16/4/2020

pull back:

X, Y affini

$X \subseteq \mathbb{A}^n \qquad Y \subseteq \mathbb{A}^m$

$f: X \longrightarrow Y$ morfismo

(cioè mappa polinomiale)

f induce

f^* = pull back

$$f^* : \mathbb{K}[Y] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$$
$$g \longmapsto f^*(g)$$
$$\shortparallel$$
$$g \circ f$$

f^* è omomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre

Teorema

$X \subseteq \mathbb{A}^n \qquad Y \subseteq \mathbb{A}^m$

chiusi algebrici

$$\left\{ \underset{\text{morfismo}}{f : X \longrightarrow Y} \right\}$$

$$\Big\updownarrow \, 1:1$$

$$\left\{ \underset{\text{morfismo di } \mathbb{K}\text{-algebre}}{\phi : \mathbb{K}[Y] \longrightarrow \mathbb{K}[X]} \right\}$$

In particolare:

Dato $\phi : \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X]$
omo di $\mathbb{K}$-algebre

$\exists !\ f : X \to Y$ morfismo
tale che $\phi = f^*$

<u>DIM</u>

Visto f^* è omo di
$\mathbb{K}$-algebre indotto
da $\overline{f}^* : \mathbb{K}[\mathbb{A}^m] \to \mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$

VICEVERSA:

Sia $\phi: \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X]$

OMO di $\mathbb{K}$-algebre

cerchiamo f t.c. $f^* = \phi$

$Y \subseteq \mathbb{A}^m$

$\Downarrow$

$$\mathbb{K}[Y] = \mathbb{K}[y_1, \dots, y_m] \big/ I(Y)$$

Consideriamo generatori di $\mathbb{K}[Y]$

Per semplicità di notazione:

$y_1, \ldots, y_m$

Poniamo $f_i = \phi(y_i)$

$i = 1, \ldots, m$

$f_i \in \mathbb{K}[X]$

Definiamo $f : X \to \mathbb{A}^m$

$x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x))$

1. $f(X) \subset Y$

Sia $G \in I(Y)$

$$G(y_1, \dots, y_m) = 0 \quad \text{in } \mathbb{K}[Y]$$

ϕ OMO di $\mathbb{K}$-algebre

$$\Rightarrow \quad 0 = \phi\big(G(y_1, \dots, y_m)\big)$$

$$= G\big(\phi(y_1), \dots, \phi(y_m)\big)$$

$$= G(f_1, \dots, f_m)$$

CIOE'

$$\forall\, p \in X : G(f_1(p), \dots, f_m(p)) = 0$$

OVVERO

$$(f_1(p), \dots, f_m(p)) \in V(G)$$

vale $\forall\ G \in I(Y)$

$\Rightarrow\ (f_1(p), \ldots, f_m(p)) \in Y$

2. Unicità

$f^* = \phi$

poiché $\quad f^*(y_i) = \phi(y_i)$

$\forall i$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}[\mathbb{A}^m] \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[dr] & \mathbb{K}[X] \\
& \mathbb{K}[Y] \arrow[u, "\phi"']
\end{tikzcd}$$

$\exists !\ \hat{f} : \mathbb{A}^m \to X \subset \mathbb{A}^n$

t.c. $\tilde{f}^* = \tilde{\Phi}$

$\Rightarrow$ passando al quoziente in $\mathbb{K}[Y]$

otteniamo $f^* = \phi$

$\square$

<u>COROLLARIO</u>

$X \subseteq \mathbb{A}^n \quad , \; Y \subseteq \mathbb{A}^m$

chiusi algebrici

$f : X \to Y$ morfismo

ALLORA: f è ISOMORFISMO

$\Updownarrow$

f^* è ISOMORFISMO

dim f isomorfismo

$\Rightarrow \exists\ f^{-1}: Y \to X$ morfismo

t.c. $f \circ f^{-1} = id_Y$

$f^{-1} \circ f = id_X$

In particolare

$$f^* \circ (f^{-1})^* = id_{\mathbb{K}[X]}$$

$$(f^{-1})^* \circ f^* = id_{\mathbb{K}[Y]}$$

viceversa: $f^*: \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X]$
isomorfismo

