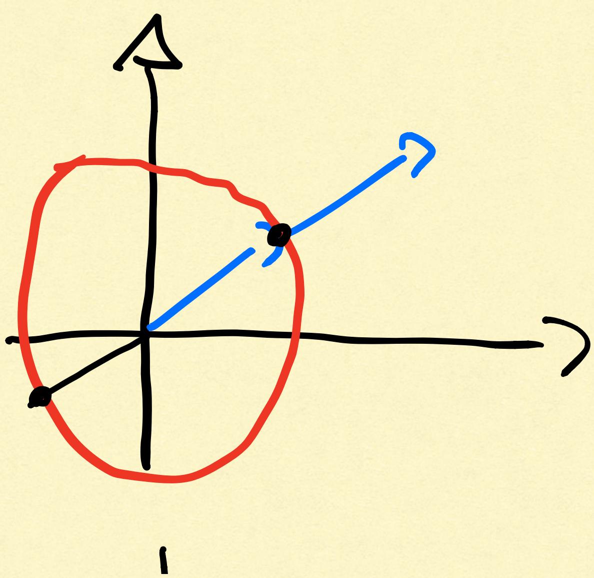
$$\mathbb{P}(V)$$

RETTE PROIETTIVE

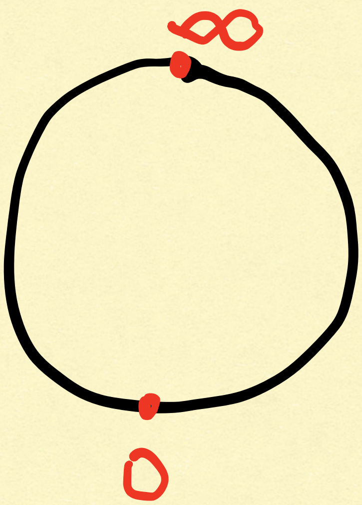
$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \big/ \sim$$



$\mathbb{R}^2$

$$\downarrow$$

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cong S^1$$

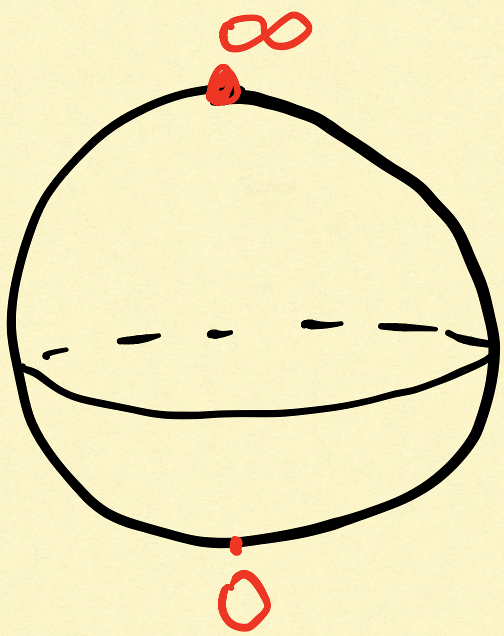


$$\cong \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$\cong$ homeo

S^2



BIRAPPORTO

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$$

consideriamo 4 punti
P_1, P_2, P_3, P_4

Prendiamo coordinate (x_0, x_1)
t.c.

$P_1 = (1:0)$ origine

$P_2 = (0:1)$ punto ∞

$P_3 = (1:1)$

<u>Def</u>. Birapporto di
P_1, P_2, P_3, P_4

notazione: $\mathrm{Bir}(P_1, \ldots, P_4)$
o
$\beta(P_1, \ldots, P_4)$

è il numero $\frac{x_1}{x_0} \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$

dove $(x_0 : x_1)$ sono le coordinate di P_4 in $\mathbb{P}^1$ rispetto al riferimento $\{P_1, P_2, P_3\}$

