

Appunti di Elementi di Geometria Algebrica
Anno Accademico 2015/2016

Riccardo Morandin, Viola Siconolfi, Giovanni Barbarino

9 settembre 2016

Indice

1	Richiami	7
1.1	Geometria proiettiva	7
1.1.1	Carte affini	7
1.1.2	Chiusura proiettiva di uno spazio affine	8
1.1.3	Birapporto	8
1.2	Polinomi	10
1.2.1	Lemma di Gauss	10
1.2.2	Principio d'identità dei polinomi	11
1.2.3	Anelli graduati e polinomi omogenei	11
1.2.4	Risultante	14
1.3	Miscellanea	15
1.3.1	Anelli noetheriani	15
1.3.2	Teoria delle categorie	15
1.3.3	Trucchetti	17
2	Ipersuperfici	19
2.1	Prime definizioni	19
2.1.1	Parte affine e chiusura proiettiva	20
2.1.2	Equivalenza affine e proiettiva di ipersuperfici	20
2.2	Studio locale	21
2.3	Molteplicità d'intersezione di due curve piane	25
2.3.1	Teorema di Bézout	30
2.4	Sistemi lineari di curve	33
2.4.1	Coniche per cinque punti	33
2.4.2	Cubiche per otto punti	35
2.5	Quadriche e punti di flesso	36
2.6	Forma di Weierstrass e di Legendre	38
2.7	Gruppo abeliano sui punti di una cubica liscia	42
3	Topologia di Zariski e Nullstellensatz	45
3.1	Insiemi algebrici affini, ideali associati e Nullstellensatz	45
3.2	Topologia di Zariski sullo spazio affine	47
3.2.1	Spazi topologici noetheriani	50
3.3	Topologia di Zariski sullo spazio proiettivo	53
3.3.1	Nullstellensatz proiettivo	55
3.4	Chiusura proiettiva	56

4	Varietà quasi-proiettive	59
4.1	Varietà quasi-proiettive e funzioni regolari	59
4.2	Varietà affini	60
4.2.1	Anello delle coordinate	62
4.2.2	Aperti principali	65
4.2.3	Equivalenza con K-algebre	67
4.3	Prodotto di varietà quasi-proiettive	69
4.3.1	Prodotto di varietà affini	70
4.3.2	Costruzione di $P^1 \times P^1$	72
4.3.3	Caso generale	75
4.4	Varietà proiettive	78
4.5	Miscellanea	80
4.5.1	Topologia di Zariski sullo spettro di un anello	80
4.5.2	Mappe di Veronese	82
4.5.3	Varietà di ipersuperfici	84
4.5.4	Associatività nelle cubiche lisce	85
4.5.5	Gruppi algebrici	86
4.5.6	Scoppiamento (o blowup)	88
4.5.7	Grassmanniana	89
5	Bozze lezioni	95
5.1	Lezione 17 (27 Nov 2015)	95
5.1.1	Geometria birazionale	95
5.2	Lezione 18 (2 Nov 2015)	96
5.3	Lezione 19 (04 Dic 2015)	99
5.3.1	Teoria dei campi	100
5.4	Lezione 20 (11 Dic 2015)	102
5.5	Lezione 21 (16 Dic 2015)	106
5.6	Lezione 22 (17 Dic 2015)	111
5.7	Lezione 23 (18 Dic 2015)	115

Glossario

H_0 iperpiano fondamentale di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ (solitamente $H_i = \{x_i = 0\}$). 5, 21

$L(P, Q)$ retta passante per i punti P e Q . 5, 16, 18

U_0 insieme della carta affine standard di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. 5, 6, 21, 32, 34, 52

$\text{char } \mathbb{K}$ caratteristica del campo \mathbb{K} . 18, 19, 21, 28, 32–35, 39

$\text{Spec}(R)$ insieme degli ideali primi dell'anello R . 10, 47, 50

j_0 mappa della carta affine standard di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. 5, 6, 19

ACC ascending chain condition. 13, 46

cubica gobba la varietà algebrica $\mathcal{C}_3 := V_{\mathbb{A}}(y - x^2, z - xy)$ di \mathbb{A}^3 . 45, 52

DCC descending chain condition. 46, 47

UFD dominio a fattorizzazione unica. 8

Capitolo 1

Richiami

1.1 Geometria proiettiva

Sia V un \mathbb{K} -spazio vettoriale di dimensione $n + 1$, sia $\mathbb{P}(V)$ il suo spazio proiettivo associato, che ha dimensione n .

I punti $P_0 = [v_0], \dots, P_k = [v_k]$ dello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ sono detti *linearmente indipendenti* se i vettori v_0, \dots, v_k lo sono; pertanto il massimo numero di punti linearmente dipendenti è $n + 1$.

Diciamo che i punti P_0, \dots, P_k sono *in posizione generale* se sono linearmente indipendenti, oppure se $k > n$ e tutte le loro $n + 1$ -uple sono formate da punti linearmente indipendenti.

Si chiama *riferimento proiettivo* di $\mathbb{P}(V)$ ogni insieme ordinato $\mathcal{R} = \{P_0, \dots, P_{n+1}\}$ di $n + 2$ punti in posizione generale: P_0, \dots, P_n sono detti *punti fondamentali* del riferimento, mentre P_{n+1} è detto *punto unità*.