$\Rightarrow \exists \ g^*: \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[Y]$

t.c. $f^* \circ g^* = id_{\mathbb{K}[X]}$

$g^* \circ f^* = id_{\mathbb{K}[Y]}$

Ma $id_{\mathbb{K}[Y]} = id^*$ dove

$id: Y \to Y$

cioè per l'unicità

$(g \circ f)^* = (g^* \circ f^*) = id^*$

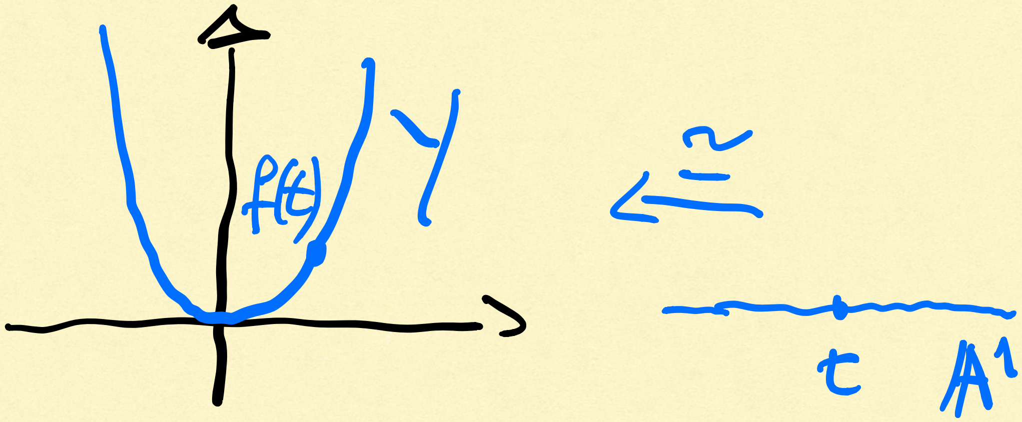
ovvero $\quad g \circ f = 1_{\mathbb{A}^1}$

$\square$

Esempio

$$f : \mathbb{A}^1 \longrightarrow Y \subset \mathbb{A}^2$$
$$t \longmapsto (t, t^2)$$

$$Y = V(y_2 - y_1^2) \subset \mathbb{A}^2$$



$$\mathbb{K}[\mathbb{A}^1] \cong \mathbb{K}[t]$$

$$\mathbb{K}[Y] = \mathbb{K}[y_1, y_2] \big/ (y_2 - y_1^2) \cong \mathbb{K}[y_1]$$

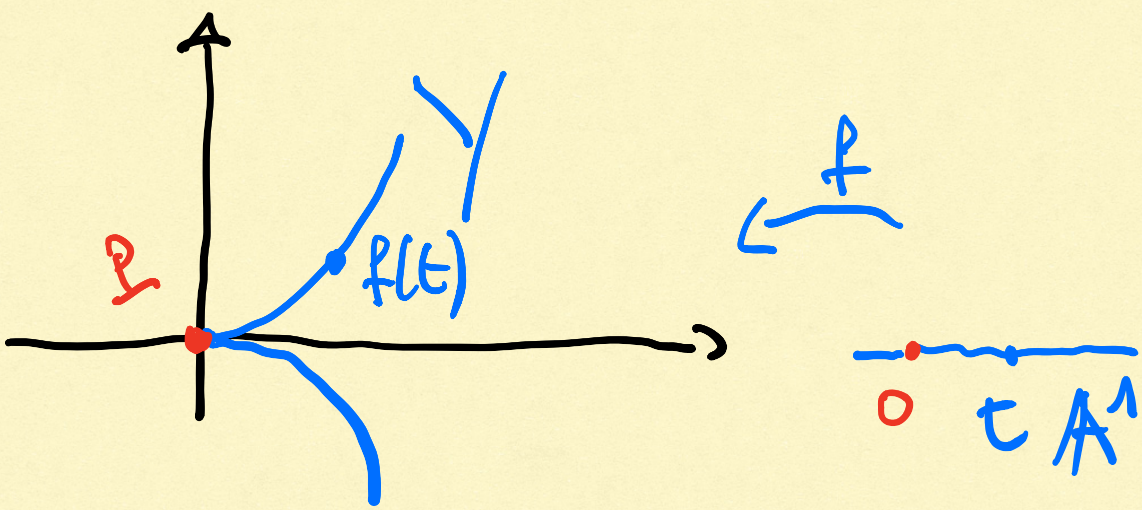
$$\mathbb{K}[t] \longrightarrow \mathbb{K}[Y]$$
$$t \longmapsto y_1$$

(contro)- Esempio

consideriamo $Y \subset \mathbb{A}^2$

$$Y = V(y_2^2 - y_1^3)$$

$$f : \mathbb{A}^1 \longrightarrow Y \subset \mathbb{A}^2$$
$$t \longmapsto (t^2, t^3)$$