convenzione: $\frac{1}{0} = \infty$

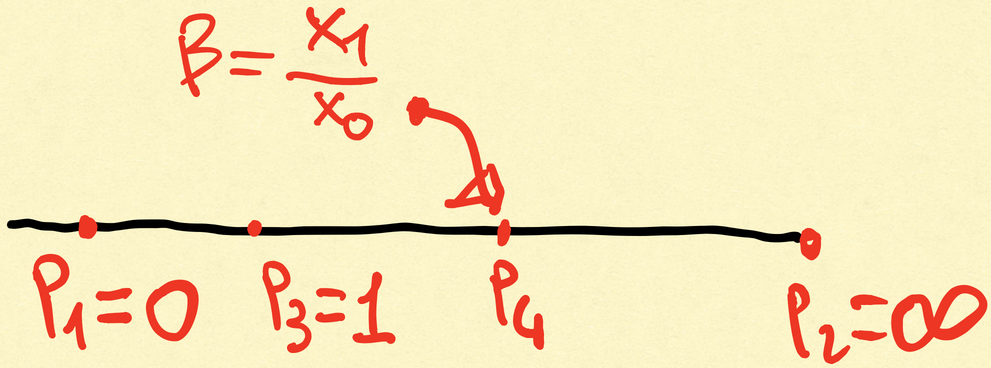
Esempi

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_1) = 0$$

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_2) = \infty$$

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_3) = 1$$

$\mathbb{P}^1$:



FORMULA:

in $\mathbb{P}^1$ 4 punti qualsiasi (3 distinti)

$$P_i = (\lambda_i : \mu_i)$$

$$\beta(P_1, \dots, P_4) =$$

$$= \frac{(\lambda_1 \mu_4 - \lambda_4 \mu_1)}{(\lambda_1 \mu_3 - \lambda_3 \mu_1)} \cdot \frac{(\lambda_3 \mu_2 - \lambda_2 \mu_3)}{(\lambda_4 \mu_2 - \lambda_2 \mu_4)}$$

Teorema

Di $P_1, \ldots, P_4 \in \mathbb{P}^1$

$Q_1, \ldots, Q_4 \in \mathbb{P}^1$

P_1, P_2, P_3 distinti

Q_1, Q_2, Q_3 distinti

Allora $\exists$ proiettività

$f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ tale che

$$f(P_i) = Q_i \quad i = 1, \ldots, 4$$

$$\Updownarrow$$

$$\beta(P_1, \ldots, P_4) = \beta(Q_1, \ldots, Q_4)$$

SIMMETRIE del BIRAPPORTO

$\beta(P_1, \ldots, P_4)$ dipende dell'ordine con cui ho scelto i punti

Però (formule):

$$\beta(P_1, \ldots, P_4) = \beta(P_2, P_1, P_4, P_3)$$

$$= \beta(P_3, P_4, P_1, P_2)$$

$$= \beta(P_4, P_3, P_2, P_1)$$

OVVERO :

se consideriamo l'azione del gruppo simmetrico S_4 sui 4 punti

Bir è invariante rispetto a : Id

$(12)(34)$

$(13)(24)$

$(14)(23)$

$\Longrightarrow$ Nel calcolo possiamo considerare P_1 al 1° posto e vedere l'azione di S_3 su P_2, P_3, P_4

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = K$$

$$\Longrightarrow \beta(P_1, P_2, P_4, P_3) = \frac{1}{K}$$

$$\beta(P_1, P_4, P_3, P_2) = 1 - K$$

$$\beta(P_1, P_4, P_2, P_3) = \frac{1}{1-K}$$

$$\beta(P_1, P_3, P_4, P_2) = \frac{K-1}{K}$$

$$\beta(P_1, P_3, P_2, P_4) = \frac{K}{K-1}$$

conseguenze:
due quaterne di
punti $\{P_1, \ldots, P_4\}$
$\{Q_1, \ldots, Q_4\}$
in $\mathbb{P}^1$
sono proiettivamente
equivalenti
SE
Posto $\beta(P_1, \ldots, P_4) = K$
allora

$$\beta(Q_1, \dots, Q_4) \in \left\{ K, \frac{1}{K}, 1-K, \frac{1}{1-K}, \frac{K-1}{K} \right\}$$

OSS (Esercizio):

Per quali valori di K i 6 valori associati non sono distinti?