Se $\mathcal{R} = \{P_0, \dots, P_{n+1}\}$ è un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$, allora per ogni $u \in V \setminus \{0\}$ tale che $[u] = P_{n+1}$ esiste un'unica base $\mathcal{B}_u = \{v_0, \dots, v_n\}$ di V tale che $[v_i] = P_i$ per $i = 0, \dots, n$ e $v_0 + \dots + v_n = u$. Introduciamo quindi un sistema di *coordinate omogenee* in $\mathbb{P}(V)$: se $P = [v]$ e (x_0, \dots, x_n) sono le coordinate di v nella base \mathcal{B}_u , associamo a P la $n + 1$ -upla omogenea $[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. Si verifica che tutto questo è ben definito, a meno dei soliti coefficienti moltiplicativi. In particolare risulta $P_0 = [1, 0, \dots, 0]$, $P_1 = [0, 1, \dots, 0]$, \dots , $P_n = [0, 0, \dots, 1]$, $P_{n+1} = [1, 1, \dots, 1]$.

Definizione 1.1.1. Un sottospazio affine di dimensione 1 si dice *retta affine*. Se $P, Q \in \mathbb{A}^n$ sono due punti distinti, la retta affine passante per P e Q sarà denotata con

$$L(P, Q) := \{(1 - t)P + tQ \in \mathbb{A}^n : t \in \mathbb{K}\}.$$

Analogamente, un sottospazio proiettivo di dimensione 1 si dice *retta proiettiva*. Se $P, Q \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ sono due punti distinti, la retta proiettiva passante per P e Q sarà denotata con

$$L(P, Q) := \{\lambda P + \mu Q \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) : [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})\}.$$

1.1.1 Carte affini

Definizione 1.1.2. Consideriamo l'*iperpiano fondamentale* $H_0 = \{x_0 = 0\}$ di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, e definiamo la *carta affine standard* di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ come (U_0, j_0) , dove

$$U_0 = \mathbb{P}^n \setminus H_0 = \{[x_0, \dots, x_n] : x_0 \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \neq 0\},$$
$$j_0 : \mathbb{A}^n \rightarrow U_0 \quad | \quad j_0(x_1, \dots, x_n) = [1, x_0, \dots, x_n].$$

Si verifica che j_0 è una mappa biettiva con inversa

$$j_0^{-1} : U_0 \rightarrow \mathbb{A}^n \quad | \quad j_0^{-1}[x_0, x_1, \dots, x_n] = \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right).$$

Oltre alla naturale estensione alle carte affini (U_i, j_i) , è possibile generalizzare la nozione di carta affine di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ di dimensione n a partire da un qualsiasi iperpiano H (mediante isomorfismo proiettivo).

Data una carta affine (U_H, j_H) di $\mathbb{P}(V)$, definita da un iperpiano $H \subseteq \mathbb{P}(V)$, talvolta, per abuso di linguaggio, si indica con il termine “carta” anche il solo insieme U_H o la mappa j_H . Se $P \in U_H$, le componenti del vettore $j_H^{-1}(P)$ sono dette *coordinate affini* del punto P nella carta U_H . I punti di H sono detti *punti impropri* (o anche *punti all'infinito* rispetto alla carta U_H , mentre i punti di U_H sono detti *punti propri*.

1.1.2 Chiusura proiettiva di uno spazio affine

Definizione 1.1.3. Sia W un sottospazio affine di \mathbb{A}^n definito dalle equazioni

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n + b_1 &= 0 \\ \vdots \\ a_{h,1}x_1 + \dots + a_{h,n}x_n + b_h &= 0 \end{cases}$$

e consideriamo l'immersione $j_0 : \mathbb{A}^n \rightarrow U_0 \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ data dalla carta affine standard: i punti di W saranno trasformati nei punti propri del sottospazio proiettivo \overline{W} definito da

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n + b_1x_0 &= 0 \\ \vdots \\ a_{h,1}x_1 + \dots + a_{h,n}x_n + b_hx_0 &= 0 \end{cases}$$

Il sottospazio \overline{W} coincide con il più piccolo sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(\mathbb{K})$ che contiene W , e viene detto *chiusura proiettiva* di W .

1.1.3 Birapporto

Se $P = [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$, la sua *coordinata affine* sarà $z := \frac{\mu}{\lambda} \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$.

Definizione 1.1.4. Dati quattro punti $P_1, \dots, P_4 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ distinti, definiamo il *birapporto* di P_1, \dots, P_4 come la coordinata affine di P_4 nel riferimento proiettivo $\{P_1, P_2, P_3\}$ di $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$.