f è morfismo

f è bigettiva

MA f non è isomorfismo

Idea geometrica: $P=(0,0) \in Y$ è p.to singolare per Y

P è immagine di $0 \in \mathbb{A}^1$
p.to liscio

Dal punto di vista algebrico

$$\mathbb{K}[Y] = \mathbb{K}[y_1, y_2] \Big/ y_2^2 - y_1^3$$

$$f^*: \mathbb{K}[Y] \longrightarrow \mathbb{K}[t]$$

$$y_1 \longmapsto t^2$$

$$y_2 \longmapsto t^3$$

$$\mathrm{Im}(f^*) = \mathbb{K}[t^2, t^3] \subsetneq \mathbb{K}[t]$$

$\Rightarrow f^*$ non è iso

$\square$

Proprietà PULL-BACK

$Y \subset \mathbb{A}^m$ chiuso

- $Z \subset Y$ chiuso

$$I_Y(Z) = \{ f \in \mathbb{K}[Y] : f(y) = 0 \ \forall y \in Z \}$$

- $I \subseteq \mathbb{K}[Y]$

$$V_Y(I) = \{ y \in Y : f(y) = 0 \ \forall f \in I \}$$

Lemma $Z \subset \mathbb{A}^n$ insieme qualsiasi

chiusura di Z in $\mathbb{A}^n$

$$\overline{Z} = V(I(Z))$$

(analogamente per $Z \subset Y$)

---

dim

$$\overline{Z} \overset{def}{=} \bigcap Y_i$$

Y_i chiuso t.c. $Y_i \supset Z$

$$Z \subseteq V(I(Z))$$ per costruzione

$$\Downarrow$$

$$\overline{Z} \subseteq V(I(Z))$$ ← è un chiuso

Ma

$$\overline{Z} \doteq V\left((f_i)_{i\in I}\right) =$$

$$= \bigcap_i V(f_i)$$

cioè:

$$\forall i \quad V(f_i) \supseteq \overline{Z} \supseteq Z$$

$$\Rightarrow \quad I(V(f_i)) \subseteq I(Z)$$

ovvero:

$$\underset{\substack{\parallel \\ V(f_i)}}{V(I(V(f_i)))} \supseteq V(I(Z))$$

conclusione:

$$\overline{Z} = \bigcap V(f_i) \supseteq V(I(Z))$$

$\square$

$X \subseteq \mathbb{A}^n$ chiuso algebrico

$Y \subseteq \mathbb{A}^m$ chiuso algebrico

$f : X \to Y$

<u>DEF</u>. f si dice dominante

se

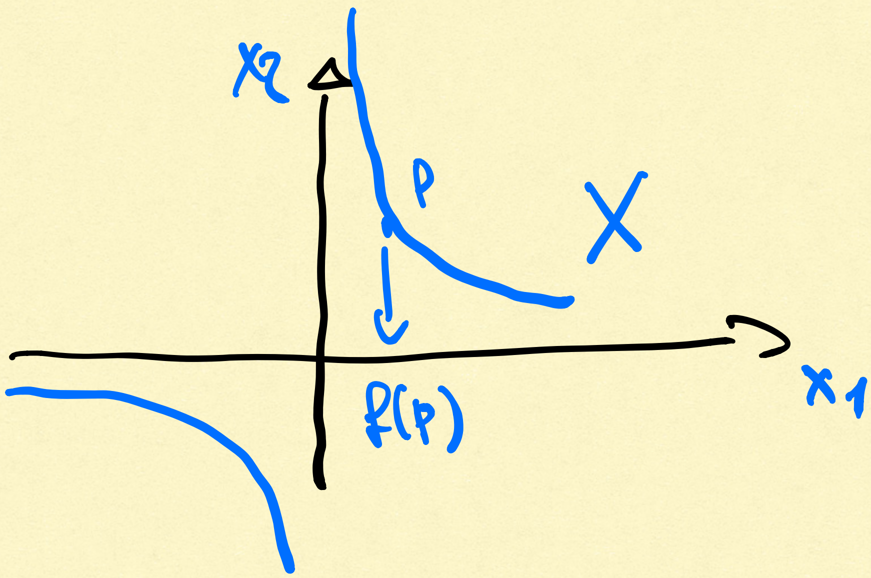
$$\overline{f(X)} = Y$$

(In generale f non è detto che sia mappa chiusa)

<u>Esempio</u>: $X \subset \mathbb{A}^n$

$$X = V(x_1 x_2 - 1)$$

$$Y = \mathbb{A}^1$$



$$f : X \longrightarrow Y \qquad \text{proiezione su } x_1$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto x_1$$

f è morfismo

$$\mathrm{Im}(f) = \{ x_1 \neq 0 \} \subset \mathbb{A}^1 = Y$$

$$\overline{\mathrm{Im}(f)} = \mathbb{A}^1$$

In questo caso

f non è surgettiva

MA

f è dominante

PROP. 1 X, Y affini

$f : X \to Y$ morfismo

ALLORA:

(i) $\mathrm{Ker}(f^*) = I_Y(\mathrm{Im}(f))$

(ii) $\overline{f(X)} = V_Y(\mathrm{Ker}(f^*))$

dim

(i) $\mathrm{Ker}(f^*) = \{ g \in \mathbb{K}[Y] : g \circ f|_X = 0 \}$

$= \{ g \in \mathbb{K}[Y] : g|_{f(X)} = 0 \}$

$$= I_Y(\mathrm{Im}(f))$$

(ii) Per il Lemma

$$\overline{f(X)} = V_Y(I_Y(\mathrm{Im}(f)))$$

$$= V_Y(\mathrm{Ker}(f^*))$$

$\square$

Come corollario otteniamo

Teorema (1) X, Y affini

$f : X \to Y$ morfismo dominante

$$\Rightarrow f^* : \mathbb{K}[Y] \hookrightarrow \mathbb{K}[X]$$

è iniettiva

dim. f dominante $\Leftrightarrow \overline{f(X)} = Y$

$$\Leftrightarrow V_Y(\ker(f^*)) = Y$$

$$\Leftrightarrow \ker(f^*) = 0 \in \mathbb{K}[Y]$$

$\square$

X, Y affini

<u>Def</u>. $f : X \longrightarrow Y$ morfismo

si dice IMMERSIONE CHIUSA

SE

(f iniettiva)

$\mathrm{Im}(f) \subset Y$ chiuso

$X \cong \mathrm{Im}(f)$

<u>Teorema</u> 2 X, Y affini

$f : X \to Y$ immersione chiusa

$\Updownarrow$

$f^* : \mathbb{K}[Y] \twoheadrightarrow \mathbb{K}[X]$

è surgettiva

<u>dim</u>

$\Downarrow$ f immersione chiusa

allora

$$X \simeq f(X) \subseteq Y \subseteq \mathbb{A}^m$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}[y_1, \dots, y_m] \arrow[d, two heads, "p_Y"'] \arrow[dr, two heads, "\overline{p}_{f(X)}"] & \\
\mathbb{K}[Y] \arrow[r, two heads, "p_{f(X)}"'] \arrow[dr, "f^*"'] & \mathbb{K}[\overline{f(X)}] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] \\
 & \mathbb{K}[X]
\end{tikzcd}$$

$\overline{P}_{f(x)} : \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_m] \to \mathbb{K}[\overline{f(x)}]$
è surgettiva

$\Longrightarrow$ $P_{f(x)}$ è surgettiva

(perché il diagramma commuta)

Quindi per iso indotto da f^*

anche $f^* : \mathbb{K}[Y] \twoheadrightarrow \mathbb{K}[X]$
è surgettiva

dim $\Uparrow$ $\quad f^*: \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X]$

surgettiva

Consideriamo

$$g: X \longrightarrow \overline{f(X)} \subset Y$$

$$j: \overline{f(X)} \hookrightarrow Y \quad \text{cioè} \quad \boxed{f = j \circ g}$$

$g \equiv f$ (abbiamo cambiato e' immagine)

Abbiamo diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}[X] & & \mathbb{K}[\overline{f(X)}] \arrow[ll, "g^*"'] \\
& \mathbb{K}[Y] \arrow[ul, "f^*"] \arrow[ur, "j^*"'] &
\end{tikzcd}$$

J^* è surgettiva poiché (inutile)
$\overline{f(X)} \subset Y \subset \mathbb{A}^m$

g^* è iniettiva per il Teo. 1
poiché g dominante per
costruzione

f^* è surgettiva per ipotesi

IL DIAGRAMMA COMMUTA

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}[X] & & \mathbb{K}[\overline{f(X)}] \arrow[ll, hook', "g^*"'] \\
& \mathbb{K}[Y] \arrow[ul, "f^*"] \arrow[ur, "J^*"'] &
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ g^* è surgettiva .

CIOE' g^* è isomorfismo

Quindi $g : X \xrightarrow{\simeq} \overline{f(X)}$

OVVERO

f è mappa chiusa

ISO con l'immagine

RIASSUMENDO:

Il funtore PULL-BACK
è un funtore controvariante
che induce
equivalenza di CATEGORIE
tra

$Aff_{\mathbb{K}}$ = categoria chiusi algebrici affini

&

$Red\ Alg_{\mathbb{K}}$ = categoria $\mathbb{K}$-algebre finitamente generate ridotte

$$F : X \longmapsto \mathbb{K}[X]$$

$$(f : X \to Y) \longmapsto F(f) = \left(f^* : \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X]\right)$$

Infatti:

F è essenzialmente suriettivo

F è pienamente fedele

Def. X varietà quasi proiettiva si dice AFFINE se

$$\exists \ f: X \longrightarrow X' \subset \mathbb{A}^n$$

isomorfismo con X' chiuso algebrico

ANALOGAMENTE

Def. X varietà quasi-proiett. si dice PROIETTIVA se iso a chiuso proi.