17/04/2020

Proprietà locali

X varietà quasi proiettiva

$\Updownarrow$

$$X = \overline{X} \cap U$$

$\overline{X}$ chiuso

U aperto $\subset \mathbb{P}^n$

VISTO

Lemma X var. q.p.

$Y \subset X$ chiuso

$\Updownarrow$

Y è loc.$^{\text{mte}}$ chiuso

(Dato $\{U_\alpha\}$ ricoprimento aperto di X

$\forall \alpha$ $Y \cap U_\alpha$ chiuso in U_α)

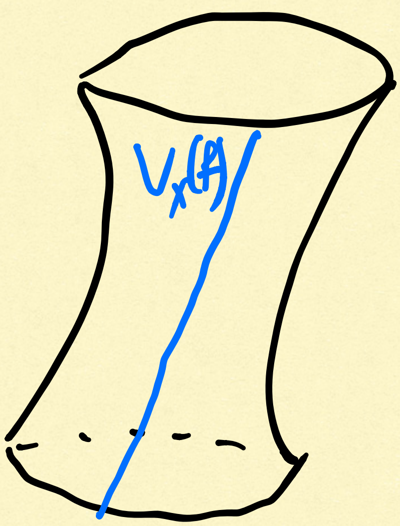
Aperti principali

<u>DEF</u> $X \subseteq \mathbb{A}^n$ chiuso alg.

$f \in \mathbb{K}[X]$ $f \neq 0$

$$X_f \doteq X \setminus V_X(f)$$

APERTO PRINCIPALE



$X \subset \mathbb{A}^n$

OSS. $\{ X_f \}$ base degli aperti di X

PROP $X \subseteq \mathbb{A}^n$ chiuso
$f \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$

ALLORA:

X_f è varietà affine

&

$$\mathbb{K}[X_f] \cong \mathbb{K}[X]_{(f)}$$

dove: $\mathbb{K}[X]_{(f)} := \left\{ \frac{p(x)}{f^k} : \begin{array}{l} p(x) \in \mathbb{K}[X] \\ k \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$

DIM $X \subset \mathbb{A}^n$ coord. $x_1, \dots, x_n$

aggiungiamo una coordinata y

consideriamo $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n][y]$

$$= \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y]$$

Prendiamo l'ideale

$$J \doteq (I(X),\ y \cdot f - 1)$$

ideale di X

coordinata nuova "$y = \frac{1}{f}$"

Sia

$$Y = V_{\mathbb{A}^{n+1}}(J)$$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{A}^{n+1} : \begin{array}{l} x \in X \\ y \cdot f = 1 \end{array} \right\}$$

1. $X_f \cong Y$

consideriamo morfismo

$$\varphi : X_f \longrightarrow Y$$

$$x \longmapsto \left(x, \frac{1}{f(x)}\right)$$

OSS: φ è morfismo perché $\frac{1}{f(x)}$ è regolare in X_f

$$\bar{\varphi} : Y \longrightarrow X_f$$
$$(x, y) \longmapsto x$$

Su Y: $\quad y = \frac{1}{f(x)}$

Quindi $\varphi, \bar{\varphi}$ sono morfismi & $\varphi \circ \bar{\varphi} = \mathrm{id}$

In particolare $\mathbb{K}[X_f] = \mathbb{K}[Y]$

(2) $\mathbb{K}[X_f] \cong \mathbb{K}[X]_{(f)}$

Consideriamo l'inclusione

$$\iota : X_f \hookrightarrow X$$

Estendiamo $\bar{\varphi}$ a

$$\varphi = \iota \circ \bar{\varphi} : Y \longrightarrow X$$

$$\varphi^* : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[Y]$$

omo di $\mathbb{K}$-algebre

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\bar{\varphi}"] \arrow[rr, bend right, "\varphi"'] & X_f \arrow[r, "\iota"] & X
\end{tikzcd}
$$

$$\Updownarrow$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{K}[X] \arrow[rr, "\varphi^*"] \arrow[dr, "\iota^*"'] & & \mathbb{K}[Y] \\
& \mathbb{K}[X]_{(f)} \arrow[ur, "\bar{\varphi}^*"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$\iota^* : \; p(x) \longmapsto \frac{p(x)}{1}$$

$$\varphi^*(f) \cdot y = 1 \quad \text{in } \mathbb{K}[Y]$$

per costruzione

$$\Rightarrow \varphi^*(f) \text{ è invertibile in } \mathbb{K}[Y]$$

Per commutatività del diagramma

$$\bar{\varphi}^*\left(\frac{p(x)}{f^k}\right) = \bar{\varphi}^*(p(x)) \cdot \bar{\varphi}^*(f)^{-k}$$

$$= \varphi^*(p(x)) \cdot \varphi^*(f)^{-k}$$

Tesi: $\bar{\varphi}^*$ è ISO

surg $\mathbb{K}[Y]$ è generato

da $x_1, \dots, x_n, y$

Ma $y \cdot f = 1 \Rightarrow$

$$y = \frac{1}{f} = \bar{\varphi}^*\left(\frac{1}{f}\right)$$

$$x_i = \bar{\varphi}^*(x_i)$$

<u>iniet</u> sia $\frac{p(x)}{f^k}$ t.c.