Risposta: $\boxed{K = -1, 2, \frac{1}{2}}$

$$\boxed{K = e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

Esempi - Esercizi

Proiettività

$$f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

$f \longleftrightarrow$ MATRICE $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

P.ti fissi di f $\longleftrightarrow$ autovettori di A

$$\longleftrightarrow \quad P_0 = (1:0)$$
$$P_1 = (0:1)$$

Punto

$$P = (x_0 : x_1) \mapsto f(P) = (\lambda x_0 : \mu x_1)$$

$$\mathrm{Bir}(P_0, P_1, P, f(P)) = \text{formule}$$

$$= \frac{1 \cdot \mu x_1 - 0}{1 \cdot x_1 - 0} \cdot \frac{x_0 - 0}{\lambda x_0 - 0}$$

$$= \frac{\mu}{\lambda} \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$$

Se $\lambda \neq 0$

$$f \leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$$\beta = \mathrm{Bir}(P_0, P_1, P, f(P))$$

Esercizio

Siano A, B due punti distinti di $\mathbb{P}^1$.

Dimostrare che $\exists !$ involuzione $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ t.c. $f \neq id$

$$f(A) = A, \quad f(B) = B$$

Sol. con eventuale
cambiamento di coordinate
possiamo supporre

$A = P_0 = (1:0)$

$B = P_1 = (0:1)$

$f \Longleftrightarrow$ matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

$f^2 = id \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^2 = \lambda \cdot Id$

$\Longleftrightarrow \beta = \pm 1$

$\beta = 1 \longrightarrow Id$

$\beta = -1 \longrightarrow$ matrice richiesta

conclusione

$$f \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Sia $f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ proiettività

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

matrice associata ad f (modulo molt. per scalare)

i) f è una involuzione $\neq Id$

$\Updownarrow$

$tr(M) = a + d = 0$

ii) f è involuzione $\neq Id$

$\Updownarrow$

$\exists$ 2 punti distinti Q_1, Q_2 che si scambiano tramite f

Sol $\quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$f^2 = Id \quad , \quad f \neq Id$

$\Downarrow$

polinomio minimo di M
= polinomio caratteristico di M

$P(\lambda) = \lambda^2 - \beta$

$\iff \quad M^2 = \beta \, Id$

Per le proprietà di Pol. caratteristico

$$\mathrm{tr}(M) = \text{coeff. di grado } 1$$
$$= 0$$

(ii) f involuzione $\neq Id$

Sia Q_1 punto non fisso

Poniamo $Q_2 = f(Q_1)$

$f^2 = Id \Rightarrow Q_2 \leftrightarrow Q_1$

VICEVERSA:

Siano Q_1, Q_2 2 punti che si scambiano

Consideriamo un generico punto P

Poniamo $P' = f(P)$

Tesi: $f(P') = P$

Consideriamo il birapporto

$$\beta(Q_1, Q_2, P', P) =$$

= perché f è proiettività

$$= \beta(f(Q_1), f(Q_2), f(P'), f(P))$$

$f(Q_1) = Q_2$, $f(Q_2) = Q_1$

$=$ $\Downarrow$ $f(P)=P'$

$$\beta(Q_2, Q_1, f(P'), P')$$

$=$ per prop. di β_{12} rispetto alle permutazioni

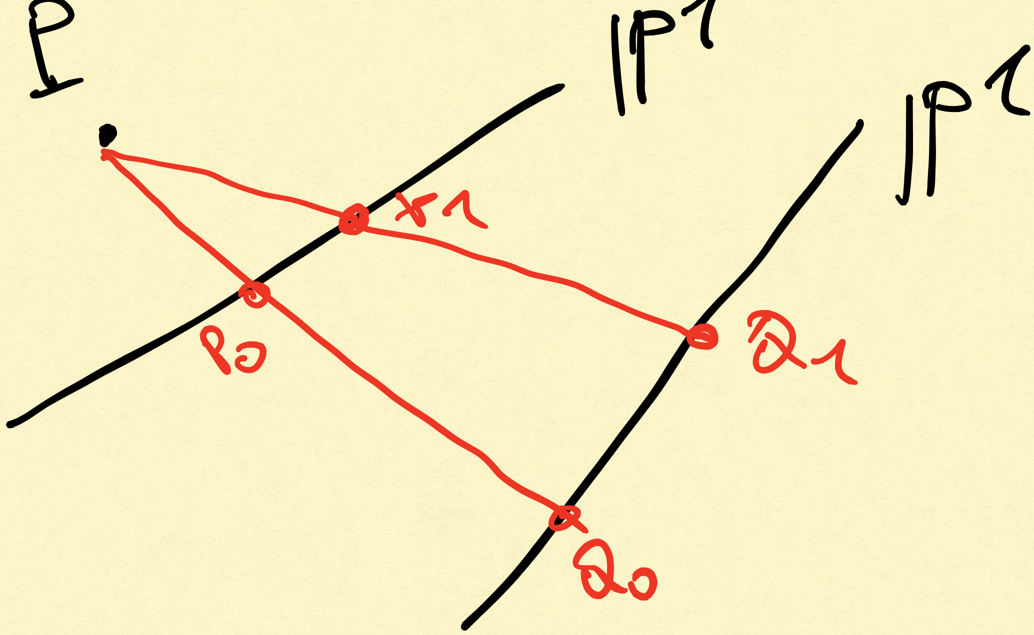
$$= \beta(Q_1, Q_2, P', f(P'))$$

CONCLUSIONE:

$$f(P') = P$$

$\square$

Idea storica proiettività



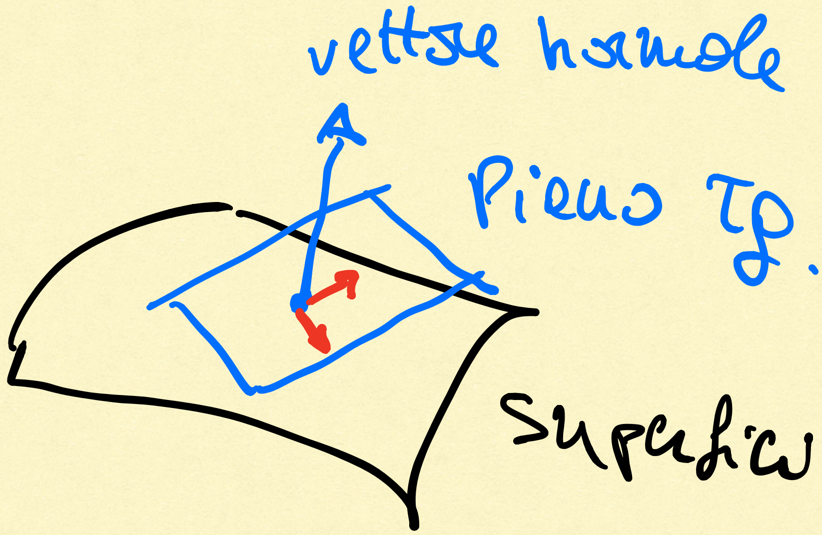
PIANO proiettivo

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^3 \setminus \{0\} \big/ \sim$$

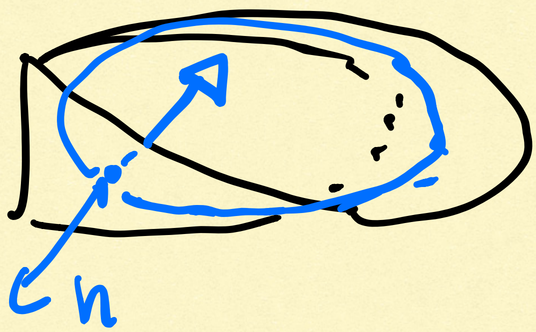
$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \left\{ \text{rette all'}\infty \right\}$$

non è orientabile

Idea:



$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \supset$ nastro di Möbius



$\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ è orientabile

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \\ &\quad \| \\ &\mathbb{C}^2 \cup \{\text{retta all'}\infty\} \end{aligned}$$

PROPRIETÀ assiomatiche e dualità di $\mathbb{P}^2$

- $\mathbb{P}^2 = \{ \text{punti} \}$
- rette $\subset \mathbb{P}^2$

$\Updownarrow$

relazioni tra punti

retta $r \iff P_1 * P_2$

P

$= P_1 * P_2$

ASSIOMI

0) Ogni retta contiene almeno 3 punti

Il piano contiene almeno 4 punti a 3 a 3 non allineati

1) $\forall\ P_1, P_2$ distinti

$\exists !$ retta $r = P_1 * P_2$

t.c. $r \ni \{P_1, P_2\}$

2) $\forall\ r_1, r_2$ rette distinte

$$\exists !\ P \in r_1 \cap r_2$$

<u>DUALITÀ</u>

Per 2 punti $\exists !$ retta	Due rette si intersecano in unico punto
$P_1 * P_2$ $\longleftrightarrow$	$r_1 \cap r_2$

