20/3/2020

$$\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$$

Topologia di Zariski

è la topologia

dove

CHIUSI $\leftrightarrow$ $V(I)$

con I IDEALE

$\subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$

OSS. Caso particolare

$I = (f)$ ideale generato da un unico polinomio

$$\mathcal{U}_f = \mathbb{A}^n \setminus V(f)$$

UNA BASE per gli aperti è data da

$$\{ \mathcal{U}_f : f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \}$$

DEf. $V(f)$ si chiama IPERSUPERFICIE

Supponiamo $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ (o almeno $\# \mathbb{K} = \infty$)

VISTO:

In $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

CHIUSI $\leftrightarrow$ $V(I)$

I IDEALE OMOGENEO $I \subset \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$

CORRISPONDENZA

V - I in $\mathbb{P}^n$

① $J \subset \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$

IDEALE OMOGENEO

$$\Rightarrow V_{\mathbb{P}^n}(J) =$$

$$= \{ (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n : f(x_0, \dots, x_n) = 0 \ \forall f \in J \}$$

(2) Dato X
chiuso algebrico
in $\mathbb{P}^n$

$$I_{\mathbb{P}^n}(X) = \left\{ F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] : \begin{array}{l} F(x_0, \dots, x_n) = 0 \\ \quad \forall (x_0, \dots, x_n) \in X \\ F \text{ OMOGENEO} \end{array} \right\}$$

Ricordo:

I IDEALE OMOGENEO $\iff$ I generato da pol. omogenei

NULLSTELLENSATZ PROIETTIVO

In $\mathbb{A}^n$ si ha

$\emptyset \iff$ Ideale (1)

"In $\mathbb{P}^n$ dobbiamo considerare $(0,0,\dots,0) \in \mathbb{A}^{n+1}$ che non $\exists$ in $\mathbb{P}^n$"

$(0,\_\_\_,0) \longleftrightarrow$ Ideale $(x_0, x_1, \dots, x_n)$

(ideale irrilevante)

Teorema. $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$

(i) $J \subseteq \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$
ideale omogeneo

$$V_{\mathbb{P}^n}(J) = \emptyset \Rightarrow \sqrt{J} \supseteq (x_0, \ldots, x_n)$$

(ii) $J \subseteq \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$
ideale omogeneo

$$I\left(V_{\mathbb{P}^n}(J)\right) = \sqrt{J}$$

OMOGENIZZAZIONE

$$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow \mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

$$f \longmapsto H(f) \quad \text{pol. omogeneo}$$

$$H(f) = x_0^{\deg f} \cdot \left(f\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right) \right)$$

DEOMOGENIZZAZIONE

$$\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] \longrightarrow \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$$

$$F \longmapsto D(F) = F(1, x_1, \dots, x_n)$$

Interpretazione geometrica

$$i_0 : \mathbb{A}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n$$

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (1 : x_1 \dots : x_n)$$

In $\mathbb{P}^n$

PONIAMO $H_0 = \{x_0 = 0\}$

iperpiano all'∞

$$U_0 = \mathbb{P}^n \setminus H_0$$

$$U_0 = \{x_0 \neq 0\}$$

OSS: $U_0 = \{(1 : x_1 : \dots : x_n)\}$

$i_0 : \mathbb{A}^n \longrightarrow U_0$

è una bigezione

$i_0^{-1} : U_0 \longrightarrow \mathbb{A}^n$

Consideriamo ipersuperficie

$X \subset \mathbb{A}^n$

$X = V(f)$

OMOGENIZZARE f

$$\Updownarrow$$

fare la chiusura proiettiva di $X \doteq \overline{X}$

$$\iota_0 : X \hookrightarrow \overline{X} \subset \mathbb{P}^n$$

$$\overline{X} \overset{def}{=} V_{\mathbb{P}^n}\big(H(f)\big)$$

$$= \{ (x_0 : \ldots : x_n) \ : \ H(f)(x_0, \ldots, x_n) = 0 \}$$

VICEVERSA

deomogenizzare

$\Updownarrow$

Intersezione con U_0

Data $\overline{X} = V_{\mathbb{P}^n}(F) \subset \mathbb{P}^n$

F pol. omogeneo

$$\overline{X} \rightsquigarrow X = V_{\mathbb{A}^n}(D(F)) \subset \mathbb{A}^n$$

