21/5/2020

VISTO: $X \subset \mathbb{P}^N$ varietà irriducibile di $\dim = n$

$F \notin I(X)$

$\Rightarrow X \cap V(F)$ ha $\dim = n-1$

<u>COR</u>. 1 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ $\dim = n$

$Z = X \cap V(F_1, \dots, F_s)$

$\Rightarrow \dim(Z) \geq n - s$

$X = \mathbb{P}^N$

Se $\dim = N - s$ Z si dice intersezione completa

<u>COR.</u> 2 $X \subseteq \mathbb{A}^N$ chiuso alg. irr.

$\dim(X) = n$

$$Z = X \cap V(f_1, \dots, f_s)$$

se $Z \neq \emptyset$ allora

$$\dim(Z) \geq n - s$$

<u>Teorema</u>. X, Y varietà q.p. irriducibili

$\dim(X) = n$

$\dim(Y) = m$

$f : X \to Y$ morfismo surgettivo

ALLORA:

(0) $m \leq n$

(1) $\forall\ F_y = f^{-1}(y)$ fibra

$\dim(F_y) \geq n - m$

(2) $\exists$ aperto $U \subset Y$

t.c. $\dim(F_y) = n-m$

$\forall y \in U$

<u>DIM</u>. Per definizione possiamo supporre X, Y affini

In particolare:

$$\mathbb{K}[Y] \xhookrightarrow{f^*} \mathbb{K}[X]$$

&

$$\mathbb{K}(Y) \hookrightarrow \mathbb{K}(X)$$

(0) Quindi $\dim(Y) \leq \dim(X)$

(1) Prendiamo $\bar{y} \in Y$

$\exists \; g_1, \dots, g_m \in \mathbb{K}[Y]$ t.c.

$$\begin{cases} \bar{y} \in Y \cap V(g_1, \dots, g_m) \\ \dim\left(Y \cap V(g_1, \dots, g_m)\right) = 0 \end{cases}$$

CIOÈ

$$Y \cap V(g_1, \dots, g_m) = \{\bar{y}, y_1, \dots, y_k\}$$

$k+1$ punti

Consideriamo $U \subset Y$

aperto t.c. $y_i \notin U$ $_{i=1 \dots k}$

ovvero

$$\overline{y} = U \cap V(g_1, \dots, g_m)$$

Quindi

$$f^{-1}(y) = V(f^*(g_1), \dots, f^*(g_m))$$

con $f^*(g_i) \in \mathbb{K}[X]$

$X \subset \mathbb{A}^N$ per ipotesi

$\Rightarrow$ Per il COR. 2

$$\dim(f^{-1}(y)) \geq n - m$$

(2) $\quad X \subset \mathbb{A}^N \qquad Y \subset \mathbb{A}^M$

$$\mathbb{K}(Y) \xhookrightarrow{f^*} \mathbb{K}(X)$$

&

$$\text{tr deg}_{\mathbb{K}(Y)} \left[\mathbb{K}(X)\right] = n - m$$

per def. di dimensione

Consideriamo base di trascendenza

$x_1, \dots, x_{n-m}$

ALLORA: $\forall\, i > n-m \quad x_i$ è alg. DIP.

OVVERO $\exists\, P_i$ polinomio

$$P_i \in \mathbb{K}(Y)[x_1, \dots, x_{n-m}, x_i]$$

$P_i \neq 0$

t.c. $P_i(x_1, \dots, x_{n-m}, x_i) = 0$

scriviamo

$$P_i = \sum a_{I_i} x^{I_i}$$

dove $a_{I_i} = a_{I_i}(y)$

Poniamo $U_i \subset Y$ l'aperto

$$U_i = Y \setminus V(a_{I_i\, max})$$

coeff di P_i di grado massimo

Consideriamo

$$U = \bigcap_{i > n-m} U_i$$

allora $\forall\ \bar{y} \in U$

$f^{-1}(\bar{y})$ chiuso affine di X

&

$\forall\ i > n-m$

$p_i(x_1, \dots, x_{n-m}, x_i, y_1(\bar{y}), \dots, y_M(\bar{y}))$

Pol. non nullo su $f^{-1}(\bar{y})$

che dà relazione

di dipendenza algebrica

cioè $x_1, \ldots, x_{n-m}, x_i$ su $f^{-1}(\bar{y})$

alg. dip. $\forall i > n-m$

conclusione: $\dim\left(f^{-1}(\bar{y})\right) \leq n-m$

cioè $\dim = n$

$\forall \bar{y} \in V$

$\square$

DIMENSIONE TOPOLOGICA

per spazi Top. Noetheriani

Sia X sp. top. Noetheriano

(e.g.: $X \subset \mathbb{P}^n$, $X \subset \mathbb{A}^n$)

