15/5/2020

X varietà q. p. irriducibile

$$\dim(X) = \mathrm{Tr}\deg_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(X))$$

visto: $X = V(f) \subset \mathbb{A}^{n+1}$

$f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ irriducibile

$\Rightarrow \dim(X) = n$

Teo. elemento primitivo:

$\exists$ coordinate $x_1, \dots, x_n, y$

t.c. $\mathbb{K}(X) = \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)[y] / f$

VICEVERSA:

Prop. $X \subset \mathbb{A}^{n+1}$

chiuso irriducibile

di dim n

$\Rightarrow \exists \; f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$

t.c. $X = V(f)$

codim = 1 $\iff$ luogo di zeri di 1 polinomio

<u>dim</u> Sia X chiuso

$$X \subsetneq \mathbb{A}^{n+1} \Rightarrow I(X) \neq 0$$

$$\Rightarrow \exists \; g \in I(X) \text{ t.c.}$$

$$X \subseteq V(g)$$

Sia $V(g) = \bigcup_i V(g_i)$

$$g = \prod g_i^{n_i}$$

Poniamo $X_i = X \cap V(g_i)$

X irriducibile

$\Downarrow$

$\exists\, j$ t.c. $X \subset V(g_j)$

ma $\dim(V(g_j)) = n$

Quindi

$$\begin{cases} X \subseteq V(g_j) & \text{irriducibili} \\ \dim(X) = \dim(V(g_j)) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Per PROP. $X = V(g_j)$

$\square$

CASO PROIETTIVO

dim è un invariante birazionale

$\Rightarrow$ valgono le stesse prop.

E.G.

- $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$, $\dim(X) = n \iff X = V(F)$, F omogeneo