$$\bar{\varphi}^*\left(\frac{p(x)}{f^k}\right)=0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \varphi^*(p(x))\cdot\varphi^*(f)^{-k}=0$$

$$\Longleftrightarrow \quad p(x)\cdot y^k=0$$

in $\mathbb{K}[y]$

Ma $g|_y\neq 0$

$$\Rightarrow \quad \varphi^*(p(x))\big|_Y \equiv 0$$

cioè $p(x)\big|_Y \equiv 0$

ovvero $p(x)\big|_{X_f} \equiv 0$

Quindi:

$$f \cdot p(x)\big|_{X_f} \equiv 0$$

$$\Rightarrow \quad f \cdot p(x) = 0 \text{ in } \mathbb{K}[x]_{(f)}$$

$$\Rightarrow \quad p(x) = 0 \text{ in } \mathbb{K}[x]_{(f)}$$

Poiché: f invertibile in
$\mathbb{K}[X]_{(f)}$

$\square$

<u>COR</u>. $X \subset \mathbb{A}^n$ varietà affine

$\Downarrow$

$\exists$ base di aperti X_f

con X_f varietà affine

Teorema

X varietà quasi proiettiva

$\forall x \in X \quad \exists\, U_x$ aperto

$U_x \ni x$

t.c. $U_x \cong$ chiuso affine

DIM

$X \subset \mathbb{P}^n$ var. q.p.

$$X = \overline{X} \cap U$$

chiuso aperto

Consideriamo ricoprimento standard di $\mathbb{P}^n$ coord. $x_0, \dots, x_n$

$$\{ U_i \}_{i=0,\dots,n}$$

$$U_i \doteq \{ x_i \neq 0 \}$$

$$X \cap U_i \subset U_i$$

loc.$^{\text{nte}}$ chiuso

Sia $x \in X$

Possiamo supporre $x \in U_0 = \{x_0 \neq 0\}$

$x \in X \cap U_0 \doteq X_0 \subset U_0 \cong \mathbb{A}^n$

dove $X_0 = \overline{X} \cap U \cap U_0$

cioè

$$X_0 \cong Y \setminus Y_1 \subset \mathbb{A}^n$$

chiusi

Consideriamo $f_1 \in I(Y_1)$
t.c. $f_1(x) \neq 0$

(n.b. esiste perché $x \in Y \setminus Y_1$)

f_1 induce $f \in \mathbb{K}[Y]$
tale che $f(x) \neq 0$

Poniamo $U_x = Y \setminus V_Y(f)$

Per il teo. precedente
U_x è varietà
affine

$\square$

MORFISMI FINITI

Richiami di ALG. COMM.

A, B anelli comm. con $\underline{1}$

$A \subseteq B$

<u>Def. 1</u> $b \in B$ è INTERO su A

SE

$\exists \; p(x) \in A[x]$ monico $\neq 0$

t.c. $p(b) = 0$

B intero su A se $\forall b \in B$

b è intero su A

Def. 2 B è finito su A

se

B è A-modulo fin.$^{\text{nte}}$ generato

FATTO

$B = A$-algebra f.$^{\text{nte}}$ generata

B finita su $A \iff B$ intera su A

DEF. X, Y varietà affini

$f : X \to Y$ morfismo dominante

f si dice morfismo finito se

$f^* : \mathbb{K}[Y] \hookrightarrow \mathbb{K}[X]$

induce

$\mathbb{K}[X]$ finito su $\mathbb{K}[Y]$

PROP. 1 $f : X \to Y$

morfismo finito di varietà affini

ALLORA:

$\forall y \in Y \quad \#\{f^{-1}(y)\} < \infty$

DIM $X \subset \mathbb{A}^n$ coordinate $(t_1, \ldots, t_n)$

$t_1, \ldots, t_n$ generano $\mathbb{K}[X]$

suff:

$\forall i$ t_i assume # finito di valori in $f^{-1}(y)$

Per def. di estensione finite t_i soddisfa equaz.

$$t_i^K + a_{K-1} t_i^{K-1} + \_\_ + a_0 = 0$$

con $a_i \in \mathbb{K}[Y]$

QUINDI:

$x \in f^{-1}(y) \implies \forall i$

$$t_i(x)^K + a_{K-1}(y)\, t_i^{K-1}(x) + \_\_ + a_0(y) = 0$$

Pol. di grado K

$\Rightarrow$ # finito di sol.