$$X = \{(x_1, \ldots, x_n) : F(1, x_1, \ldots, x_n) = 0\}$$

OSS: $V(f) = X$ ipersuperficie $\subset \mathbb{A}^n$

$$\iota_0(X) = \iota_0\left(V_{\mathbb{A}^n}(f)\right)$$

$$= V_{\mathbb{P}^n}(H(f)) \cap U_0$$

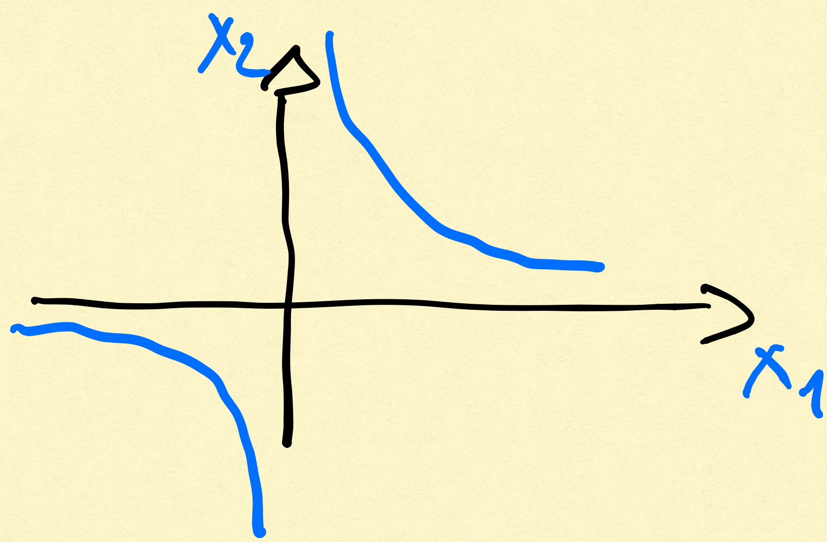
$$= \overline{X} \cap U_0$$

Esempi

① $f = 1 - x_1 x_2$

$\in \mathbb{K}[x_1, x_2]$

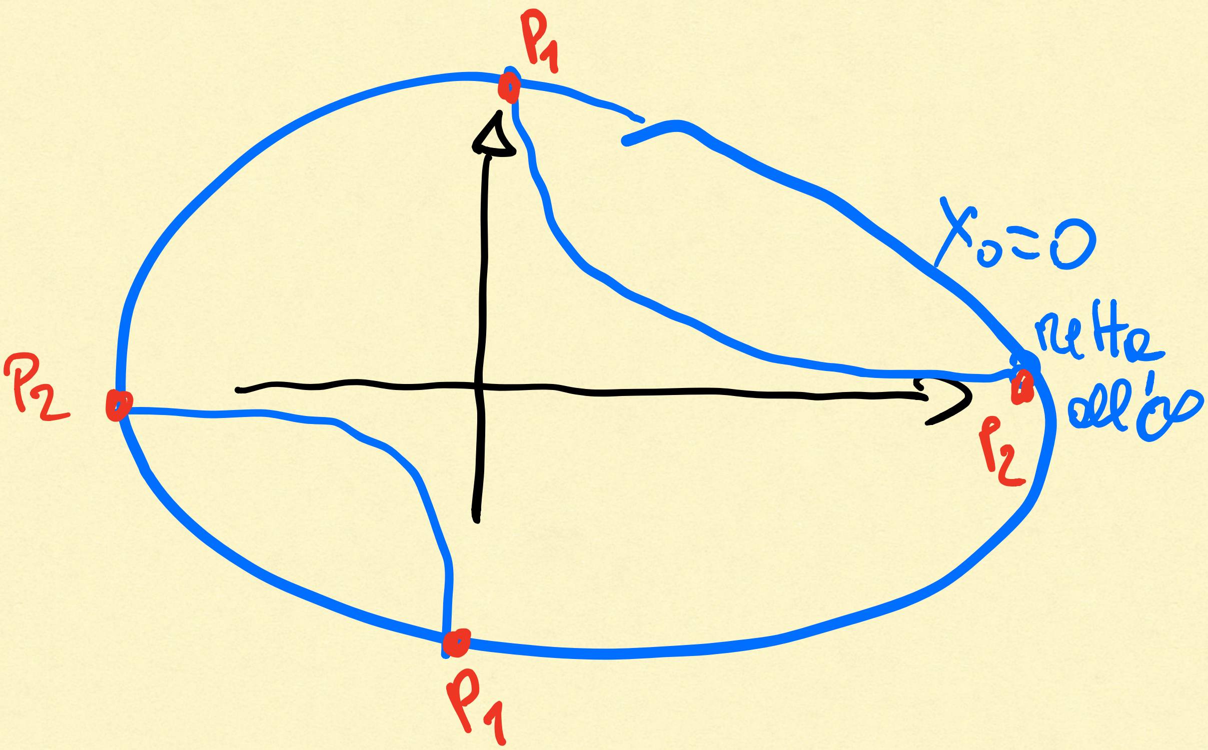
$$X = V(f) \subset \mathbb{A}^2$$



$$f = 1 - x_1 x_2 \longmapsto H(f) = x_0^2 - x_1 x_2$$

$$\overline{X} = \{(x_0 : x_1 : x_2) : \quad x_0^2 - x_1 x_2 = 0\}$$

$$\subset \mathbb{P}^2$$



$$\overline{X} \setminus X \Longleftrightarrow \begin{cases} H(f) = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