- $Y \subsetneq X$ chiusi $\Rightarrow \dim(Y) < \dim(X)$

Teorema $X \subseteq \mathbb{P}^N$

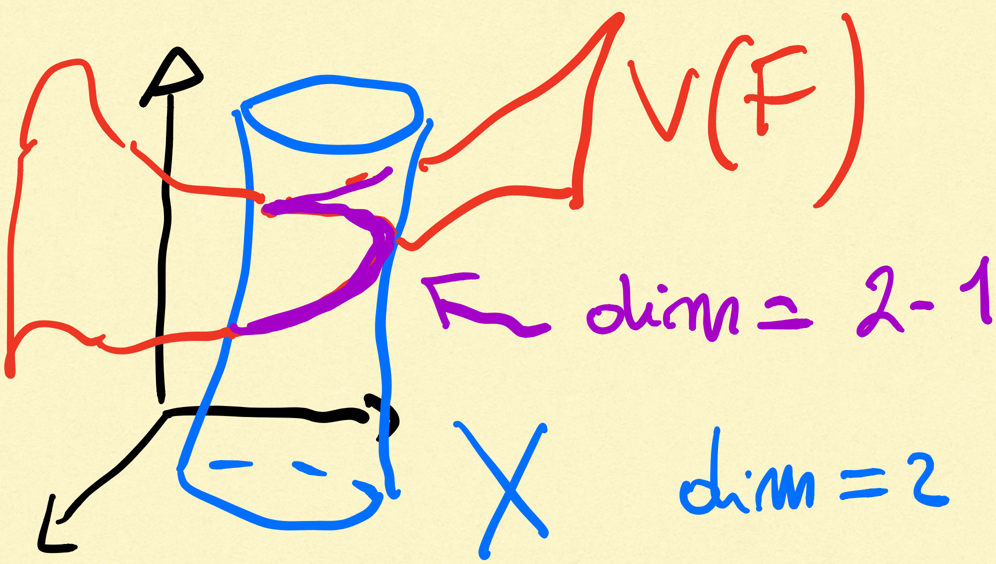
chiuso irriducibile

di $\dim = n$

$F \notin \mathcal{I}(X)$

ALLORA: $X \cap V(F)$ ha

$\dim = n-1$



<u>DIM</u> $F \notin I(X)$

$$\Downarrow$$

$$X \cap V(F) \subsetneq X$$

$$\Downarrow$$

$$\dim\big(X \cap V(F)\big) \leq n-1$$

Sia $d = \deg(F)$

Poniamo $X^0 = X \cap V(F)$

$= Y_1 \cup \dots \cup Y_s$

Scegliamo forme lineare L_1 t.c. $L_1 \neq 0$ su Y_j $\forall j = 1 \dots s$

Poniamo $X^1 = X^0 \cap V(L_1)$

$$= X \cap V(F, L_1)$$

continuiamo così scegliendo n forme lineari e ponendo induttivamente

$$X^{(n)} = X \cap V(F, L_1, \dots, L_n)$$

Per costruzione ~~Tesi:~~ $\dim(X^j) < \dim(X^{j-1})$

$$\forall\ X^j$$

eq.^{nte} $\dim X^{(n)} = -1$

cioè $X^{(n)} = \emptyset$

$\deg(F) = d$

costruiamo morfismo ausiliario:

$$\varphi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$$
$$x \longmapsto \left(F(x) : L_1^d : \ldots : L_n^d \right)$$

φ è morfismo

Per un teorema visto

φ è morfismo finito sull'immagine per costruzione

$X^{(n)} = \emptyset$

vogliamo dim. che

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{P}^n$$

P.A. se $\mathrm{Im}(\varphi) \subsetneq \mathbb{P}^n$

allora $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) < n$

ma morfismo finito

$\Rightarrow$ dim immagine = dim dominio

ASSURDO

In alternativa possiamo costruire $\tilde{\varphi} : X \to \mathbb{P}^{n-1}$

$\Rightarrow \dim \leq n-1$

$\square$

Vale Teorema più complicato

<u>Teo</u>: $X \subset \mathbb{P}^N$ irriducibile, $\dim(X) = n$

$$F \notin I(X) \Rightarrow X \cap V(F)$$

ha dimensione PURA $= n-1$

(cioè: tutte le componenti di $X \cap V(F)$ hanno $\dim = n-1$)

COR. Dati K polinomi omogenei $f_1, \ldots, f_K \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_N]$

Posto $X = V(f_1, \ldots, f_K)$

ha codim $\leq K$

dim $\geq n - K$

DEF $X \subset \mathbb{P}^N$ si dice varietà intersezione completa se

$$I(X) = (f_1, \ldots, f_K)$$

con $K = N - \dim X$

Esempio. Twisted cubic
(cubica gobba)

non è intersezione
completa

$$\nu_{1,3} : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3$$

$$(x_0 : x_1) \longmapsto (x_0^3 : x_0^2 x_1 : x_0 x_1^2 : x_1^3)$$

$$C = \nu_{1,3}(\mathbb{P}^1)$$

$$C \cong \mathbb{P}^1 \Rightarrow \dim(C) = 1$$

VISTO $I(C) \subset \mathbb{K}[y_0, \dots, y_3]$

$$I(C) = \left\{ \operatorname{rk}\begin{pmatrix} y_0 & y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = 1 \right\}$$

