14/5/2020

X, Y varietà q.p. irriducibili

$f: X \dashrightarrow Y$ mappa razionale

SE

f è dominante

&

$\exists$ inversa birazionale

ovvero $g: Y \dashrightarrow X$

t.c. $f \circ g \sim_{\text{bir}} \mathrm{id}_Y$

$g \circ f \sim_{\text{bir}} \mathrm{id}_X$

mappa birazionale induce concetto di <u>equivalenza birazionale</u>

NOTAZIONE: $X \sim_{\text{bir}} Y$

TEOREMA X, Y varietà quasi proiettive irriducibili.

ALLORA SONO EQUIVALENTI:

(a) $X \underset{bir}{\sim} Y$

(b) $\mathbb{K}(X) \cong \mathbb{K}(Y)$

(c) $\exists$ $U \subseteq X$ aperto denso

$W \subseteq Y$ aperto denso

t.c. $U \cong W$

isomorfismo di var. q.p.

DIM

(a) $\Rightarrow$ (b) Per funtorialità

$f : X \dashrightarrow Y$ birazionale

induce

$f^* : \mathbb{K}(Y) \hookrightarrow \mathbb{K}(X)$

$g : Y \dashrightarrow X$ birazionale

induce

$g^* : \mathbb{K}(X) \hookrightarrow \mathbb{K}(Y)$

Inoltre $f \circ g \sim_{bir} \mathrm{Id}$

$\Rightarrow \quad g^* \circ f^* = \mathrm{Id}$

$(c) \Rightarrow (a)$ segue dalla definizione

$$f : V \xrightarrow{\simeq} W$$

f rappresenta una mappa birazionale

$(c) \Rightarrow (b)$

Per PROP. settimana scorsa

$V \subseteq X$ aperto denso

$\iota : V \hookrightarrow X$ induce iso

$$\mathbb{K}(X) \cong \mathbb{K}(V)$$

$U \cong W$ quindi

$$\mathbb{K}(X) \cong \mathbb{K}(U) \cong \mathbb{K}(W) \cong \mathbb{K}(Y)$$

(a) $\Rightarrow$ (c)