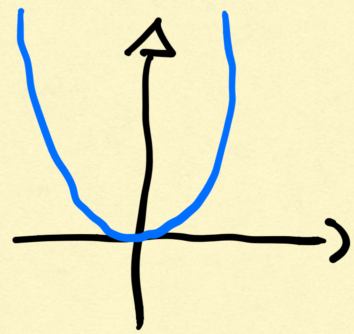
$$\begin{cases} x_1 x_2 - x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

sol: $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 \cdot x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

$$\bar{X} \setminus X = \{ \underset{(0:0:1)}{\underset{\parallel}{P_1}}, \underset{(0:1:0)}{\underset{\parallel}{P_2}} \}$$

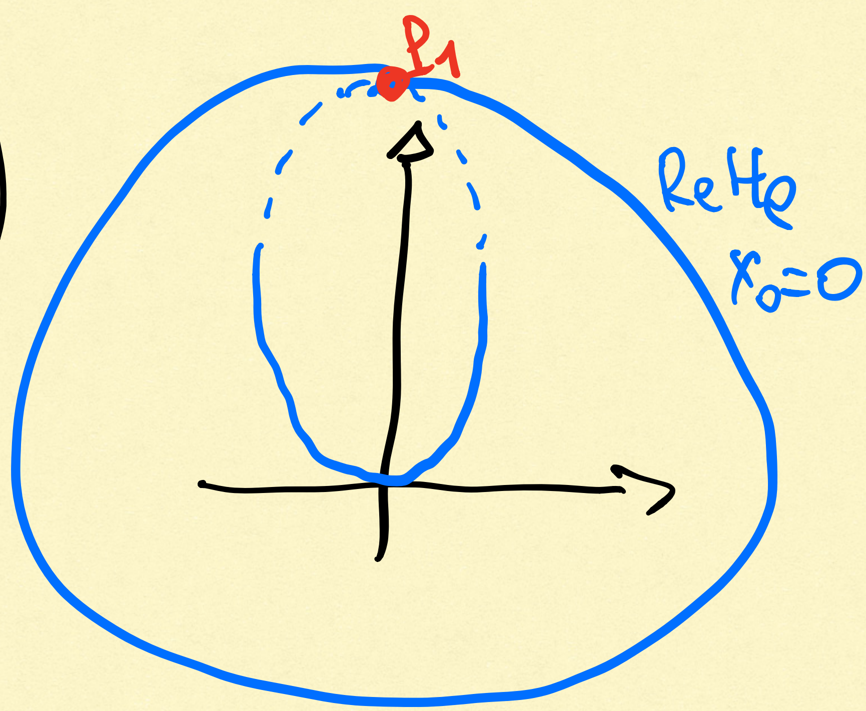
② $f = x_2 - x_1^2 \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$

$V(f) \subset \mathbb{A}^2$



$H(f) = x_0 x_2 - x_1^2$

$V(H(f)) = \overline{X}$



$$\overline{X} \setminus X = \begin{cases} x_0 x_2 - x_1^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$P_1 = (0:0:1)$ p.to con molt. $= 2$