$$= \left(y_0 y_2 - y_1^2 ,\ y_1 y_3 - y_2^2 ,\ y_0 y_3 - y_1 y_2 \right)$$

ideale generato da 3 polinomi

$$\operatorname{codim}_{\mathbb{P}^3}(C) = 3 - 1 = 2$$

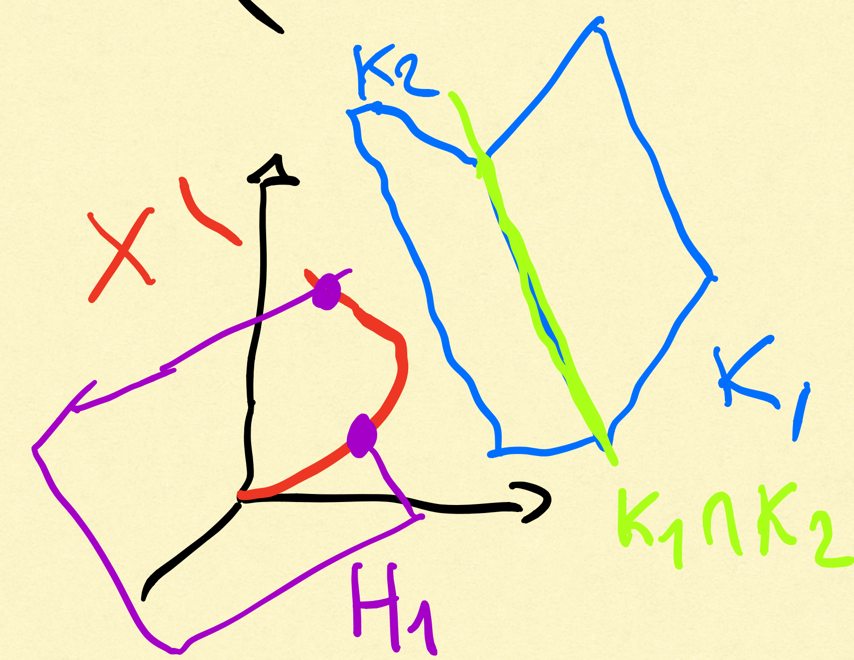
---

caratterizzazione della dimensione mediante sottospazi lineari

PROP. $X \subseteq \mathbb{P}^N$ chiuso irriducibile.

ALLORA: $\dim(X) = n$

$$\iff \begin{cases} \text{(a)} & \forall\, H_1, \dots, H_n \text{ iperpiani si ha } X \cap (\cap H_i) \neq \emptyset \\ \text{(b)} & \exists\, K_1, \dots, K_{n+1} \text{ iperpiani t.c. } X \cap (\cap K_i) = \emptyset \end{cases}$$



$\dim X = 1$

$X \subset \mathbb{P}^3$

dim

$\Rightarrow$ (a) segue dal teorema

(b) Sia K_1 t.c. $K_1 \not\supset X$

Teorema $\Rightarrow$ $X \cap K_1 = Y_1 \cup \_\_ \cup Y_s$

$$\dim(Y_i) = n-1$$

$\forall\, i$ scegliamo $y_i \in Y_i$

prendiamo K_2 t.c. $K_2 \not\ni y_i$

Per costruzione

$$\dim(Y_i \cap K_2) = n-2$$

Iterando $\rightsquigarrow$ $\dim = -1$

n+1 volte

$\Rightarrow \emptyset$

$\Leftarrow$ Per assurdo $\dim(X) < n$

scegliamo n iperpiani

t.c. $X \cap (\cap H_i) = \emptyset$

contraddice (a)

(Per Teo

Per assurdo $\dim(X) > n$

$\forall$ $n+1$ iperpiani

$X \cap (\cap K_i) \neq \emptyset$

(Per Teo

contraddice (b)

$\square$

PRODOTTI

Prop. X, Y ver. q.p. irriducibili

$$\dim(X \times Y) = \dim(X) + \dim(Y)$$

dim. VISTO $X \times Y$ è irriducibile

Supponiamo X, Y affini

$X \subset \mathbb{A}^N$ $\dim(X) = n$

$Y \subset \mathbb{A}^M$ $\dim(Y) = m$

supponiamo, per semplicità di notazione,

$x_1, \dots, x_n$ siano alg. IND. in $\mathbb{K}(X)$

$y_1, \dots, y_m$ siano alg. IND. in $\mathbb{K}(Y)$

&

$x_{n+1}, \dots, x_N$ alg. DIP. in $\mathbb{K}(Y)$

$y_{m+1}, \dots, y_M$ alg. DIP. in $\mathbb{K}(Y)$

D'altra parte

$\mathbb{K}[X \times Y]$ è generato

da $\quad x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_M$

Poiché $\quad X \times Y \subset \mathbb{A}^{N+M}$

& $\quad \mathbb{K}(X \times Y) = \mathrm{Quot}(\mathbb{K}[X \times Y])$

<u>Tesi</u>: $\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\}$

è una base di trascendenza

i.) Sono alg. ind.