$\square$

PROP. 2 $X \subset \mathbb{A}^n$

$Y \subset \mathbb{A}^m$

$f: X \to Y$ morfismo finito

ALLORA f è surgettivo

DIM Sia $y \in Y \subset \mathbb{A}^m$

coord. $(s_1, \dots, s_m)$

$y = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$

Ideale massimale corrispondente in $\mathbb{K}[\mathbb{A}^m]$

$$\mathfrak{m}_y = (s_1 - \alpha_1, \ldots, s_m - \alpha_m)$$

$$f^{-1}(y) \longleftrightarrow \text{Ideale } f^*(\mathfrak{m}_y)$$

Se per ASSURDO f non è surgettivo $\Rightarrow$ $\exists\, y \notin f(X)$ ovvero

$$f^{-1}(y) = \emptyset$$

CIOE' ideale corrispondente

$$= \mathbb{K}[X]$$

$$\Leftrightarrow \left(f^*(s_1)-\alpha_1, \,\text{—}\,, f^*(s_m)-\alpha_m\right)$$

$$= \mathbb{K}[X]$$

Poiché $f^*: \mathbb{K}[Y] \hookrightarrow \mathbb{K}[X]$

identificando s_i con $f^*(s_i)$

$$f^{-1}(y) = \phi \iff$$

$$\mathfrak{m}_y \cdot \mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[X]$$

Questo è assurdo per il seguente lemma algebrico

<u>LEMMA</u> B = A-modulo finito

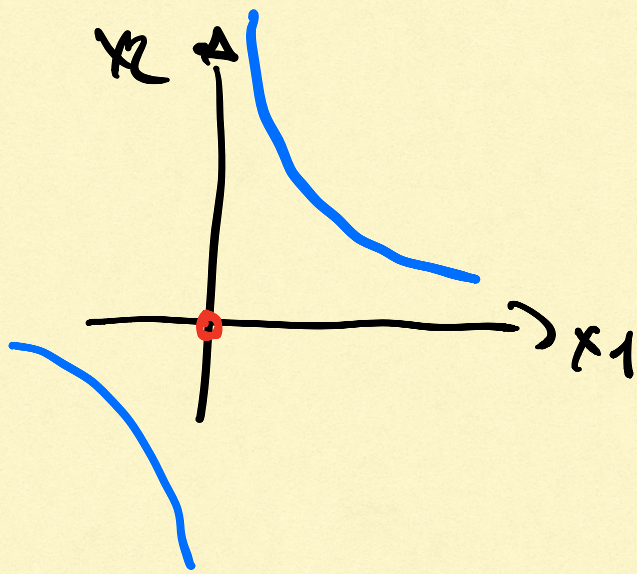
$I \subset A$ ideale

$$I \subsetneq A \Rightarrow I \cdot B \subsetneq B$$

$\square$

Esempio

$$X = V(x_1 x_2 - 1) \subset \mathbb{A}^2$$



$$Y = \mathbb{A}^1$$

$$f : X \longrightarrow Y \quad \text{proiezione}$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto x_1$$

f non è morfismo finito

Infatti: f non è surgettivo

$\left[\ f : X \to \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}\right.$ è isomorfismo

---

COR: X, Y varietà affini

$f : X \to Y$ morfismo finito

ALLORA: f è mappa chiusa

CIOE' $\forall\, Z \subset X$ chiuso

$f(Z) \subset Y$ chiuso

<u>dim</u> consideriamo

$$f|_Z : Z \longrightarrow \overline{f(Z)}$$

$f|_Z$ è morfismo finito

Infatti:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}[Z] & \mathbb{K}[X] \arrow[l, two heads, "i_Z^*"'] \\
\mathbb{K}[\overline{f(Z)}] \arrow[u, hook, "(f|_Z)^*"] & \mathbb{K}[Y] \arrow[l, two heads, "i_{\overline{f(Z)}}^*"] \arrow[u, hook, "f^*"']
\end{tikzcd}$$