Se $[\lambda_i, \mu_i]$ sono coordinate omogenee di P_i per $i = 1, \dots, 4$ in un qualche sistema di coordinate omogenee, il birapporto di P_1, \dots, P_4 soddisfa la formula

$$\text{Bir}(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\lambda_1\mu_4 - \lambda_4\mu_1}{\lambda_1\mu_3 - \lambda_3\mu_1} \frac{\lambda_3\mu_2 - \lambda_2\mu_3}{\lambda_4\mu_2 - \lambda_2\mu_4}.$$

Se $\lambda_i \neq 0$ per $i = 1, \dots, 4$, considerate le coordinate affini $z_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i}$ dei punti P_i , la formula del birapporto diventa

$$\text{Bir}(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{z_4 - z_1}{z_3 - z_1} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_4 - z_2}.$$

Si osserva che, avendo scelto P_1, \dots, P_4 distinti, il birapporto può assumere tutti i valori tranne 0, 1 e ∞ . Se in un qualche sistema di coordinate P_1, P_2, P_3, P_4 hanno coordinate affini rispettivamente 0, 1, ∞, λ , si verifica immediatamente che $\text{Bir}(P_1, P_2, P_3, P_4) = \lambda$.

Teorema 1.1.5 (proprietà fondamentale del birapporto). Date due quaterne di punti distinti P_1, \dots, P_4 e Q_1, \dots, Q_4 in $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$, allora esiste una proiettività $g : \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ che manda $P_i \mapsto Q_i$ per $i = 1, \dots, 4$ se e solo se $\text{Bir}(P_1, \dots, P_4) = \text{Bir}(Q_1, \dots, Q_4)$.

Dimostrazione omessa.

Osserviamo che, date due rette $r, s \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ e fissato un isomorfismo proiettivo $r \rightarrow s$, possiamo sempre estenderlo ad una proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ guadagnando un grado di libertà, che ci consente di prendere un punto $P \notin r$ e mandarlo in un punto $Q \notin s$ a nostra scelta.

Ci interessano le proiettività che inducono una biiezione tra $\{P_1, \dots, P_4\}$ e $\{Q_1, \dots, Q_4\}$. Per questo è necessario studiare come cambia il birapporto di Q_1, \dots, Q_4 applicando una permutazione ai punti. Dall'espressione analitica del birapporto, si osserva che è invariante rispetto alle permutazioni Id , $(12)(34)$, $(13)(24)$ e $(14)(23)$. Questo ci consente di ridurre da 24 a 6 le permutazioni da considerare. In particolare, se $\beta = \text{Bir}(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$, si osserva che il birapporto di una permutazione può assumere solo i seguenti sei valori:

$$B(\beta) = \left\{ \beta, \frac{1}{\beta}, 1 - \beta, \frac{1}{1 - \beta}, \frac{\beta}{\beta - 1}, \frac{\beta - 1}{\beta} \right\}.$$

Osserviamo che in alcuni casi si può avere $\#B(\beta) < 6$ (quando alcuni valori coincidono). Dato che $\beta \neq 0, 1, \infty$, si possono presentare solo due di questi casi: $B(\beta) = \{-1, 2, \frac{1}{2}\}$ e $B(\beta) = \{\omega, \omega^{-1}\}$, dove ω è una radice terza primitiva di -1 .

Dalla proprietà fondamentale del birapporto, si deduce immediatamente il seguente corollario:

Corollario 1.1.6. Date due quaterne di punti distinti P_1, \dots, P_4 e Q_1, \dots, Q_4 in $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$, siano $\beta := \text{Bir}(P_1, \dots, P_4)$ e $\beta' := \text{Bir}(Q_1, \dots, Q_4)$: allora esiste una proiettività g che manda $\{P_1, \dots, P_4\}$ in $\{Q_1, \dots, Q_4\}$ se e solo se $\beta' \in B(\beta)$.

Definizione 1.1.7. Definiamo la funzione *modulo* del birapporto come

$$j : \mathbb{K} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{K} \quad \left| \quad j(t) = \frac{(t^2 - t + 1)^3}{t^2(t - 1)^2}.$$

Proposizione 1.1.8. Dati $\beta, \beta' \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$, allora $j(\beta) = j(\beta')$ se e solo se $\beta' \in B(\beta)$.

Hint. Per una freccia basta mostrare che $j(\beta') = j(\beta)$ per ogni scelta di $\beta' \in B(\beta)$.

Per l'altra freccia, sia $c = j(\beta)$: osserviamo che $j(t) = c$ se e solo se $(t^2 - t + 1)^3 - ct^2(t - 1)^2 = 0$. Il polinomio $p(t) = (t^2 - t + 1)^3 - ct^2(t - 1)^2$ ha grado 6 e $B(\beta)$ sono tutte radici, grazie alla prima freccia. Se $\#B(\beta) = 6$ abbiamo finito; gli altri casi sappiamo per quali valori di c avvengono, e basta verificare che le uniche radici sono $\{-1, \frac{1}{2}, 2\}$ oppure $\{\omega, \omega^{-1}\}$, con le opportune molteplicità.

Grazie alla proposizione precedente, ha senso definire il modulo di una quaterna di punti distinti come $j(P_1, P_2, P_3, P_4) := j(\text{Bir}(P_1, P_2, P_3, P_4))$. Dato che il birapporto non dipende dalla scelta di coordinate omogenee, questo è un invariante proiettivo.

