2/4/2020

INTERSEZIONE di 2 curve piane

Intersezione → geometrica

Intersezione → algebrica

Strumento: RISULTANTE

Risultante di 2 polinomi

Consideriamo

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \qquad a_m \neq 0$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_p x^p \qquad b_p \neq 0$$

Risultante di f e g

$$Ris(f,g) \doteq \det \begin{pmatrix}
a_0 & a_1 & \cdots & a_m & \overbrace{0 \;\cdots\cdots\; 0}^{p-1} & \\
0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_m & 0 \cdots 0 \\
\vdots & & & & & \vdots \\
0 \cdots\cdots 0 & a_0 & a_1 & & \cdots & a_m \\
b_0 \cdots & b_p & 0 & & \cdots & 0 \\
0 & b_0 & \cdots & b_p & 0 \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & \\
\underbrace{0 \;\cdots\cdots\; 0}_{m-1} & & 0 & b_0 & \cdots & b_p
\end{pmatrix}$$

matrice $(m+p) \times (m+p)$

Proprietà fondamentale:

$f, g \in \mathbb{C}[x]$

$Ris(f,g) = 0 \iff f, g$ hanno una radice comune

Esempio:

$f = ax^2 + bx + c$

$g = f' = 2ax + b$

discriminante di $f \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Ris}(f, f')$

$$\det \begin{pmatrix} c & b & a \\ & & \\ b & 2a & 0 \\ 0 & b & 2a \end{pmatrix} \qquad (2+1)\times(2+1)$$

$$\det = 0 \iff \Delta = b^2 - 4ac = 0$$

Risultante si usa per

$f, g \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$

Considerando

$$\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n] = \underbrace{\mathbb{C}[x_0, \dots, x_{n-1}]}_{\text{anello dei coeff.}}[x_n]$$

Poniamo

$$f(x_0, \dots, x_n) = A_0 + A_1 \cdot x_n + \dots + A_m x_n^m$$

con $A_i \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_{n-1}]$

$$g(x_0, \dots, x_n) = B_0 + B_1 x_n + \dots + B_p x_n^p$$

con $B_j \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_{n-1}]$

$$\mathrm{Ris}_{x_n}(f, g) = \det\begin{pmatrix} A_0 & \cdots & A_m & \\ \vdots & & & \\ B_0 & \cdots & B_p & \cdots \\ & & & B_0 \cdots B_p \end{pmatrix}$$

polinomio nelle variabili $x_0, \dots, x_{n-1}$

<u>PROPRIETÀ</u>:

(1) <u>OMOGENEITÀ</u>

f, g omogenei di grado m, p

$\Rightarrow \mathrm{Ris}_{x_n}(f, g)$ omogeneo di grado $m \cdot p$

(2) SPECIALIZZAZIONE

Sia $Q = (q_0, \dots, q_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$

Posto

$$f_Q = f(Q, x_n)$$

$$g_Q = g(Q, x_n)$$

se $A_m(Q) \neq 0 \quad B_p(Q) \neq 0$

Ris. in 1 variabile

$$\Rightarrow \mathrm{Ris}(f_Q, g_Q) = \left[\mathrm{Ris}_{x_n}(f, g)\right](Q)$$

ris in n variabili valutato in Q

Consideriamo

C, D due curve piene

$$C = [F] \quad F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d$$

$$D = [G] \quad G \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_m$$

<u>Supponiamo</u>:

(1) $P_0 = (0:0:1) \notin C \cup D$

supporto

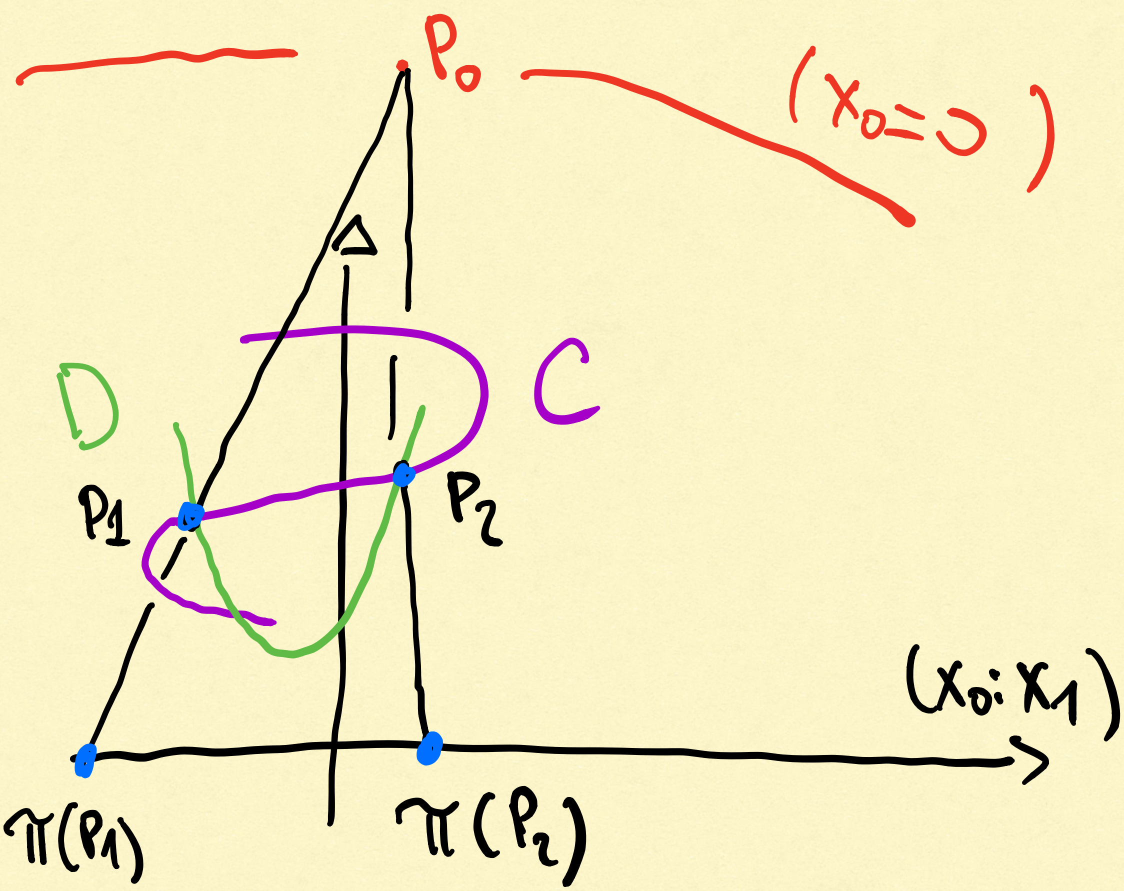
(2) $\forall$ coppia di punti

$P_i, P_j \in C \cap D$

$P_0 \notin P_i * P_j$

Idea geometrica:

- $P_0 \in$ retta all'∞
- PROIETTIAMO sulla retta $(x_0 : x_1)$



PROIEZIONE da P_0
sulla retta $(x_0 : x_1)$

$$\pi : \mathbb{P}^2 \setminus \{P_0\} \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

$$(x_0 : x_1 : x_2) \longmapsto (x_0 : x_1)$$

Ipotesi (1) + (2)

$$\Downarrow$$

$$\pi : C \cap D \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

è iniettiva

"Traduzione algebrica"

Consideriamo Ris_{x_2}

- pol. omogeneo in (x_0, x_1) di grado $m \cdot d$

- Se $P_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \in C \cap D$

$\Rightarrow \pi(P_i) = (\alpha_i, \beta_i)$

t.c.

$$\left[\mathrm{Ris}_{x_2}(F, G)\right](\alpha_i, \beta_i) = 0$$

In particolare:

Teo. fond. algebra (versione proiettiva)

$$\Longrightarrow (\beta_i x_0 - \alpha_i x_1) \text{ divide } \mathrm{Ris}_{x_2}(F, G)$$

Teo. di Bézout
(forma debole)

siano C, D due curve piane

$C = [F]$, $D = [G]$
$\deg = d$ $\qquad$ $\deg = m$

Supponiamo C, D senza componenti comuni.
(i.e. $MCD(F, G) = 1$)

ALLORA: $\# C \cap D \leq d \cdot m$

<u>dim</u>. supponiamo P.A.