$U_0 = \{(1 : x_1 : \ldots : x_n)\} \subset \mathbb{P}^n$

con topologia di sottospazio rispetto top. di Zariski di $\mathbb{P}^n$

$\mathbb{A}^n$ con top. di Zariski

<u>PROP</u>. $\iota_0 : \mathbb{A}^n \to U_0$ è OMEOMORFISMO

<u>DIM</u> ι_0 è BIGETTIVA

Lo continua: consideriamo aperto della BASE

$X = V(f) \subset \mathbb{A}^n$

$U = \mathbb{A}^n \setminus X$

$X \longrightarrow \overline{X} = V(H(f))$

$\iota_0^{-1}(\overline{X}) = V_{\mathbb{A}^n}(D(H(f)))$

$= V(f)$

cioè $\iota_0^{-1}(\mathbb{P}^n \setminus V(H(f)))$ è aperto

ι_0 è mappa chiusa:

$$X = V_{\mathbb{A}^n}(f)$$

$$\iota_0(X) = V_{\mathbb{P}^n}(H(f)) \cap \mathcal{U}_0$$

$$= \overline{X} \cap \mathcal{U}_0$$

chiuso in $\mathcal{U}_0$

$\square$

RICOPRIMENTO STANDARD di $\mathbb{P}^n$

$$U_i = \{ x_i \neq 0 \} \subset \mathbb{P}^n$$

$$U_i = \left\{ \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, 1, \text{---}, \frac{x_n}{x_i} \right) \right\}$$

$$\cong$$

$$\mathbb{A}^n$$

Ricoprimento di $\mathbb{P}^n$

$$= \{ U_i : i=0, \dots, n \}$$

ciascun $U_i \cong \mathbb{A}^n$

CHIUSURA proiettiva
di $X \subset \mathbb{A}^n$

VISTO : X ipersuperficie

$\iota_0 : \mathbb{A}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n$

$\mathbb{P}^n$ è una compattificazione
di $\mathbb{A}^n$

X CHIUSO ALGEBRICO
di $\mathbb{A}^n$

$$X \longrightarrow \overline{X} \subset \mathbb{P}^n$$

chiusura
o compattificazione

$$\overline{X} \doteq \bigcap \left\{ Y : Y \text{ chiuso di } \mathbb{P}^n,\ Y \supset i_0(X) \right\}$$

Dal p.to di vista
algebrico

$X = V(I)$ $\quad$ I ideale $\subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$

Poniamo $\overline{I} = (H(f) : f \in I)$

Si ha

$$\overline{X} = V(\overline{I})$$

$$= \bigcap_{f \in I} V(H(f))$$

---

attenzione: $I = (f_1, \dots, f_n)$

In generale $\overline{I} \neq (H(f_1), \dots, H(f_2))$

CHIUSI IRRIDUCIBILI

X chiuso algebrico

DEF. X si dice **riducibile**

se $\exists$ X_1, X_2 chiusi propri

$$\begin{pmatrix} X_1 \neq \emptyset, X \\ X_2 \neq \emptyset, X \end{pmatrix}$$

t.c. $X = X_1 \cup X_2$

Leggendo questa def.

<u>DEF</u>. X chiuso è

IRRIDUCIBILE

SE

$$X = X_1 \cup X_2 \quad X_1, X_2 \text{ chiusi}$$

$$\Rightarrow \quad X = X_1 \text{ oppure } X = X_2$$

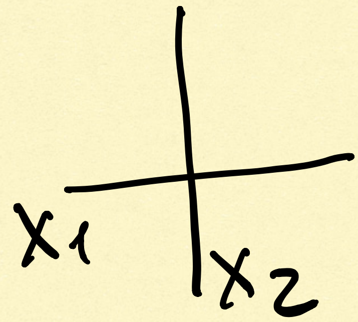
<u>Esempi</u>. ① $f = x_1 \cdot x_2$

$$X = V(f) \subset \mathbb{A}^2$$

è riducibile

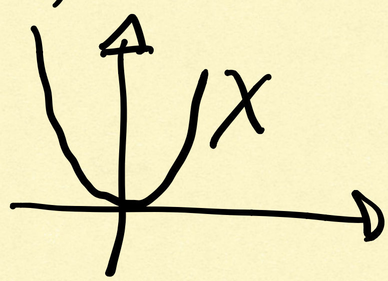
$$X_1 = \{ x_1 = 0 \}$$

$$X_2 = \{ x_2 = 0 \}$$



② $f = x_2 - x_1^2$

$X = V(f)$ è irriducibile



OSS. X IPERSUPERFICIE

$$X = V(f)$$

X IRRIDUCIBILE $\Longleftrightarrow$ f è irriducibile

$X_1 \subsetneq X$

$I(X_1) = (f_1) \Rightarrow f_1$ DIVIDE f

viceversa

$f = f_1 \cdot f_2 \qquad X = V(f_1) \cup V(f_2)$

In generale

se $X \subset \mathbb{A}^n$

vale il seguente

TEOREMA

$X \subset \mathbb{A}^n$ chiuso

X IRRIDUCIBILE $\iff$ $I(X)$ primo

dove: I ideale si dice PRIMO se $f_1 \cdot f_2 \in I \Rightarrow f_1 \in I$ oppure $f_2 \in I$