Siano ora r_1, \dots, r_4 quattro rette distinte di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, concorrenti nello stesso punto O . Se ℓ è una retta di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ che non passa per O , intersecherà r_1, \dots, r_4 in quattro punti distinti P_1, \dots, P_4 . Identificando ℓ con $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$, ha senso considerare il birapporto di P_1, \dots, P_4 , e si verifica che $\text{Bir}(P_1, \dots, P_4)$ non dipende dalla scelta di ℓ . In particolare, ha senso definire il birapporto e il modulo delle rette come

$$\begin{aligned} \text{Bir}(r_1, r_2, r_3, r_4) &:= \text{Bir}(P_1, P_2, P_3, P_4); \\ j(r_1, r_2, r_3, r_4) &:= j(P_1, P_2, P_3, P_4). \end{aligned}$$

Si osserva facilmente che anche il modulo di rette è un invariante proiettivo: se $\varphi : \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ è una proiettività che manda ℓ, r_i, P_i in ℓ', r'_i, P'_i per $i = 1, \dots, 4$, allora $P'_i = r'_i \cap \ell'$ e $\varphi|_\ell$ è un isomorfismo proiettivo tra ℓ e ℓ' .

Dato che in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ il duale dei punti sono le rette, il birapporto di rette può essere definito anche come birapporto dei punti corrispondenti in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})^*$: si verifica che le due definizioni sono equivalenti. Questo consente di dedurre il seguente corollario dalla proprietà fondamentale del birapporto:

Corollario 1.1.9. Date due quaterne di rette distinte e concorrenti r_1, \dots, r_4 e s_1, \dots, s_4 di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, allora esiste una proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ che manda $r_i \mapsto s_i$ per $i = 1, \dots, 4$ se e solo se $\text{Bir}(r_1, \dots, r_4) = \text{Bir}(s_1, \dots, s_4)$.

Anche in questo caso ci avanza un grado di libertà, che possiamo usare per mandare una retta non passante per $r_1 \cap r_2$ in una retta non passante per $s_1 \cap s_2$ a nostra scelta.

1.2 Polinomi

1.2.1 Lemma di Gauss

Proposizione 1.2.1. Se A è un dominio a fattorizzazione unica (UFD), allora anche l'anello di polinomi $A[x_1, \dots, x_n]$ è un UFD.

Definizione 1.2.2. Se R è un UFD, un polinomio $p(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i \in R[x]$ si dice *primitivo* se $\gcd(a_0, \dots, a_d) = 1$.

Osserviamo che nella precedente definizione R può essere a sua volta un anello di polinomi. Questo succede per esempio nel seguente lemma:

Lemma 1.2.3 (Gauss). Sia $p \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y] = \mathbb{K}[\mathbf{x}, y]$ un polinomio tale che $\deg_y(p) \geq 1$. Allora p è irriducibile su $\mathbb{K}[\mathbf{x}, y]$ se e solo se p è irriducibile in $\mathbb{K}(\mathbf{x})[y]$ e primitivo in $\mathbb{K}[\mathbf{x}][y]$.

Dimostrazione omessa.

Vediamo come applicare il lemma di Gauss in un paio di esempi:

Esempio 1.2.4. Il polinomio $p = x^3 - zy^7$ è irriducibile in $\mathbb{K}[x, y, z]$: infatti p è irriducibile in $\mathbb{K}(x, y)[z]$ (è di grado 1 in z), ed è primitivo rispetto a z .

Esempio 1.2.5. Sia $p(x, y) = y^2 - f(x)$ e supponiamo che $f(x)$ abbia un fattore irriducibile con molteplicità dispari: allora p è irriducibile in $\mathbb{K}[x, y]$.

Dimostrazione. Il polinomio p è primitivo e ha grado 2 rispetto a y , quindi basta verificare che sia irriducibile in $\mathbb{K}(x)[y]$. Supponiamo per assurdo che p sia riducibile in $\mathbb{K}(x)[y]$: in particolare $f(x)$ ammetterà radice quadrata in $\mathbb{K}(x)$, quindi $\exists a, b \in \mathbb{K}[x]$ (wlog $\gcd(a, b) = 1$) tali che

$$\left(\frac{a(x)}{b(x)}\right)^2 = f(x) \quad \Rightarrow \quad a(x)^2 = b(x)^2 f(x),$$

da cui concludiamo che i fattori irriducibili di f hanno tutti molteplicità pari, che è assurdo. \square

Esercizio 1.2.6. Se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, allora l'Esempio 1.2.5 è un se e solo se.

Soluzione. Supponiamo $f = c \prod f_i^2$, con f_i fattori irriducibili e $c \in \mathbb{K}^*$: se c ammette radice quadrata $c_1 \in \mathbb{K}$ (cosa sempre vera se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$), allora $p(x, y) = (y - c_1 \prod f_i(x))(y + c_1 \prod f_i(x))$. \square

1.2.2 Principio d'identità dei polinomi

Definizione 1.2.7. Se $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, definiamo l'*insieme algebrico*¹ associato a f come

$$V(f) = \{\mathbf{a} \in \mathbb{A}^n : f(\mathbf{a}) = 0\}.$$

Teorema 1.2.8 (principio d'identità dei polinomi). Sia \mathbb{K} un campo infinito e $p \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tale che $V(p) = \mathbb{A}^n$: allora $p = 0$.

Dimostrazione. Per induzione.

$n = 1$: Applicare ripetutamente il teorema di Ruffini.