$C \cap D \ni \{ P_1, \ldots, P_{d \cdot m+1} \}$

$d \cdot m+1$ punti distinti

$\forall\, i \neq j$ poniamo $\ell_{ij} = P_i * P_j$

Scegliamo $P_0 \notin \bigcup_{i,j} \ell_{ij} \cup C \cup D$

con cambio di coordinate (lineare) poniamo $P_0 = (0:0:1)$

nostra scelta di $P_0 \Rightarrow$ valgono ipotesi (1), (2)

$\Rightarrow \mathrm{Ris}_{x_2}(F, G)$ pol.
omogeneo in (x_0, x_1)
di grado $d \cdot m$

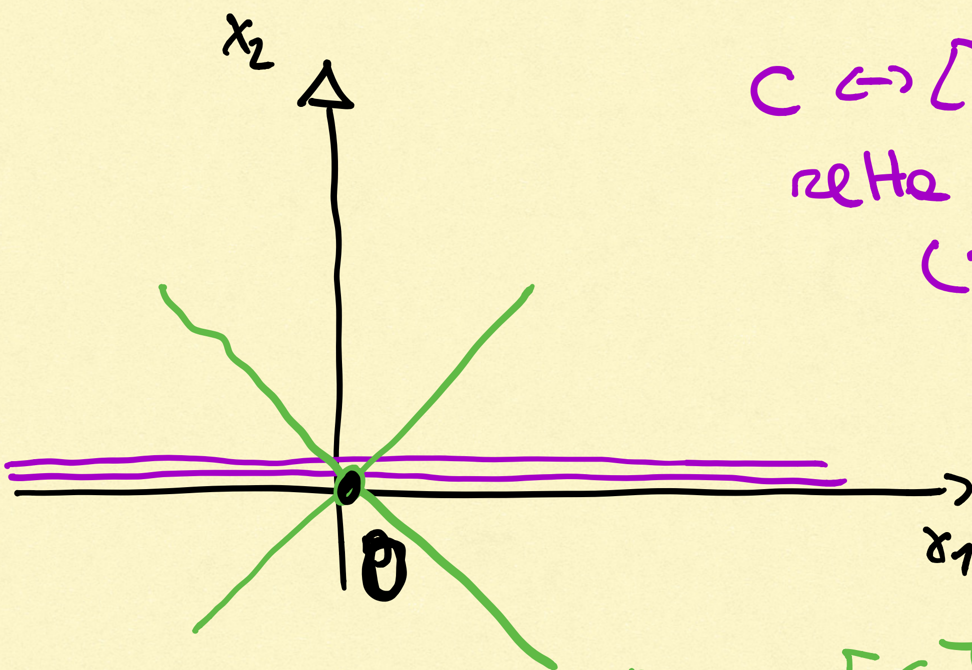
con $d \cdot m + 1$ radici
distinte.

ASSURDO

$\square$

Esempio: $\quad F = x_2^2$

$$G = (x_1 - x_2)\cdot(x_1 + x_2)$$



$C \leftrightarrow [F]$

retta doppia

$(x_2 = 0)$

$D \leftrightarrow [G]$

unione di 2 rette

$$C \cap D \;=\; \text{"insiemisticamente"}$$

$$= O = (1:0:0) \quad \text{ORIGINE}$$

Però dobbiamo considerare la sua molteplicità

Intuitivamente:

$$C = 2R \qquad R = (x_2 = 0)$$

$$D = D_1 + D_2 \qquad D_1 : (x_2 - x_1 = 0)$$

$$D_2 : (x_2 + x_1 = 0)$$

$$C \cdot D = 2R(D_1 + D_2)$$

$$= 2 \cdot (R \cdot D_1 + R \cdot D_2)$$

Intersezione di 2 rette

$$= 2 \cdot (1+1) = 4$$

$\exists$ DEFINIZIONE di molteplicità di intersezione di 2 curve piane in un punto P

$$I(C, D, P) = \begin{cases} 0 & \text{se } P \notin C \cap D \\ \infty & \text{se } P \in \text{componente comune a } C, D \\ \in \mathbb{N} \setminus \{0\} & \text{se } P \in C \cap D \ \& \ P \notin \text{componente comune} \end{cases}$$