DIM. $\Rightarrow$ P.A. supponiamo

X riducibile $V(I) = X$

$X = X_1 \cup X_2$ X_1, X_2 chiusi propri

$$\Rightarrow \exists\, f_1 \in I(X_1) \setminus I$$
$$\exists\, f_2 \in I(X_2) \setminus I$$

t.c.

$$f_1 \cdot f_2 (x) = 0 \quad \forall x \in X$$

$$\Rightarrow f_1 \cdot f_2 \in I = I(X)$$

$\Rightarrow$ I non è primo

$\Leftarrow$ P.A. supponiamo

$I = I(X)$ non primo

cioè $\exists \; f_1, f_2 \notin I(X)$ t.c.

$f_1 \cdot f_2 \in I(X)$

Poniamo $I_1 = (I, f_1)$

$I_2 = (I, f_2)$

$X_1 = V(I_1)$

$X_2 = V(I_2)$

Per costruzione

$$X_i \subsetneq X$$

$$\& \quad X \subset X_1 \cup X_2$$

poiché $f_1 \cdot f_2 \in I(X)$

OVVERO

$$X = X_1 \cup X_2$$

assurdo $\square$

CASO PROIETTIVO

Teorema $X \subseteq \mathbb{P}^n$

X irriducibile $\Leftrightarrow$ $I(X)$ ideale omogeneo primo.

DIM segue dal lemma seguente

Lemma I omogeneo
non primo

$\Rightarrow \exists\ f_0, g_0$ pol. omogenei

$f_0, g_0 \notin I$

t.c. $f_0 \cdot g_0 \in I$

---

dim Lemma

I omogeneo

I non è primo $\Rightarrow$

$\exists\ f, g \quad f, g \notin I$ ma $f \cdot g \in I$

Scriviamo

$$f = \sum f_h \qquad f_h \text{ omogeneo di grado } h$$

$$g = \sum g_j \qquad g_j \text{ omogeneo di grado } j$$

Siano

$$h_0 = \min \{ h : f_h \notin I \}$$

$$j_0 = \min \{ j : g_j \notin I \}$$

n.b. h_0, j_0 $\exists$ perché $f, g \notin I$

Poniamo

$$f' = f - \sum_{h<h_0} f_h$$

$$g' = g - \sum_{s<s_0} g_s$$

ABBIAMO per costruzione

$$f', g' \notin I$$

$$f' \cdot g' \in I$$

$$f' = \sum_{h \geq h_0} f_h \qquad g' = \sum_{s \geq s_0} g_h$$

$$f' \cdot g' = f_{h_0} \cdot g_{s_0} + \text{pol. di grado + alto}$$

$$\in I$$

Ma I è omogeneo

$$\Rightarrow f_{h_0} \cdot g_{s_0} \in I$$

$\square$

PROP.

$X \subset \mathbb{A}^n$ irriducibile

$\Updownarrow$

$\overline{X} \subset \mathbb{P}^n$ irriducibile

DIM.

OSS.

$$\overline{X} \subset \mathbb{P}^n$$
$$\downarrow$$
$$X = \varphi_0^{-1}(\overline{X} \cap U_0)$$

$$X = \emptyset \iff \overline{X} \subseteq \{x_0 = 0\}$$

$\Downarrow$ P.A. $X = X_1 \cup X_2$

chiusi propri

allora $\overline{X} = \overline{X_1 \cup X_2}$

$= \overline{X_1} \cup \overline{X_2}$

$\overline{X_1}, \overline{X_2}$ chiusi propri di $\overline{X}$

$\Uparrow$ $X = V(I)$

$\overline{X} = V(\overline{I})$

con $\overline{I} = (H(f) : f \in I)$

Per costruzione

$I \ni f$ allora

$x_0 \nmid H(f) \quad \forall f$

cioè $(x_0) \not\subset \overline{I}$

ovvero $\overline{X} \not\subset \{x_0 = 0\}$

Se P.A. $\overline{X}$ riducibile

$\Downarrow$

$\overline{I}$ non è primo

$\Downarrow$

$\exists\ \bar{f}_1 \notin \bar{I}$

$\quad \bar{f}_2 \notin I \quad$ t.c. $\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2 \in \bar{I}$

