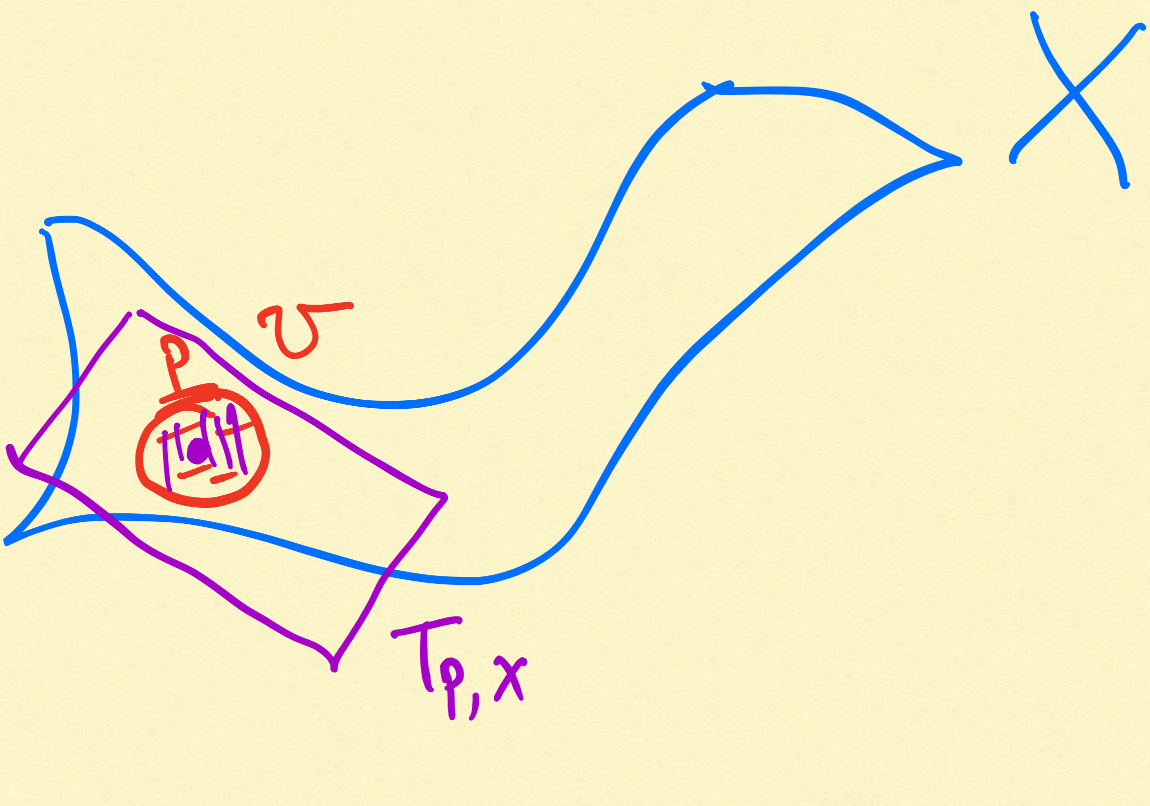
$$f(x) \sim \underbrace{\frac{h(x)}{q(x)} + \frac{\big(q(x) - q(p)\big)\cdot h(x)}{q(p)\cdot q(x)}}_{f1}$$

si he $f_1 \in \mathcal{I}_p$

&

$\tau(f_1) = \tau(f) \mod \mathfrak{m}^2$

$\square$



CONSEGUENZE : X, Y affini

$f : X \longrightarrow Y$ morfismo

$f(P) = Q$

$f^* : \mathbb{K}[Y] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$

f^* induce

$$f^* : \mathcal{I}_Q / \mathcal{I}_Q^2 \longrightarrow \mathcal{I}_P / \mathcal{I}_P^2$$

Teorema 2 $\Longrightarrow$

f^* induce df

$$
\begin{tikzcd}
(df) = (f^*)^\vee : \left(\mathcal{I}_P / \mathcal{I}_P^2\right)^* \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & \left(\mathcal{I}_Q / \mathcal{I}_Q^2\right)^* \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] \\
\left(\mathfrak{m}_P / \mathfrak{m}_P^2\right)^* & \left(\mathfrak{m}_Q / \mathfrak{m}_Q^2\right)^*
\end{tikzcd}
$$

COROLLARIO:

natura intrinseca di

$T_{P,X}$

$$\begin{array}{cccc} f: U & \longrightarrow & W & \text{isomorfismo} \\ \cap & & \cap & \\ X & & Y & \end{array}$$

$f(P) = Q$

allora $T_{P,U} \cong T_{Q,W}$

In particolare

$U \subset X$

$T_{P,U} \cong T_{P,X}$

$\square$

Altro modo per
interpretare $T_{P,X}$: DERIVAZIONI

def. $X \subseteq \mathbb{A}^n$ varietà affine
$P \in X$

Una derivazione di $\mathbb{K}[X]$
in P è

funzione $\mathbb{K}$-lineare
$$\delta : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}$$
tale che
$$\forall\ f, g \in \mathbb{K}[X]$$

$$\delta(f\cdot g) = g(P)\cdot\delta(f) + f(P)\cdot\delta(g)$$

valutazione in P

derivazione

$$\mathrm{Der}_P\, \mathbb{K}[X] = \{\text{derivazioni in } P\}$$

Teorema 3

$$\mathrm{Der}_P\, \mathbb{K}[X] \simeq T_{X,P}$$

Idea: $\exists$ morfismo

$$\varphi : T_{X,p} \longrightarrow \mathrm{Der}_p\, \mathbb{K}[X]$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ | \\ v_n \end{pmatrix} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$$

vettore $\longmapsto$ operatore lineare su $\mathbb{K}[X]$