19-03-2020

$$\mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \text{ ``}\longleftrightarrow\text{'' } \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$$

coord. $(x_1, \ldots, x_n)$

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \text{ ``}\longleftrightarrow\text{'' } \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$$

coord. omogenee $(x_0 : \ldots : x_n)$

polinomi omogenei

$$\mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \hookrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$$

$$\iota_0 : \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \xrightarrow{\simeq} U_0$$

$$\rotatebox{90}{$\subseteq$}$$

$$\left\{ (1 : x_1, \ldots, x_n) \right\}$$

Anelli graduati

def R anello si dice GRADUATO se

$$R = \bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d$$

con R_d gruppi abeliani

tali che $R_i \cdot R_j \subseteq R_{i+j}$

nostro caso:

$$R = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$$

$$R_d = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$$

polinomi omogenei di grado d

Pol. omogeneo di grado d $\doteq \Sigma$ monomi di grado d def. Ideale omogeneo

R anello graduato

I IDEALE $\subset R$

$I_d \doteq I \cap R_d$

I omogeneo $\overset{\text{def.}}{\iff} I = \bigoplus I_d$

PROP. R anello prodotto

I IDEALE $\subset R$

Allora sono equivalenti

(i) I ideale omogeneo

(ii) I è generato da elementi omogenei

(iii) $I \ni f = \sum f_d$ con $f_d \in R_d \Rightarrow f_d \in I_d$

dim

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Poniamo $S = \bigcup I_\phi$

$$J = (f : f \in S)$$

ideale generato

$$\Rightarrow I = \bigoplus I_\phi \subseteq J \subseteq I$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

$$I = (g_1, \ldots, g_r)$$

$$g_i \in R_{J_i}$$

$$I \ni f = \sum p^{(i)} g_i$$

dove $p^{(i)} = \sum p_J^{(i)}$

con $p_J^{(i)} \in R_J$

f_d = componente di grado d di f

$$= \sum_{j=0}^{d} p_{d-j}^{(i)} g_j \in I_d$$

$$\rotatebox{90}{=}$$

$$I \cap R_d$$

(iii) $\Rightarrow$ (i)

$$f = \sum f_d \in I$$

$$f_d \in R_d$$

$$\Rightarrow f_d \in R_d \cap I = I_d$$

$$\square$$

Esempio nostro:

CASO FONDAME

$$\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n] = \bigoplus_{d \geq 0} \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_d$$

pol. omogenei di grado d

$I \subset \mathbb{k}[x_0, \ldots, x_n]$

omogeneo $\Leftrightarrow$ è generato da polinomi omogenei

n.b. in $\mathbb{P}^n$ consideriamo coordinate omogenee definite a meno di moltiplicazione per uno scalare

"$\Rightarrow$ valutare $p(x_0, \ldots, x_n)$
in $\mathbb{P}^n$ ha senso
$\Updownarrow$
$p(x_0, \ldots, x_n) = 0$"

Infatti:

<u>Prop/OSS:</u>

$f \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_d$
cioè f omogeneo di grado

$$\Downarrow$$

$$f(\lambda x_0, \_\_, \lambda x_n) =$$
$$= \lambda^d f(x_0, \_\_, x_n)$$

VALE $\Uparrow$ se $\# \mathbb{K} = \infty$

ad esempio se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$

---

dim

$\Downarrow$ OVVIO

esempio: monomio

$$f = x_0^2 x_1^3 x_2$$ monomio di grado 6

$$f(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^6 x_0^2 x_1^3 x_2$$

$\Uparrow$ P.A.

$$f = \sum f_i \qquad f_{i_1}, f_{i_2} \neq 0$$

f_i omogenei

$$f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \ldots x_n)$$

$$\parallel$$

$$\sum \lambda^i f_i(x_0, \ldots, x_n)$$

CIOE'

$$0 \equiv \lambda^d f(x_0, \ldots, x_n) - \sum \lambda^i f_i(x_0, \ldots, x_n)$$

pol. in λ di grado d

$\neq 0$

$\Rightarrow$ non può essere $\equiv 0$

perchè $\# \mathbb{K} = \infty$

OMOGENIZZAZIONE

/ DE-OMOGENIZZAZIONE

deomogenizzazione rispetto alla variabile x_0

$$D: \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n] \to \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$$

$$F(x_0, \ldots, x_n) \mapsto F(1, x_1, \ldots, x_n)$$

Poniamo $x_0 = 1$

OMOGENIZZAZIONE
rispetto variabile x_0

$$H : \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$$

$$f(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_0^{\deg f} \cdot f\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)$$

<u>Esempio</u>:

$$f = x_1 + x_2^2 \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$$

$$H(f) = x_0 x_1 + x_2^2 = x_0^2 \cdot \left(\frac{x_1}{x_0} + \left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2\right)$$