$(f|_Z)^*$ mi dà estensione finita

$$\Rightarrow \quad f|_Z : Z \to \overline{f(Z)}$$

è surgettivo

ovvero $f(Z) = \overline{f(Z)}$

$\square$

CASO GENERALE

X, Y varietà quasi proiettive

$f : X \longrightarrow Y$ morfismo

si dice

morfismo finito

SE

$\forall\, y \in Y \;\exists\; V_y \ni y$ aperto AFFINE

t.c. $f^{-1}(V_y) \subset X$ aperto AFFINE

&

$$f_{|f^{-1}(V_y)} : f^{-1}(V_y) \longrightarrow V_y$$

morfismo di varietà affini

APPLICAZIONI:

Proiezioni lineari

Sia $E \subset \mathbb{P}^n$

sottospazio lineare

di $\dim = d$

$$E = \{ L_1 = \ldots = L_{n-d} = 0 \}$$

con L_i forme lineari

PROIEZIONE di CENTRO E

$$\pi_E : \mathbb{P}^n \setminus E \to \mathbb{P}^{n-d-1}$$

$$x \longmapsto (L_1(x) : \ldots : L_{n-d}(x))$$

Esempio fondamentale

$E =$ p.to all'∞

$P = (0 : \ldots : 0 : 1)$

$$\pi_P : \mathbb{P}^n \setminus \{P\} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$$