Teorema di Desargues

(dei triangoli omologici)

In $\mathbb{P}^2$ consideriamo

ABC, $A'B'C'$ due triangoli

Poniamo:

$r = A * B \qquad r' = A' * B'$

$s = A * C \qquad s' = A' * C'$

$t = B * C \qquad t' = B' * C'$

ALLORA:

Le rette

$A * A'$, $B * B'$, $C * C'$

passano per lo stesso punto

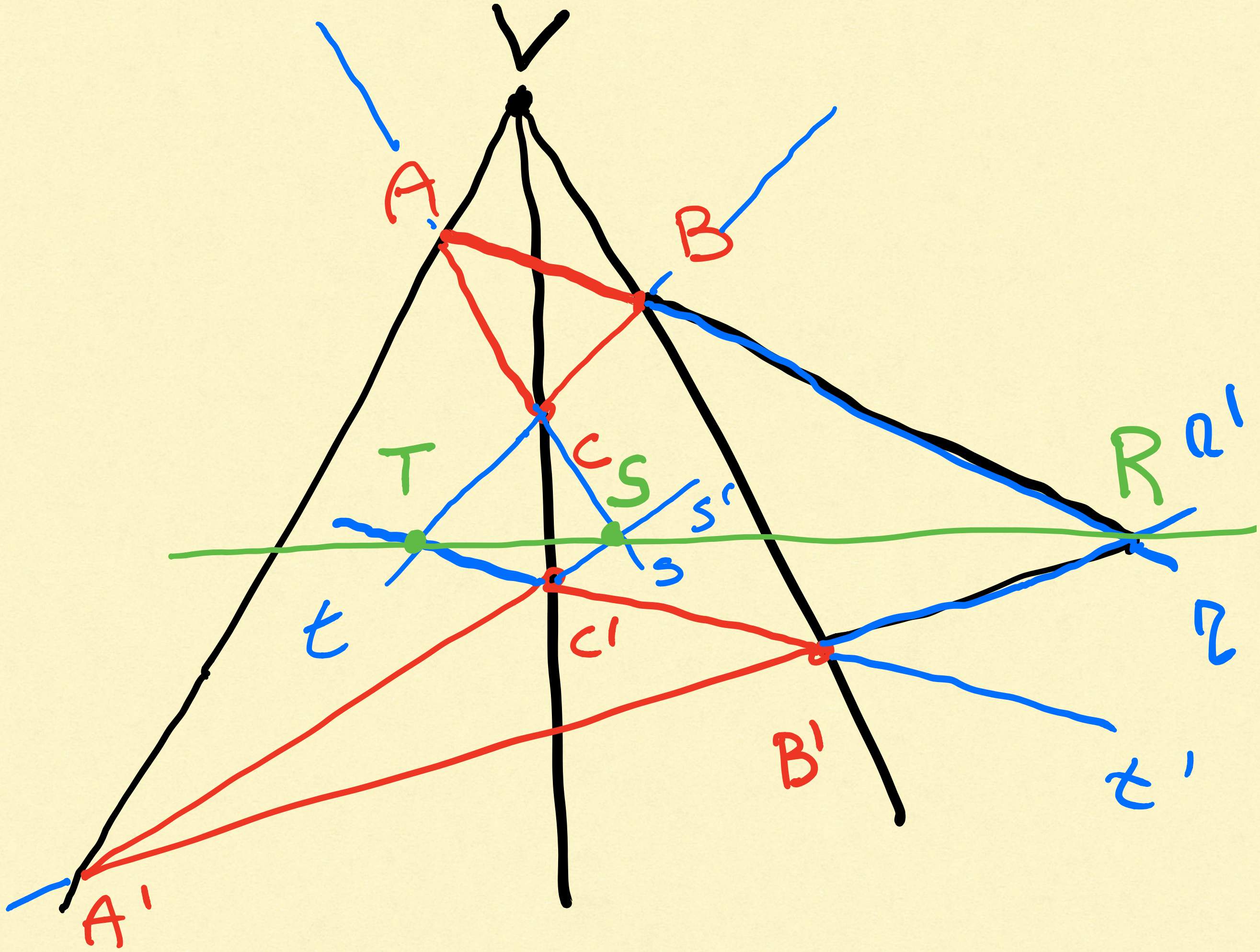
V (i triangoli sono omologhi)