$n \rightarrow n+1$: Sia $p \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y]$ tale che $V(p) = \mathbb{A}^{n+1}$. Supponiamo che la variabile y compaia nella sua scrittura (altrimenti applichiamo l'ipotesi induttiva e concludiamo):

$$p(\mathbf{x}, y) = \sum_{i=0}^d a_i(\mathbf{x})y^i, \quad a_d \neq 0.$$

Applicando l'ipotesi induttiva $\exists \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{A}^n : a_d(\bar{\mathbf{x}}) \neq 0$, da cui $\bar{p}(y) := p(\bar{\mathbf{x}}, y) \neq 0$, e applicando ancora l'ipotesi induttiva si otterrebbe $a_d = 0$, che è assurdo. \square

1.2.3 Anelli graduati e polinomi omogenei

Definizione 1.2.9. Un *anello graduato* è un gruppo abeliano della forma

$$R = \bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d,$$

dove gli R_d sono gruppi abeliani, dotato di un prodotto che gli conferisce struttura di anello, tale che $\forall i, j \geq 0 \quad R_i R_j \subseteq R_{i+j}$. Gli elementi di $R_n \setminus \{0\}$ sono detti *omogenei* di grado n .

Esercizio 1.2.10. Sia R un anello graduato che è anche un dominio, sia $F \neq 0$ un elemento omogeneo, e siano $G, H \in R$ tali che $F = GH$. Allora anche G e H sono elementi omogenei.

Soluzione. Siano

$$G = \sum_{i=m_1}^{m_2} g_i, \quad H = \sum_{j=n_1}^{n_2} h_j, \quad g_i \in R_i, \quad h_j \in R_j,$$

con $g_{m_1}, g_{m_2}, h_{n_1}, h_{n_2} \neq 0$. In particolare $(GH)_{m_1+n_1} = g_{m_1}h_{n_1} \neq 0$ e $(GH)_{m_2+n_2} = g_{m_2}h_{n_2} \neq 0$, da cui $m_1 = m_2$ e $n_1 = n_2$. \square

Definizione 1.2.11. Se R è un anello graduato e $I \subseteq R$ è un suo ideale, denotiamo $I_d := I \cap R_d$. Si osserva che in generale vale $\bigoplus_{d \geq 0} I_d \subseteq I$, e diremo che I è un *ideale omogeneo* se vale l'uguaglianza.

Osservazione 1.2.12. Se R è un anello graduato e $I \subseteq R$ è un suo ideale omogeneo, allora l'anello quoziente $R/I = \bigoplus_{d \geq 0} (R_d/I_d)$ eredita la struttura di anello graduato da R .

Esercizio 1.2.13. Se R è un anello graduato e I è un suo ideale, allora le seguenti proprietà sono equivalenti:

¹Alcuni autori parlano già di varietà algebriche, mentre altri utilizzano questa nomenclatura solo per gli insiemi algebrici irriducibili, che saranno introdotti nel Capitolo 3. Noi ci atteniamo alla nomenclatura utilizzata durante il corso.

- (i) I è un ideale omogeneo.
- (ii) I è generato da polinomi omogenei.
- (iii) Se $f = \sum_{d=0}^n f_d \in I$, dove $f_d \in R_d$, allora $f_d \in I_d$ per ogni d .

Soluzione.

(i→ii) Sia $S := \bigcup_{d \geq 0} I_d$ e $J := (f : f \in S)$: si tratta di un insieme di polinomi omogenei, e si verifica facilmente che $I = \bigoplus_{d \geq 0} I_d \subseteq J \subseteq I$, da cui $I = J$.

(ii→iii) $I = (g_1, \dots, g_r)$ con $g_i \in R_{s_i}$. Se $f \in I$, allora $f = \sum_{i=1}^r p^{(i)} g_i$, dove $p^{(i)} = \sum_{j=0}^{t_i} p_j^{(i)}$ con $p_j^{(i)} \in R_j$. In particolare, se $f = \sum_{d=0}^n f_d$ con $f_d \in R_d$, si avrà $f_d = \sum_{i=1}^r p_{d-s_i}^{(i)} g_i \in I_d$ per ogni d .

(iii→i) Se $f = \sum_{d=0}^n f_d \in I$ con $f_d \in R_d$, allora $f_d \in I_d$ e quindi $f \in \bigoplus_{d \geq 0} I_d$. \square

Lemma 1.2.14. Sia R un anello graduato e $I \subseteq R$ un ideale omogeneo. Allora $J \in \text{Spec}(R)$ se e solo se $\forall f, g$ omogenei tali che $fg \in J$ vale $f \in J$ oppure $g \in J$.

Dimostrazione. La freccia (\Rightarrow) è ovvia. Supponiamo quindi $J \notin \text{Spec}(R)$ e passiamo al quoziente $\bar{R} := R/J$ (vedi Osservazione 1.2.12): vogliamo esibire due elementi omogenei non nulli di \bar{R} , tali che il loro prodotto sia nullo. Sicuramente per ipotesi $\exists f, g \neq 0$ tali che $fg = 0$. Dato che $f \neq 0$, possiamo scrivere $f = \sum_{i=a}^r f_i$ dove $f_i \in \bar{R}_i$ e $f_a \neq 0$, e analogamente $g = \sum_{j=b}^s g_j$. Poiché $fg = 0$, si osserva che $f_a g_b = 0$, quindi f_a e g_b sono gli elementi cercati. \square

Si può verificare (non l'abbiamo fatto ma risulta utile) che il radicale di un ideale omogeneo è ancora omogeneo.