$$(x_0 : \ldots : x_n) \longmapsto (x_0 : \ldots : x_{n-1})$$

$$P = \{ x_0 = \ldots = x_{n-1} = 0 \}$$

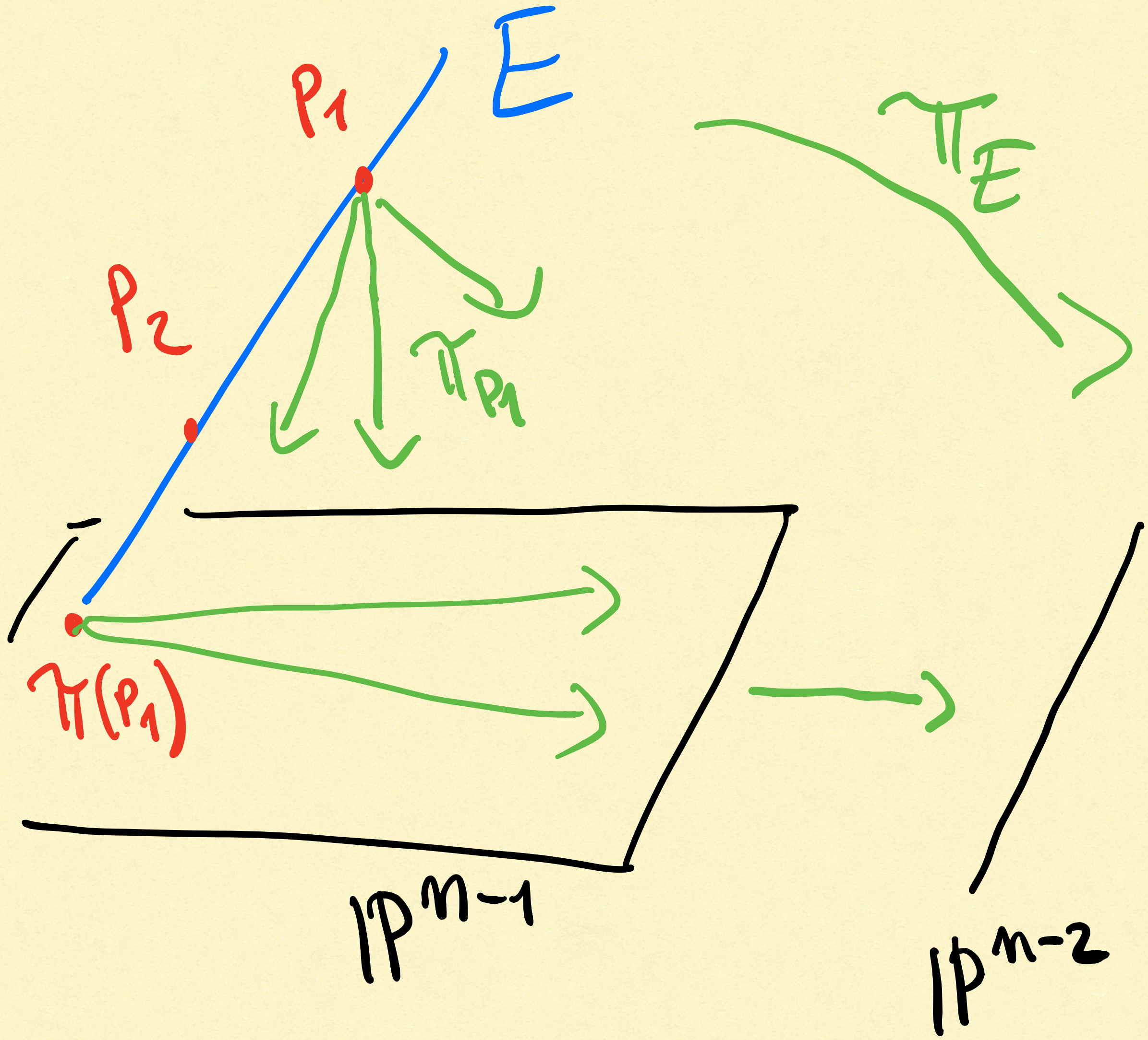
__OSS__. $E = P_1 * P_2$

retta per i punti P_1, P_2

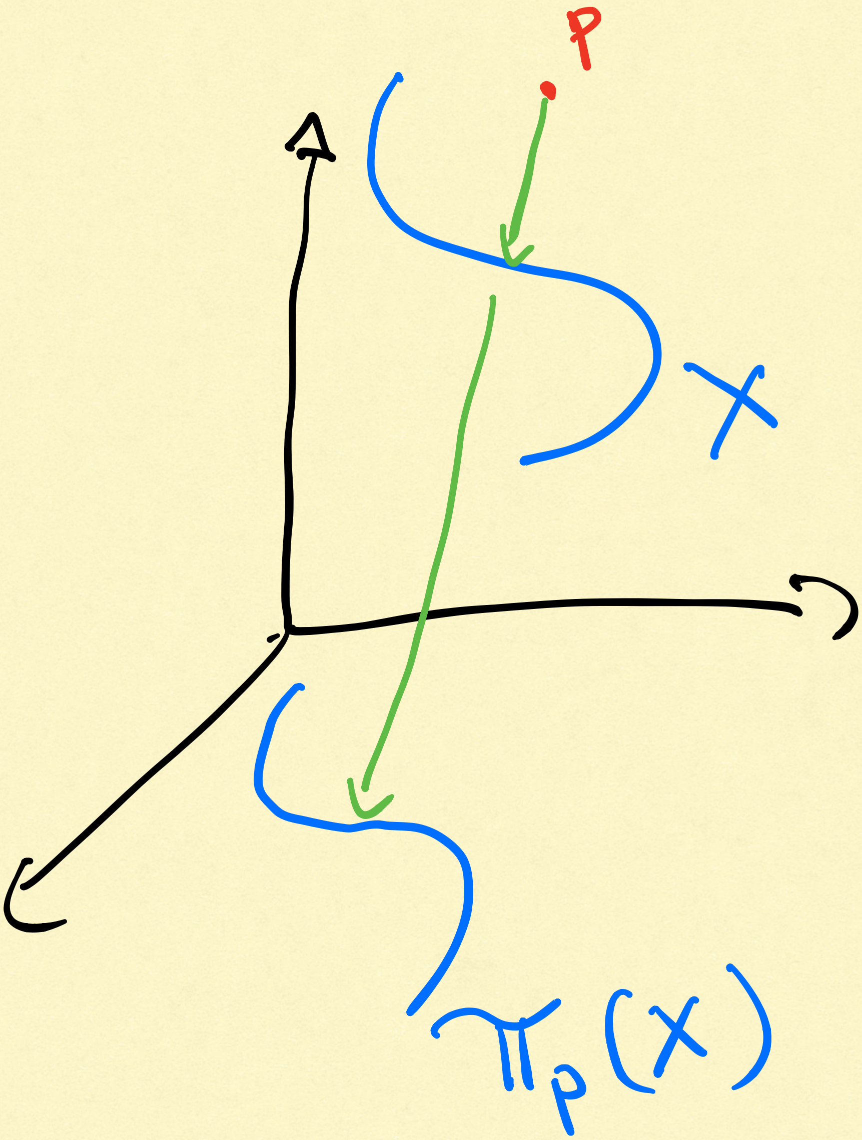
π_E = composizione di due proiezioni da un punto

$$\mathbb{P}^n \setminus \{P_1\} \xrightarrow{\pi_{P_1}} \mathbb{P}^{n-1}$$

$$\mathbb{P}^{n-1} \setminus \{\pi_{P_1}(P_2)\} \xrightarrow{\pi_{(\pi(P_2))}} \mathbb{P}^{n-2}$$



E
p_1
p_2
π_{p_1}
π_E
$\pi(p_1)$
$\mathbb{P}^{n-1}$
$\mathbb{P}^{n-2}$



se $X \cap \{p\} = \emptyset$

allora π_p è morfismo finito