Sia $F(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m) = 0$
relazione algebrica

In particolare $\forall\ \bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m)$
FISSATO
$\in X$

$$F(\bar{x}, y) = \sum a_I(\bar{x})\, y^I$$
$$\in \mathbb{K}[Y]$$

è relazione di dip. algebrica

$$\Rightarrow \quad a_I(\bar{x}) \equiv 0 \quad \forall I$$

In particolare

$$Q_I(x) = 0 \quad \forall x \in X$$

$Q_I(x) = 0$ è una relazione di dip. algebrica

$$\Rightarrow \quad Q_I \equiv 0$$

CIOE' $F = 0$

(ii) $\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\}$ è insieme alg. IND. MASSIMALE

Suff. $\forall\, j \neq 1, \dots, n$

$x_1, \dots, x_n, x_J, y_1, \dots, y_m$ è alg. DIP.

o

$x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, y_h$ è alg. DIP

$\forall\, h \neq 1, \dots, m$

Ma $x_1, \dots, x_n, x_J$ sono DIPENDENTI in $\mathbb{K}(X)$

poiché $\dim(X) = n$

$\Rightarrow$ sono DIP. in $\mathbb{K}(X \times Y)$

analogamente per y_h $\square$

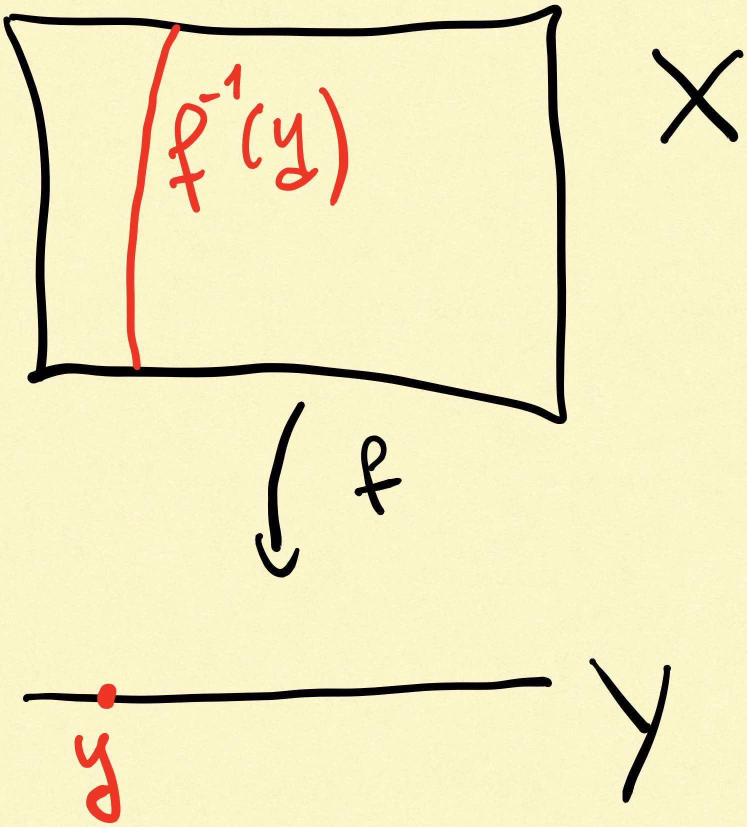
MORFISMI surgettivi

DEF. FIBRA DI UN MORFISMO

$f : X \longrightarrow Y$ morfismo surgettivo di varietà q.p.

dato $y \in Y$, la fibra di f su y è

$$\doteq f^{-1}(y)$$



<u>OSS</u>. $F_y = f^{-1}(y) \subset X$

è chiuso algebrico

COROLLARIO (del Teoreme prossimo)

Deto $f: X \to Y$ morfismo surgettivo

allore le funzione

$$\dim_y : Y \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$y \longmapsto \dim\left(f^{-1}(y)\right)$$

è semicontinue superiormente