$f : X \dashrightarrow Y$ dominante

supponiamo f rappresentata

da $[(U, f_U)]$

U aperto denso

f_U morfismo

analogamente sia

$$g : Y \dashrightarrow X$$

rappresentata da

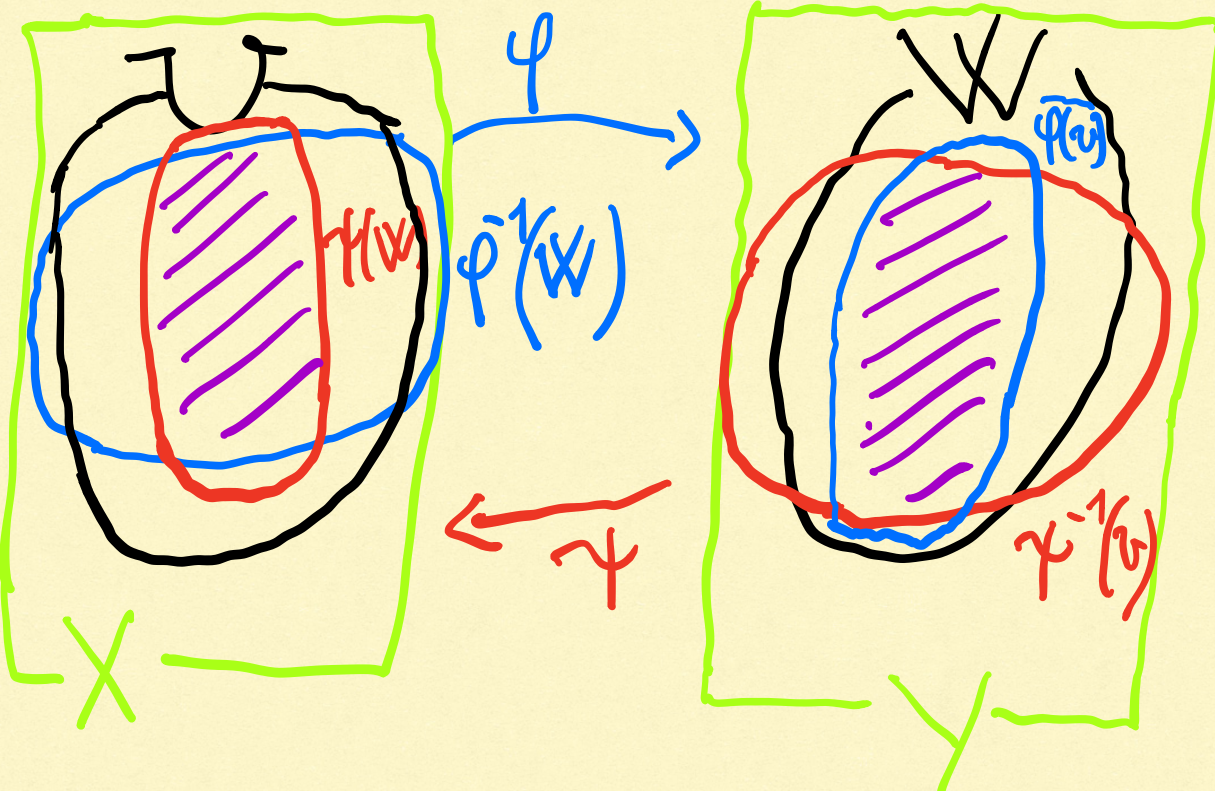
$$(W, g_W)$$

Per comodità di notazione scriviamo

$$f_V = \varphi$$

$$g_W = \psi$$

Consideriamo il seguente diagramma:



Poniamo:

$$U_0 \doteq \varphi^{-1}\left(\psi^{-1}(V)\right)$$

$$W_0 \doteq \psi^{-1}\left(\varphi^{-1}(W)\right)$$

Per costruzione

$$\psi|_{V_0} : V_0 \longrightarrow \psi^{-1}(V) \subset Y$$

è morfismo

Inoltre

$$\varphi \circ \psi|_{\psi^{-1}(V)} = \mathrm{Id}_{\psi^{-1}(V)}$$

CIOÈ $\varphi(\psi(p)) = p$

$\forall\, p \in \psi^{-1}(V)$

In particolare

$$\varphi(V_0) \subseteq W_0 = \psi^{-1}(\varphi^{-1}(W))$$

Poiché $\varphi(p) \in \{\psi^{-1}(p)\}$
$\forall\, p \in \varphi^{-1}(x)$

CONCLUSIONE:

$\varphi_{|V_0} : V_0 \to W_0$
è morfismo

Analogamente

$\psi_{|W_0} : W_0 \to V_0$
è morfismo

$f \circ g \underset{\text{bir}}{\sim} \mathrm{Id} \Rightarrow \varphi \circ \psi = \mathrm{Id}$

$\square$

DIMENSIONE

def. 1 Sia $\mathbb{K} \subset F$ estensione di campi

BASE di trascendenza di F su $\mathbb{K}$

è un insieme algebricamente INDIP. massimale

Dove: $\{a_1, \dots, a_n\} \subset F$ è alg. indip. su $\mathbb{K}$

SE

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] &\longrightarrow F \\ P(x) &\longmapsto P(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$ è iniettiva

eq.^{nte} $\{e_1, \_, e_n\}$ non verifica
nessuna eq. polinomiale
a coeff. in $\mathbb{K}$

<u>DEF. 2</u> grado di TRASCENDENZA
di F su $\mathbb{K}$

(notazione: $\mathrm{Tr\,deg}_{\mathbb{K}} F$)

$\bar{e}$ = # BASE di
Trascendenza

OSS. $\mathbb{K} \subset F_1 \subset F_2$

se F_2 è estensione algebrica finita di F_1

allora $\operatorname{Tr\,deg} F_1 = \operatorname{Tr\,deg} F_2$

DEF. 3 X varietà q. p. irriducibile

$$\dim(X) = \operatorname{Tr\,deg}_{\mathbb{K}}\left(\mathbb{K}(X)\right)$$

DEF 3 $\Rightarrow$ dim è invariante birazionale

$$X \sim_{bir} Y \Rightarrow \dim(X) = \dim(Y)$$

Esempi

① $\dim(\mathbb{A}^n) = n$

Poiché $\mathbb{K}(\mathbb{A}^n) = \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$

&

$x_1, \dots, x_n$ sono alg. indip. & massimali

② $\left.\begin{array}{l} X \text{ irriducibile} \\ \dim(X) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow X = \{\text{punto}\}$

Poiché $\dim(X) = 0$

$\Updownarrow$

$\mathbb{K}(X) \cong \mathbb{K}$

$\forall\, f \in \mathbb{K}(X)$ razionale

f è costante

$\Longleftrightarrow \quad X = $ p.to

---

caso X riducibile

DEF. Data $X = \bigcup_i X_i$

varietà q.p.