Polinomi omogenei

Un esempio di anello graduato è dato dall'anello dei polinomi

$$\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d,$$

dove $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$ è il gruppo dei polinomi omogenei di grado d (più lo zero), e il prodotto è quello che ci si aspetta. Dato che in questo caso $A_0 = \mathbb{K}$ è un campo, possiamo parlare di *algebra graduata*.

Sottolineiamo il fatto che un polinomio in $\mathbb{K}[\mathbf{x}]_d$ può anche essere il polinomio nullo; quando escluderemo questa possibilità, parleremo esplicitamente di polinomio omogeneo di grado d , oppure scriveremo $\mathbb{K}[\mathbf{x}]_d \setminus \{0\}$.

Definizione 1.2.15. L'ideale massimale omogeneo $(x_0, \dots, x_n) \subsetneq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ contiene tutti gli ideali omogenei propri, ed è detto *ideale irrilevante*.

Definizione 1.2.16. Definiamo la mappa di *deomogeneizzazione* come

$$D : \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \quad | \quad F(x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto F(1, x_1, \dots, x_n).$$

Definiamo la mappa di *omogeneizzazione* come

$$H : \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] \quad \left| \quad \begin{array}{l} 0 \mapsto 0 \\ f(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_0^d f\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right), \quad d = \deg f. \end{array} \right.$$

Quando non diversamente specificato, denoteremo con lettere maiuscole i polinomi omogenei in $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$, e con quelle minuscole quelli generici in $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Osservazione 1.2.17. Si verificano facilmente le seguenti proprietà:

- (i) D è un omomorfismo di \mathbb{K} -algebre, mentre H è solo una mappa moltiplicativa.
- (ii) $H(f)$ è un polinomio omogeneo con lo stesso grado di f .
- (iii) Se $f \neq 0$, allora $x_0 \nmid H(f)$.
- (iv) $D \circ H = \text{Id}$.
- (v) Se $F = x_0^m F_1$ con $x_0 \nmid F_1$, allora $D(F) = D(F_1)$, $\deg(D(F)) = \deg(F_1)$ e $H \circ D(F) = F_1$.

Proposizione 1.2.18. Se $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ è irriducibile, allora $F = H(f)$ è irriducibile.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo $F = GH$ con G, H fattori non invertibili. Per le proprietà precedenti G e H saranno omogenei e $x_0 \nmid F$, da cui $x_0 \nmid G, H$; in particolare $D(G)$ e $D(H)$ saranno non invertibili. Inoltre vale $f = D(F) = D(GH) = D(G)D(H)$, dunque f sarebbe riducibile, che è assurdo. \square

Proposizione 1.2.19. Se $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ è un polinomio omogeneo irriducibile, tale che $x_0 \nmid F$, allora $f = D(F)$ è irriducibile.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo $f = gh$ con g, h fattori non invertibili: l'ipotesi $x_0 \nmid F$ implica $F = H(f) = H(g)H(h)$, ma $H(g), H(h)$ sono ancora non invertibili, quindi F sarebbe riducibile, che è assurdo. \square

Osservazione 1.2.20. Se $F = x_0^m G$ con $x_0 \nmid G$, fattorizziamo in irriducibili $g = D(G) = D(F) = cp_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$: grazie alle proposizioni precedenti, F si fattorizza come $F = cx_0^m p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, dove $P_i = H(p_i)$.

Osservazione 1.2.21. Se $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ è un polinomio omogeneo di grado d , allora

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}^* \quad F(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^d F(\mathbf{x}).$$

In particolare, ha senso chiedersi se $[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ è una radice di F (invece non ha senso chiedersi quale valore venga assunto, se diverso da zero).

Definizione 1.2.22. Se $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ è un polinomio omogeneo di grado d , il suo *insieme algebrico proiettivo* associato è

$$V_{\mathbb{P}^n}(F) := \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) : F(x_0, \dots, x_n) = 0\}.$$

In assenza di ambiguità, indicheremo spesso $V(F)$ o $V_{\mathbb{P}}(F)$ al posto di $V_{\mathbb{P}^n}(F)$.

Proposizione 1.2.23. Se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, i polinomi omogenei in $\mathbb{K}[x, y]$ si possono sempre decomporre in fattori lineari.

Dimostrazione. Sia $F = x^m G \in \mathbb{K}[x, y]_d$, con $x \nmid G$, sia $g = D(G) = D(F) \in \mathbb{K}[y]$: essendo \mathbb{K} algebricamente chiuso, possiamo fattorizzare $g = \prod_{i=1}^k (b_i y + a_i)^{\alpha_i}$, e di conseguenza (vedi l'Osservazione 1.2.20) $F = x^m \prod (a_i x + b_i y)^{\alpha_i}$. \square

Definizione 1.2.24. Alla luce della Proposizione 1.2.23, se $F \in \mathbb{K}[x, y]$ è omogeneo e $[b_i, -a_i]$ è una sua radice, allora possiamo definirne la *molteplicità* come α_i dato dalla decomposizione in potenze di fattori lineari distinti (basta passare alla chiusura algebrica).