adesso $D(\bar{f}_i) = f_i \in I$

$f_i \neq$ costante

perché $x_0 \nmid \bar{f}_i$

& $f_1 \cdot f_2(x) = 0$

$\forall\ x \in \bar{X} \cap U_0 = X$

ASSURDO

cioè $\underset{I(X)}{I}$ non primo $\square$

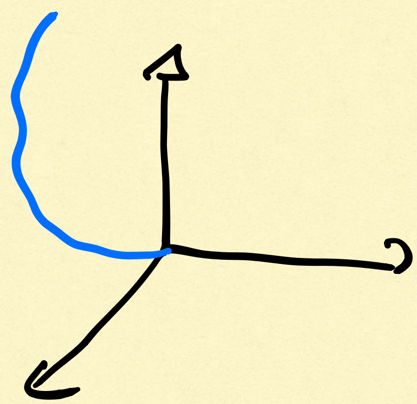
ESEMPIO : CUBICA GOBBA

(twisted cubic)

$$X = \{(t, t^2, t^3) : t \in \mathbb{K}\} \subset \mathbb{A}^3$$

X è immagine di

$$f : \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^3$$
$$t \mapsto (t, t^2, t^3)$$



$$I_{\mathbb{A}^3}(X) = ?$$

$$X : \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t^2 \\ x_3 = t^3 \end{cases}$$

$$I(X) \ni f_1 = x_1^2 - x_2$$

$$\ni f_2 = x_1^3 - x_3$$

Tesi : $I(X) = (f_1, f_2)$

Sia $f \in I(X)$

$f - \lambda f_1$ "$\Leftrightarrow$" sostituire x_2 con x_1^2

$f - \mu f_2$ "$\Leftrightarrow$" sostituire x_3 con x_1^3

CIOE' per opportuni λ, μ

$$g \doteq f - \lambda f_1 - \mu f_2$$

$= \text{polinomio in } x_1$

$\equiv 0 \quad \text{su } X$

cioè $\quad g \in I(X)$

$$\Rightarrow \quad f \cancel{\in} = \lambda_1 f + \mu_2 f_2$$

X è irriducibile

(vedremo: X = immagine di $\mathbb{A}^1$ che è irriducibile)

oppure:

$$I(X) = (f_1, f_2)$$

$I(X)$ primo

$\Updownarrow$

$\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3] / I(X)$ dominio di integrità nostro caso

$$\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3] \big/ I(X) \cong \mathbb{K}[x_1]$$

$\uparrow$

D.I

CONSIDERIAMO

$$\overline{X} \subset \mathbb{P}^3$$

chiusura di X

Per capire $\overline{X}$ & $\overline{I}$

consideriamo nuovi generatori di $\overline{I}$

$$X : \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t^2 \\ x_3 = t^3 \end{cases}$$

$$g_1 = x_2 - x_1^2 \quad \leftarrow t^2 = t^2$$

$$g_2 = x_1 x_3 - x_2^2 \quad \leftarrow t^4 = t^4$$

$$g_3 = x_3 - x_1 x_2 \quad \leftarrow t^3 = t^3$$

$$I(X) = (g_1, g_2, g_3)$$

Però in $\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$

$\exists$ relazione

$$x_1 \cdot g_3 - g_2 = x_2 g_1$$

$$\overline{I} \ni H(g_1) = x_0x_2 - x_1^2$$

$$H(g_2) = x_1x_3 - x_2^2$$

$$H(g_3) = x_0x_3 - x_1x_2$$

Abbiamo

$$\overline{I} = I(\overline{X})$$

$$= (x_0x_2 - x_1^2,\ x_1x_3 - x_2^2,\ x_0x_3 - x_1x_2)$$

generato da 3 polinomi

$$H(f_1) \in \overline{I}$$

$$H(f_2) \in \overline{I}$$

ma $(H(f_1), H(f_2)) \subsetneq \overline{I}$

$\square$