X_i = componenti irriducibili

$$\dim(X) = \max\{\dim(X_i)\}$$

<u>def</u>. X si dice di
dimensione PURA $= n$
SE
$\forall i \quad \dim(X_i) = n$

<u>TEOREMA</u>.
X varietà q.p. irriducibile.
di $\dim = n$

ALLORA $\exists\ f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y]$
pol. irriducibile
t.c.

$$X \sim_{bir} V(f) \subset \mathbb{A}^{n+1}$$

<u>DIM</u>. Sfruttiamo

Lemma di Normalizz. di Nœther

/ teo. elemento primitivo

/ proiezione finita

Sia $(x_1, \ldots, x_n)$ base di trascendenza di X

$\Rightarrow \mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n) \subseteq \mathbb{K}(X)$ est. alg. finita

se vale $=$ allora per il Teorema $X \sim_{bir} \mathbb{A}^n$

altrimenti

$\exists$ elemento primitivo g t.c.

$$\mathbb{K}(X) = \mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)[y] \big/ g$$

eq.$^{\text{nte}}$:

$\exists$ proiezione finita

$$U \longrightarrow \mathbb{A}^n$$

$U \subset X$ aperto affine

Scriviamo $g =$

$$g = y^n + Q_{n-1}(x)\, y^{n-1} + \ldots + Q_0(x)$$

Preso $f = g \cdot \left(\text{m.c.m.} \left(\underset{\text{di } Q_i}{\text{denominatori}} \right) \right)$

$Q_i \in \mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$

$$\Longrightarrow \quad f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n, y]$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{K}(X) \cong \mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)[y] \big/ (f)$$

$$= \mathbb{K}(V(f))$$

$\square$

OSS. - COROLLARIO

$X \subset \mathbb{A}^{n+1}$

$f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_{n+1}]$

allora $V(f)$ ha $\dim = n$

DIM. Sia $f = \prod f_i^{n_i}$

f_i pol. irriducibili

$X = \bigcup_i X_i$ con $X_i = V(f_i)$ componenti irriducibili

Teo. elemento primitivo:

$$\mathbb{K}(X_i) \cong \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)[y] \big/ (f_i)$$

$\underline{\dim = n}$

$\square$

CIOÈ: Una ipersuperficie in $\mathbb{A}^{n+1}$ ha dimensione pura $= n$

PROP. X, Y varietà affini irriducibili t.c. $Y \subseteq X$

Allora: $Y \subsetneq X$

$$\Downarrow$$

$$\dim(Y) < \dim(X)$$

eq.^{nte} X, Y chiusi irriducibili

$$\left.\begin{array}{l} Y \subseteq X \\ \dim Y = \dim X \end{array}\right\} \Rightarrow X = Y$$

<u>DIM</u> supponiamo

- $Y \subsetneq X \subseteq \mathbb{A}^N$

- $\dim(X) = n$

Caso affine $\Rightarrow$

$$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_N] \twoheadrightarrow \mathbb{K}[X] \twoheadrightarrow \mathbb{K}[Y]$$

Sia $I = I_X(Y) \subseteq \mathbb{K}[X]$

ideale di Y in X

n.b. : $\{x_1, \dots, x_N\}$ contiene base di trascendenza di $\mathbb{K}(Y)$

Tesi : $\forall$ n-upla $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$ è alg. dip. su Y

Per semplicità prendiamo $x_1, \dots, x_n$

Consideriamo $f \in I_X(Y)$ $f \neq 0$

Per ipotesi $\dim(X) = n$

Quindi:

$\{ x_1, \dots, x_n, f \}$ è alg. DIP. su X

$\exists$ POLINOMIO P

$P \in \mathbb{K}[t_1, \dots, t_n, z]$

t.c.

$P(x, f) = 0$ su X

ovvero $\in \mathbb{K}[X]$

scriviamo $P(x, f) =$

$= a_d(x) \cdot f^d + \dots + a_0(x)$

con $x = (x_1, \dots, x_m)$

Possiamo supporre $a_0 \neq 0$ (altrimenti "semplifichiamo")

$$P(x, f) = 0 \quad \text{su } X$$

$$\Downarrow$$

$$a_0(x_1, \dots, x_m) = 0 \quad \text{su } Y$$

perché $f \in I_X(Y)$

$$\left[\, P(x, f)\big|_Y = a_0 \,\right]$$

conclusione:

$$a_0(x_1, \dots, x_n) = 0$$

induce una relazione di dipendenza algebrica tra $x_1, \dots, x_n$

$\square$