$$\Updownarrow$$

$R = r \cap r'$, $S = s \cap s'$

$T = t \cap t'$

sono allineati

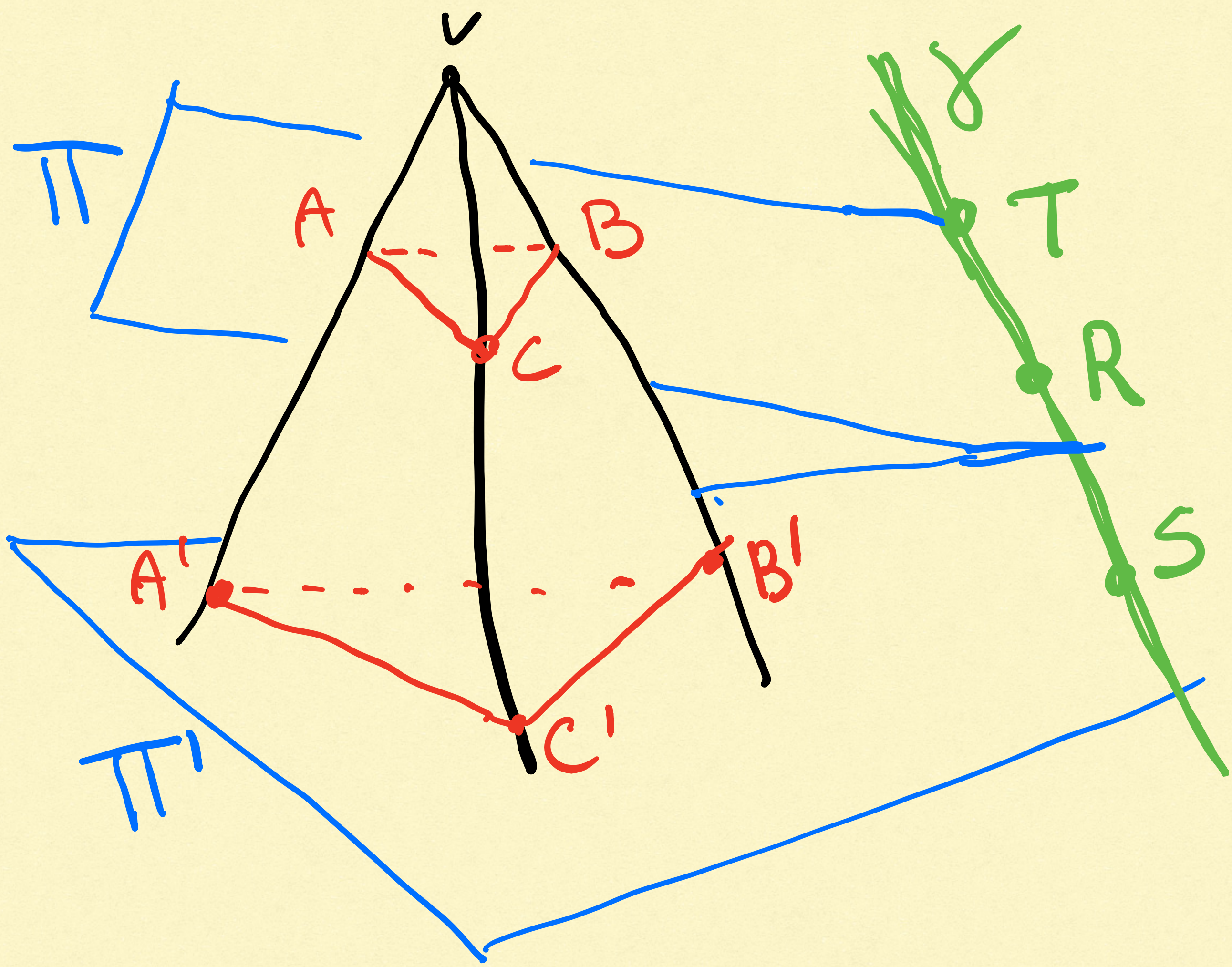


<u>OSS</u>. Il teorema

è AUTODUALE

DIMOSTRAZIONE GRAFICA

<u>Trucco</u>: consideriamo il Teorema in $\mathbb{P}^3$



supponiamo

$ABC \subset$ Piano π

$A'B'C' \subset$ Piano π'