Teorema 1.2.25 (formula di Eulero). Sia $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$: allora vale la formula

$$d \cdot F(\mathbf{x}) = \nabla F(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}.$$

Hint. Dimostrare la formula nel caso dei monomi, quindi sistemare per linearità.

1.2.4 Risultante

Definizione 1.2.26. Sia R un UFD, siano $f(y) = \sum a_i y^i$, $g(y) = \sum b_j y^j \in R[y]$ polinomi univariati di gradi positivi m e n . La *matrice di Sylvester* associata a f e g è

$$S(f, g) := \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_m & & \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & a_0 & a_1 & \cdots & a_m \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n & & \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & b_0 & b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \in R^{(m+n) \times (m+n)}.$$

Il *risultante* di f e g è $\text{Ris}(f, g) := \det(S(f, g)) \in R$.

Nel caso in cui R sia a sua volta un anello di polinomi (e quindi $f, g \in A[\mathbf{x}, y]$), scriveremo $S_y(f, g)$ e $\text{Ris}_y(f, g)$ per indicare che le definizioni precedenti sono date rispetto alla variabile y .

Elenchiamo nel seguito alcune importanti proprietà del risultante.

Proposizione 1.2.27. Siano $f, g \in R[y]$. Allora $\text{Ris}(f, g) = 0$ se e solo se f e g hanno una componente comune di grado positivo.

Dimostrazione omessa.

Proposizione 1.2.28 (proprietà di specializzazione). Siano $f, g \in A[\mathbf{x}, y]$ della forma

$$f(\mathbf{x}, y) = \sum_{i=0}^m a_i(\mathbf{x}) y^i, \quad g(\mathbf{x}, y) = \sum_{j=0}^n b_j(\mathbf{x}) y^j, \quad a_m, b_n \neq 0,$$

sia $\mathbf{a} \in A^n$ tale che $a_m(\mathbf{a}), b_n(\mathbf{a}) \neq 0$. Allora $\text{Ris}_y(f, g)(\mathbf{a}) = \text{Ris}(f(\mathbf{a}, y), g(\mathbf{a}, y))$.

Dimostrazione omessa.

Proposizione 1.2.29 (proprietà di omogeneità). Siano $F, G \in A[\mathbf{x}, y]$ polinomi omogenei di grado m e n , della forma

$$F(\mathbf{x}, y) = \sum_{i=0}^m a_i(\mathbf{x}) y^i, \quad G(\mathbf{x}, y) = \sum_{j=0}^n b_j(\mathbf{x}) y^j, \quad a_m, b_n \neq 0 :$$

allora $\text{Ris}_y(F, G) \in A[\mathbf{x}]_{mn}$.

Dimostrazione. Osserviamo che $a_i \in A[\mathbf{x}]_{m-i}$ e $b_j \in A[\mathbf{x}]_{n-j}$ per tutti gli i e j . Per definizione $\text{Ris}_y(F, G) \in A[\mathbf{x}]$ sarà il determinante di

$$S_y(F, G)(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_m & & \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & a_0 & a_1 & \cdots & a_m \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n & & \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & b_0 & b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}.$$

Introduciamo una variabile ausiliaria t ed eseguiamo le seguenti operazioni:

- per $i = 1, \dots, n$, moltiplichiamo la riga i -esima per t^{n-i} ;
- per $j = 1, \dots, m$, moltiplichiamo la riga $n+j$ -esima per t^{m-j} .

La matrice $\tilde{S}(\mathbf{x}, t)$ così ottenuta avrà colonne omogenee di grado $m+n-k$ per $k = 1, \dots, m+n$, dunque

$$t^{\frac{n(n-1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2}} \text{Ris}_y(F, G)(\mathbf{x}) = \det(\tilde{S}(\mathbf{x}, t)) \in A[\mathbf{x}, t]_D,$$

dove $D = \frac{(m+n)(m+n-1)}{2}$. In particolare, si avrà

$$\text{Ris}_y(F, G)(\mathbf{x}) \in A[\mathbf{x}]_N, \quad N = D - \frac{n(n-1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2} = mn. \quad \square$$

1.3 Miscellanea

1.3.1 Anelli noetheriani

Definizione 1.3.1. Un anello R si dice *noetheriano* se soddisfa la *ascending chain condition* (ACC), cioè se ogni catena ascendente di ideali di R è stazionaria. Equivalentemente, R è un anello noetheriano se ogni suo ideale è finitamente generato.

La proprietà di essere noetheriano viene ereditata dagli anelli di polinomi:

Teorema 1.3.2 (della base di Hilbert). Se R è un anello noetheriano, allora $R[x]$ è ancora un anello noetheriano.

Dimostrazione omissa.

Il teorema della base di Hilbert si estende immediatamente al caso di $R[x_1, \dots, x_n]$.

1.3.2 Teoria delle categorie

Diamo solo un accenno delle prime definizioni di teoria delle categorie, che saranno richiamate per essere utilizzate per un paio di risultati.