$I(C, D, P)$ verifica:

(a) $I(C,D,P) = I(D,C,P)$

simmetria

(b) Se $C = C_1 + C_2$

$\left[\text{i.e. } \begin{array}{l} C = [F] \\ C_1 = [F_1] \\ C_2 = [F_2] \end{array} \Rightarrow F = F_1 \cdot F_2 \right]$

allora

$$I(C_1 + C_2, D, P) = I(C_1, D, P) + I(C_2, D, P)$$

linearità

(c) C, D sono rette

$P \in C \cap D \Rightarrow I(C, D, P) = 1$

(d) $D = [G]$ $\deg = m$

$C = [F]$ $\deg = d$

supponiamo $m > d$

Poniamo $D' = [G + RF]$

con $\deg R = m - d$

allora:

$$I(C, D, P) = I(C, D', P)$$

Siano C, D senza componenti comuni

Teo Bézout debole $\Longrightarrow$

$$\# \, C \cap D < \infty$$

$\forall \; P_i, P_j \in C \cap D$

Consideriamo $\ell_{ij} = P_i * P_j$

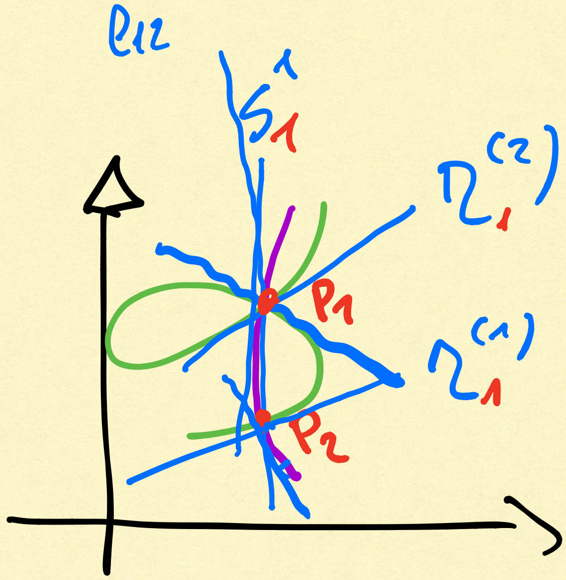
$\forall \; P_i \in C \cap D$

siano $r_i^{(1)}, \dots, r_i^{(d_i)}$ rette tangenti principali a C in P_i

$s_i^{(1)}, \dots, s_i^{(m_i)}$ rette tangenti principali a D in P_i.

SCEGLIENDO P_0 t.c.

$$P_0 \notin C \cup D \cup \ell_{ij} \cup r_i^{(1)} \dots \cup r_i^{(t_i)} \cup s_i^{(1)} \dots \cup s_i^{(k_i)}$$



Posto $P_0 = (0:0:1)$

$P_i = (\alpha_i : \beta_i : \gamma_i)$

definiamo

$I(C, D, P_i) \doteq$

$=$ molteplicità di $(\alpha_i : \beta_i)$ come radice di

$$Ris_{x_2}(F, G)$$

$=$ esponente di $(\beta_i x_0 - \alpha_i x_1)$ in Ris

FATTO: Tale definizione verifica (a), —, (d)

PROP.

$$I(C, D, P_i) \geq \text{molt}_{P_i}(C) \cdot \text{molt}_{P_i}(D)$$

Teo. di Bézout (FORTE)

Siano C, D due curve piane

$C = [F]$ $\deg = d$

$D = [G]$ $\deg = m$

C, D senza componenti comuni.
ALLORA:

$$\sum_{P_i \in C \cap D} I(C, D, P_i) = d \cdot m$$

dim "Idea"

sotto le ipotesi di

$I(C, D, \underline{P})$

$\Downarrow$

$Ris_{x_2}(F, G)$ ha

grado d·m $\Rightarrow$ d·m

radici contate

con molt.