OSS: $\deg H(f) = \deg(f)$

PROP

① $D(H(f)) = f$

② $H(D(F)) = F$

$\Leftrightarrow \quad x_0 \nmid F$

③ $H(f \cdot g) = H(f) \cdot H(g)$

$D(F \cdot G) = D(F) \cdot D(G)$

dim. esercizio

<u>OSS</u>: 2

Se x_0 divide F

$$\Rightarrow \quad F = x_0^m \cdot F_1$$

con F_1 omogeneo di grado $d-m$

$$D(F) = 1 \cdot D(F_1)$$

$$\Rightarrow \quad H(D(F)) = F_1$$

PROP

(i) $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ IRRIDUCIBILE

$\Downarrow$

$H(f)$ irriducibile

(ii) $F \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_d$ IRRIDUCIB.

$\Downarrow$

$D(F)$ irriducibile

dim

(i) P.A. $H(f) = G \cdot L$

per costruzione di omog.

$$x_0 \nmid H(f) \Rightarrow x_0 \nmid G \ \& \ x_0 \nmid L$$

$$\Rightarrow f = D(H(f)) = D(G \cdot L) = D(G) \cdot D(L)$$ assurdo

(ii) P.A. $D(F) = g \cdot e$

$x_0 \nmid F$ poiché F irriducibile

$$\Rightarrow \quad F = H(D(F))$$
$$= H(g) \cdot H(e)$$

assurdo

$\square$

Teo. (Eulero)

$$F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$$

$$\Downarrow$$

$$d \cdot F = \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j} \cdot x_j$$

$$= \nabla F \cdot X$$

<u>dim</u> sufficiente

considerare ciascun monomio per linearità di $\frac{\partial}{\partial x_j}$

Prendiamo un monomio

$$F = c \cdot x_0^{i_0} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n} \qquad \sum i_j = d$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \underbrace{c \cdot i_j}_{\text{coeff.}\, i_j} \, x_0^{i_0} \ldots \underbrace{x_j^{i_j - 1}}_{\deg = \deg - 1} \ldots x_n^{i_n}$$

$$\sum \frac{\partial F}{\partial x_j} \cdot x_j = c \cdot \left(\sum i_j\right) \cdot F$$

$$= d \cdot F$$

$\square$

Caso particolare:

$$\mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^1$$

$$x \longmapsto (1, x)$$

In $\mathbb{P}^1$ consideriamo coord. (x_0, x_1)

$$x_0 \neq 0 \quad \longleftrightarrow \quad U_0 \cong \mathbb{A}^1$$

$$\left(1, \frac{x_1}{x_0}\right)$$

CORRISPETTIVO
polinomiale

$$f(x) \in \mathbb{K}[x] \qquad \deg f = d$$

$$\downarrow$$

$$H(f) \in \mathbb{K}[x_0, x_1]$$

$$f = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$$

$$\downarrow$$

$$H(f) = \sum_{i=0}^{d} a_i \cdot x_0^{d-i} \cdot x_1^i$$

$$= x_0^d \cdot f\left(\frac{x_1}{x_0}\right)$$

<u>VICEVERSA:</u>

$$F(x_0, x_1) \in \mathbb{K}[x_0, x_1]_d$$

$\Downarrow$

$$D(F) = F(1, x_1)$$

$$= f(x) \in \mathbb{K}[x]$$

$$x = \text{"}\frac{x_1}{x_0}\text{"}$$

Supponiamo $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$

$$f(x) = c \cdot (x - \lambda_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_k)^{n_k}$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ RADICI

PROP. $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1]_d$

$\Rightarrow \exists\ (a_i, b_i) \in \mathbb{K}^2 - \{0,0\}$

t.c.