DEF. Sia X sp. top. Noetheriano irriducibile

$\text{Top}\dim(X) \doteq$

$= \sup\{ \ell \mid \exists$ catena di chiusi irriducibili di lunghezza $\ell \}$

DOVE:

CATENA di chiusi irriducibili di lunghezza ℓ

$\Updownarrow$

$$\emptyset \neq X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq \dots \subsetneq X_\ell = X$$

X_0 p.to

<u>Teorema</u> X varietà q.p. irriducibile

ALLORA: $\dim(X) = \operatorname{Top\,dim}(X)$

<u>DIM</u>. Poniamo

Top dim $= m$ dim $= n$

1) $m \leq n$

Data catena di chiusi irriducibili

$$X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_\ell = X$$

VISTO: se $X_i \subsetneq X_{i+1}$

allora $\dim X_i < \dim X_{i+1}$

Pertanto $\ell \leq n$

Passando al sup: $m \leq n$

2) $n \leq m$

Per induzione su n

$n=0$

X irriducibile $\Rightarrow X = \{p.to\}$

$$\dim(X) \leq \operatorname{topdim}(X)$$

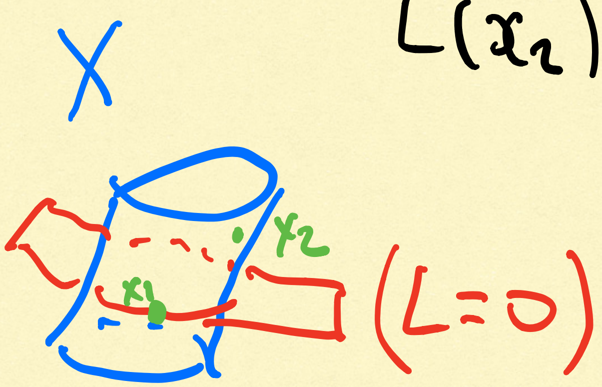
Sia $n > 0$

Consideriamo L forma lineare

t.c. $L \notin I(X)$

$\exists \; x_1, x_2 \in X$ t.c.

$$L(x_1) = 0$$
$$L(x_2) \neq 0$$



allora $X_L = X \cap V(L) \subsetneq X$

(Teo.) $\Rightarrow \dim(X_L) = n-1$

Per induzione

$$\begin{array}{ccc} \dim(X_L) & \leq & \mathrm{Top}(X_L) \\ \| & & \| \\ n-1 & & m-1 \end{array}$$

per costruzione

Per ipotesi induttiva

$m-1 \geq n-1$

$\square$

Punti lisci e Punti singolari

- Ipersuperfici affini

$X \subset \mathbb{A}^n$ ipersuperficie

$X = V(f)$

$P \in X$ è liscio (o non-singolare)

SE

$$\exists i : \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) \neq 0$$

In questo caso:
spazio tangente affine a X in p

$$T_p(X) = T_{X,p} \quad \text{è}$$

dato dall'eq.

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{p})(x-a_i) = 0$$

dove $p = (a_1, \ldots, a_n)$

<u>PROP</u>. $X = V(f)$
f polinomio irriducibile

ALLORA: $\{p \in X : p \text{ liscio}\}$

è aperto $\neq \emptyset$ (denso)
in X

DIM $\{ p \text{ singolari} \} =$

$$= V\left(f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

$\doteq X_{sing}$

Tesi: $X_{sing} \subseteq X$ è chiuso proprio

P.A. se $X_{sing} = X$
allora

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv 0 \quad \text{su } X \quad \forall i$$

$$NSS \Longrightarrow f \mid \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \forall i$$

$\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$ ciò è
assurdo poiché
$\deg \frac{\partial f}{\partial x_i} < \deg f$
(altrimenti $f =$ costante)