$\square$

COROLLARI

0.) 2 curve piane $(\subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$
si intersecano SEMPRE

1.) $C = [F]$ di grado $d \geq 3$
C liscia
$\Rightarrow \exists$ almeno 1 p.to di flesso

Poiché H_F ha grado $d-2$

2.) $C = [F]$ curva irriducibile
(RIDOTTA)

cioè F irriducibile ridotto

$\Longrightarrow C$ ha # finito di p.ti singolari

Infatti:

P pto singolare $\Longleftrightarrow$

$$P \in C \cap C_{x_1} \cap C_{x_2} \cap C_{x_0}$$

dove $C_{x_i} = \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} \right]$

$$\# \; C \cap C_{x_i} < \infty$$

poiché C è irriducibile

&

$\deg(C_{X_i}) < \deg(C)$

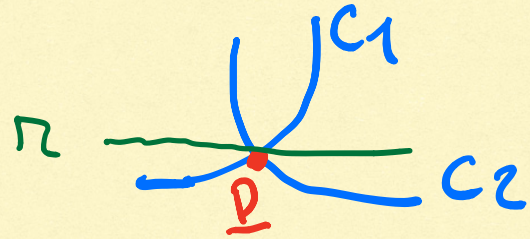
③ C curva riducibile

$C = C_1 + C_2$

$\Rightarrow$ C è singolare

Infatti: $P \in C_1 \cap C_2$

è singolare per C



r RETTA per P

$$I(C, r, P) = I(C_1, r, P) + I(C_2, r, P) \geq 2 \quad \forall r$$

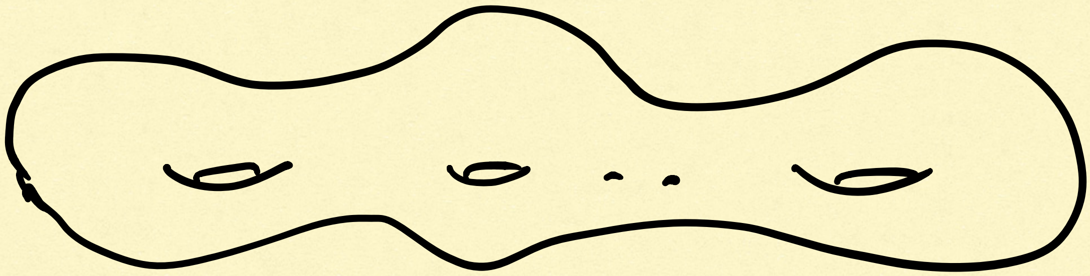
FATTO

C curva piena irriducibile liscia di grado d

$\Updownarrow$ TOPOLOGICAMENTE

C è superficie orientabile compatta connessa di genere

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$



$d = 3 \qquad g = 1$

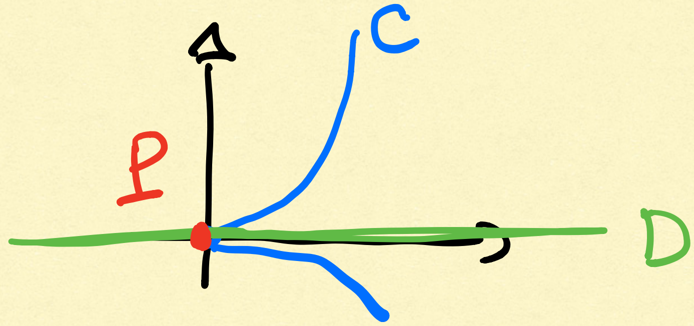
$d = 4 \qquad g = 3$

$\vdots$

Esempio di $I(C, D)$

$$C = \{ y^2 = x^3 \} \subset \mathbb{A}^2 = T_0$$

$$D = \{ y = 0 \}$$



$$\mathrm{molt}(C, D, P) = 3$$

$$\mathrm{molt}(C, P) = 2$$

$$\mathrm{molt}(D, P) = 1$$