$$F(x_0, x_1) = (a_1 x_1 - b_1 x_0)^{n_1} \cdot$$

$$\cdot \_\_\_\_ (a_K x_1 - b_K x_0)^{n_K}$$

VARIETA' PROIETTIVE

VISTO: In $\mathbb{A}^n$

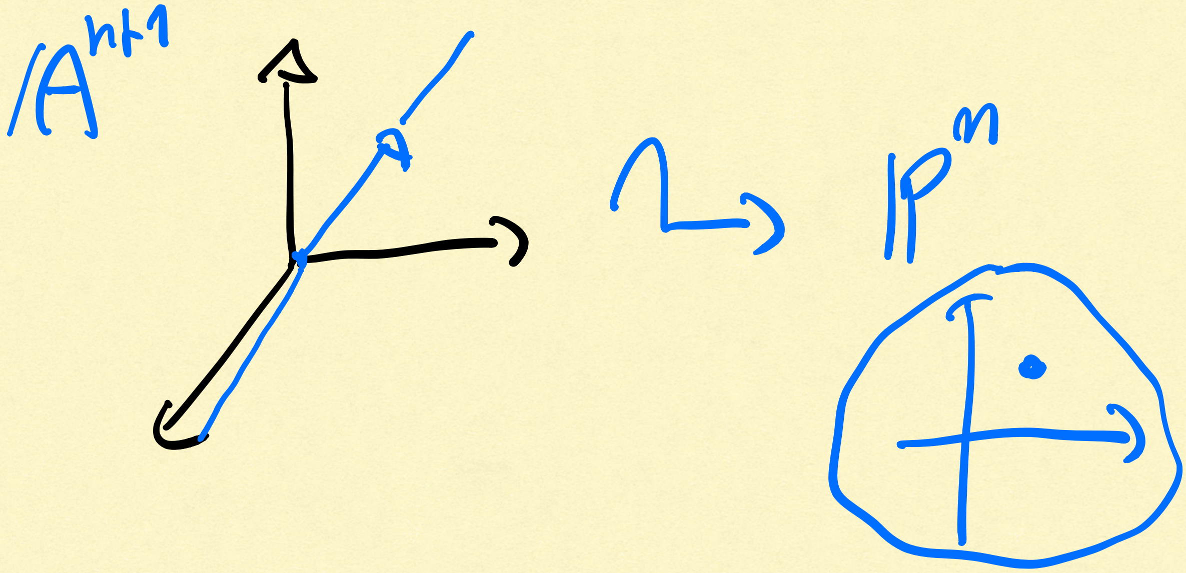
CHIUSI = chiusi algebrici

$\Updownarrow$

$V(I)$ luogo di zeri

di ideali

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \big/ \mathbb{K}^*$$



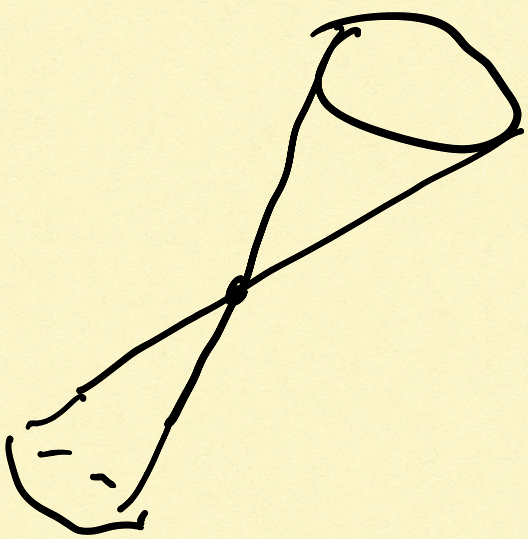
__DEF.__ $X \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ chiuso

si dice

CONO ALGEBRICO

SE

$$x \in X \Rightarrow \lambda \cdot x \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$$



Sia $\pi : \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$

la proiezione al quoziente

__DEF.__ $Y \subset \mathbb{P}^n$ chiuso algebrico

$$\Updownarrow$$

$\pi^{-1}(Y)$ chiuso in $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$

$$\Updownarrow$$

$$\mathcal{C}(Y) \doteq \pi^{-1}(Y) \cup \{0\}$$

cono algebrico (chiuso) in $\mathbb{A}^{n+1}$

OVVERO:

$$
\begin{tikzcd}
\left\{\begin{array}{c}\text{chiusi} \\ \text{di } \mathbb{P}^n\end{array}\right\} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \left\{\begin{array}{c}\text{coni} \\ \text{algebrici} \\ \text{in } \mathbb{A}^{n+1}\end{array}\right\} \arrow[dl, leftrightarrow] \\
& \left\{\text{chiusi saturi in } \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}\right\} &
\end{tikzcd}
$$

$$\Downarrow$$

$$\pi^{-1} \circ \pi(X) = X$$

PROP. $\# \mathbb{K} = +\infty$

① $X \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ cono algebrico

$$\Downarrow$$

$\mathcal{I}(X)$ omogeneo

② $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ omogeneo

$\Rightarrow V(\mathcal{I})$ cono

dim (1) $f \in \mathcal{I}(X)$

Sia $x \in X$, $f \in \mathcal{I}(X)$

Per ipotesi

$\forall \lambda \in \mathbb{K}^* \quad f(\lambda x) = 0$

Scriviamo $f = \sum_{i=0}^{d} f_i$

f_i omogenei di grado i

Per costruzione

$f(\lambda x) = \sum \lambda^i f_i(x)$

Scegliendo $(d+1)$ valori distinti di λ si ha pol. di grado d in λ con $d+1$ zeri

$$\Rightarrow \quad f_i(x) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \quad f_i \in I(X) \cap R_i$$

$\square$

---

dim ②

I omogeneo $\Rightarrow$

$$I = (f_1, \ldots, f_r)$$

f_i omogenei

f_i omogeneo

$\Downarrow$

$V(f_i)$ cono algebrico

Ma $V(I) = \bigcap_i V(f_i)$

D'altra parte

Intersezione di coni

è ancora un cono

$\square$