$\mathrm{char}(\mathbb{K}) = p$

$$\forall i \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv 0$$

$$\Rightarrow f = g\left(x_1^p, \dots, x_n^p\right)$$

cioè

$$f = \sum a_I \left(x^p\right)^I$$

$$= \sum b_I^p \left(x^I\right)^p =$$

$$= \sum \left(b_I x^I\right)^p$$

essurdo poiché f è irriducibile

$\square$

Varietà affini

$X \subset \mathbb{A}^n$ chiuso algebrico

$p = (a_1, \ldots, a_n) \in X$

$$I(X) = (g_1, \ldots, g_r)$$

$\forall f \in I(X)$ poniamo

$$f_p^{(1)} \doteq \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\,(x_i - a_i)$$

$$T_{X,p} \doteq \bigcap_{f \in I(X)} \left(f_p^{(1)} = 0 \right)$$

$$= \bigcap_{i=1}^{r} \left(g_p^{(1)} = 0 \right)$$

Poiché $f \in I(X)$

$$f = \sum h_i \cdot g_i$$

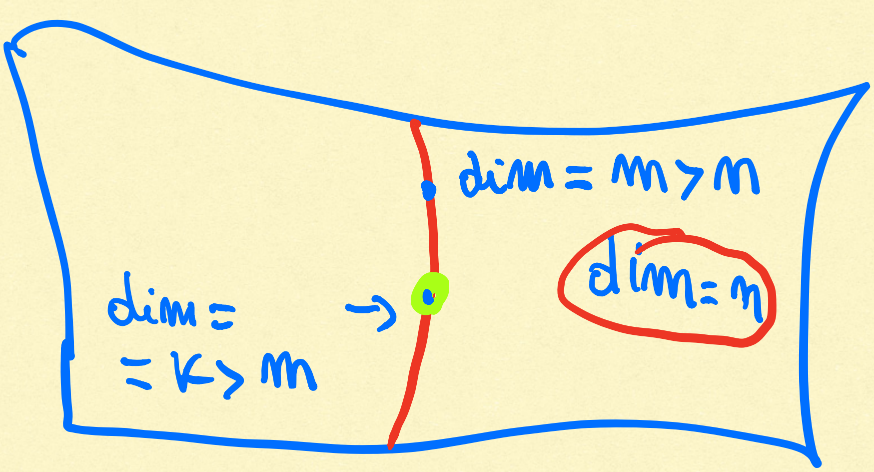
$$\nabla f = \sum h_i \nabla g_i(p) + \underbrace{\sum g_i \nabla h_i(p)}_{= 0 \text{ su } X}$$

PROP. Sia $X \subset \mathbb{A}^n$ varietà affine irriducibile

ALLORA: la funzione

$$\varphi : X \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$p \longmapsto \dim(T_{X,p})$$

è semicontinua sup.$^{\text{nte}}$



dim. Consideriamo

$$J(p) = \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right)_{\substack{j=1,\dots,r \\ i=1,\dots,n}}$$

$$X = V(g_1, \dots, g_r)$$

$$\dim T_{X,p} = n - rK(J(p))$$

poiché dim spazio affine = dim algebrica

MA $rK(J(p)) \leq K$

è condizione algebrica

in X

$\Rightarrow$ definisce un chiuso

$+$

abbiamo stratificazione $\square$

In particolare:

$\{ p : \dim T_{X,p} \text{ è minima} \}$

è aperto (denso)

in X

PROP. $X \subset \mathbb{A}^n$ chiuso irriducibile

ALLORA:

$$\min\left(\dim T_{X,p}\right) = \dim(X)$$

dim

sia $X = V(f)$

$\dim(X) = n-1$

p punto liscio per X $\iff$ $\dim T_{X,p} = n-1$

$\Updownarrow$

$\iff$ $\dim T_{X,p}$ è minima

CASO GENERALE:

X irriducibile, affine
dim $= n$

$\Downarrow$

$\exists\ \varphi : X \dashrightarrow Y \subset \mathbb{A}^{n+1}$

φ birazionale

Per il lemma di normalizzaz. di Noether

φ birazionale $\Longrightarrow$

$\dim(Y) = \dim(X) = n$

&

$\exists\ U \subset X$ aperto denso

$W \subset Y$ aperto denso

tali che

$U \cong W$ isomorfismo di varietà affini

Fatto: (vedremo)

$U \cong W \Rightarrow T_p(U) \cong T_{\varphi(p)}(W)$

$\exists$ aperto $W_1 \subset W$

t.c. $\forall \ q \in W_1$

$$\dim\left(T_q(W)\right) = n$$

Quindi in $\varphi^{-1}(W_1)$

$$\dim\left(T_{\varphi^{-1}(q),X}\right) = n$$

$\square$

COR. **DEF**

$X \subset \mathbb{A}^N$ varietà affine di $\dim = n$

allora

$p \in X$ è liscio

$\Updownarrow$

$\dim T_{p,}X = n$

Inoltre

$X_{sm} = \{ p \in X : p \text{ è liscio} \}$

è aperto denso

$\square$