$\pi \neq \pi'$

Sia $\gamma =$ retta $\pi \cap \pi'$

Tesi: $T, R, S \in \gamma$

strategia $\longrightarrow$ considerare le facce del prisma

$A, B \quad , A'B' \in$ stesse
faccia

$\Rightarrow$ sono complanari

$\Rightarrow (A * B) \cap (A' * B') = R$

D'altra parte $A * B \subset \Pi$

$A' * B' \subset \Pi'$

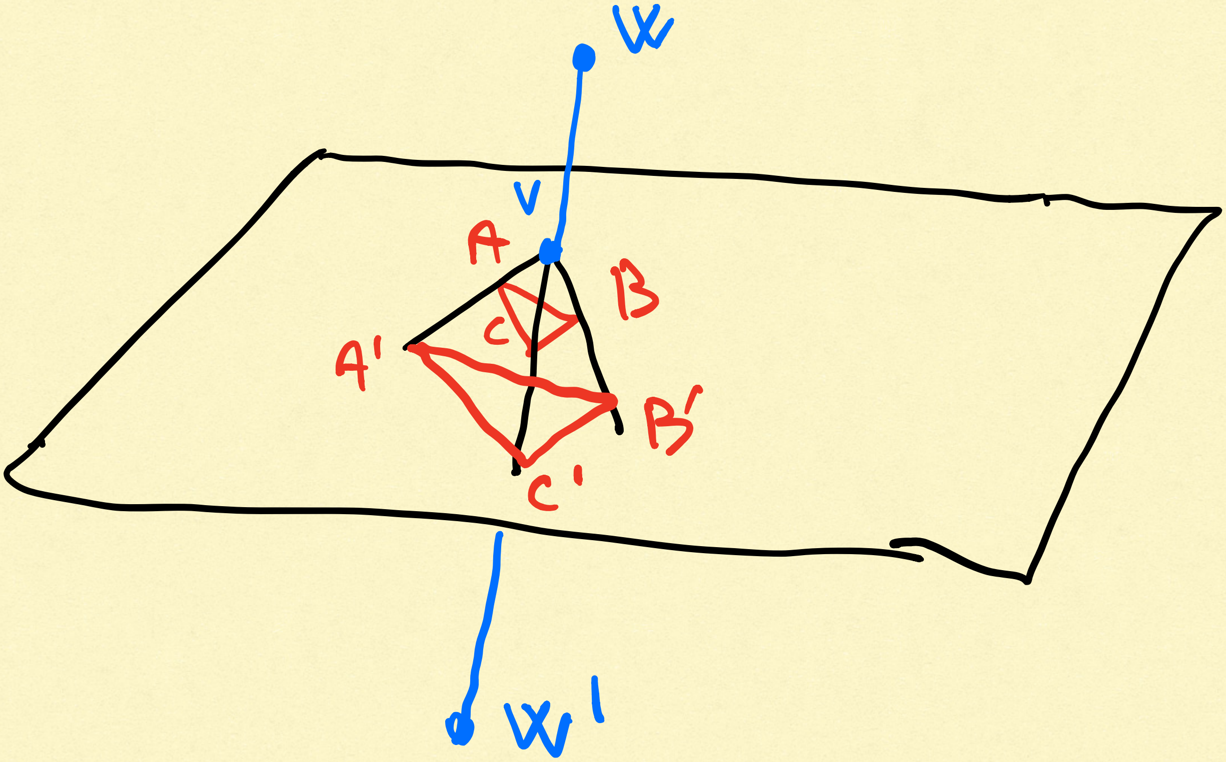
$\Rightarrow R \in \Pi \cap \Pi' = \gamma$

Analogamente:

$S \in \gamma, \quad T \in \gamma$

PASSO 2:

Ricondursi al caso precedente usando 2 vertici ausiliari



consideriamo 2 vertici W, W' non contenuti nel piano originale ma allineati con V

Costruiamo 2 triangoli nello spazio

$\bar{A}\ \bar{B}\ \bar{C}$

e iteriamo passo 1.

. . .

$\square$