Definizione 1.3.3. Una *categoria* $\underline{\mathcal{A}}$ consiste di:

- Una classe di elementi $\text{Ob}(\underline{\mathcal{A}})$ detti *oggetti*.
- Una classe di elementi $\text{Mor}(\underline{\mathcal{A}})$ chiamati *morfismi*. Ogni morfismo f ha associati un oggetto sorgente A e un oggetto destinazione B , e si indica come $f : A \rightarrow B$. Indichiamo con $\text{Mor}(A, B)$ la classe dei morfismi da A a B .

- Un'operazione binaria $\text{Mor}(B, C) \times \text{Mor}(A, B) \rightarrow \text{Mor}(A, C)$ per ogni terna di oggetti A, B, C , che associa ad una coppia di morfismi $f : B \rightarrow C$ e $g : A \rightarrow B$ un morfismo $f \circ g : A \rightarrow C$. La composizione deve soddisfare la proprietà associativa, e per ogni oggetto A deve esistere il morfismo identità (rispetto alla composizione) $\text{Id}_A : A \rightarrow A$.

Un morfismo $f : A \rightarrow B$ è un *isomorfismo* se $\exists g : B \rightarrow A$ tale che $f \circ g = \text{Id}_B$ e $g \circ f = \text{Id}_A$; in tal caso diremo che A e B sono *isomorfi*, o in simboli $A \cong B$.

Dagli assiomi si può dedurre che ad ogni oggetto è associato un solo morfismo identità. Esempi di categoria includono:

- Gli insiemi e le funzioni tra essi.
- Gli insiemi e le relazioni d'ordine.
- I gruppi (o gli anelli, o le \mathbb{K} -algebre...) e i loro omomorfismi.
- Gli spazi vettoriali e le funzioni lineari.
- Gli spazi topologici e le funzioni continue.

Si osservi in particolare che in generale non è necessario che i morfismi siano effettivamente funzioni, ma basta che soddisfino proprietà formalmente simili.

Definizione 1.3.4. Date due categorie $\underline{\mathcal{A}}, \underline{\mathcal{B}}$, un *funtore covariante* F da $\underline{\mathcal{A}}$ a $\underline{\mathcal{B}}$ è una mappa di categorie che

- Ad ogni $A \in \underline{\mathcal{A}}$ associa un oggetto $B \in \underline{\mathcal{B}}$.
- Ad ogni morfismo $f : A_1 \rightarrow A_2$ di $\underline{\mathcal{A}}$ associa un morfismo $F(f) : F(A_1) \rightarrow F(A_2)$.

Si chiede inoltre che i funtori si comportino bene rispetto al morfismo identità e alla composizione di morfismi.

Un *funtore controvariante* è un funtore che “gira le frecce”, cioè ad un morfismo $f : A_1 \rightarrow A_2$ associa un morfismo $F(f) : F(A_2) \rightarrow F(A_1)$; per il resto è definito allo stesso modo.

Definizione 1.3.5. Siano $\underline{\mathcal{A}}$ e $\underline{\mathcal{B}}$ due categorie, siano $F_1, F_2 : \underline{\mathcal{A}} \rightarrow \underline{\mathcal{B}}$ due funtori. Sia $\eta : F_1 \rightarrow F_2$ una mappa che associa ad ogni $A \in \text{Ob}(\underline{\mathcal{A}})$ un morfismo $\eta_A \in \text{Mor}_{\underline{\mathcal{B}}}(F_1(A), F_2(A))$: diciamo che η è una *trasformazione naturale* se, $\forall \varphi \in \text{Mor}_{\underline{\mathcal{A}}}(A, A')$ il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} F_1(A) & \xrightarrow{\eta_A} & F_2(A) \\ F_1\varphi \downarrow & & \downarrow F_2\varphi \\ F_1(A') & \xrightarrow{\eta_{A'}} & F_2(A') \end{array}$$

Diciamo inoltre che η è un'*equivalenza naturale* se η_A è un isomorfismo per ogni $A \in \text{Ob}(\underline{\mathcal{A}})$ e le rispettive inverse ξ_B fanno commutare il diagramma opposto.

Definizione 1.3.6. Siano $\underline{\mathcal{A}}$ e $\underline{\mathcal{B}}$ due categorie. Un funtore $F : \underline{\mathcal{A}} \rightarrow \underline{\mathcal{B}}$ è un'*equivalenza di categorie* se $\exists G : \underline{\mathcal{B}} \rightarrow \underline{\mathcal{A}}$ funtore tale che $\exists \eta : F \circ G \rightarrow \text{Id}_{\underline{\mathcal{B}}}$ e $\exists \xi : G \circ F \rightarrow \text{Id}_{\underline{\mathcal{A}}}$ equivalenze naturali.

Moralmente, se due categorie sono equivalenti, le proprietà degli oggetti di una categoria possono essere sempre ricavate dagli oggetti corrispondenti nell'altra categoria.

Esempio 1.3.7. Sia $\text{Vect}_{\mathbb{K}}$ la categoria degli spazi vettoriali a dimensione finita, dove i morfismi sono le applicazioni lineari. Consideriamo il funtore controvariante duale $F : \text{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{K}}$ tale che

$$\begin{aligned} \forall V \in \text{Vect}_{\mathbb{K}} \quad & F(V) = V^* \\ \forall \varphi : V \rightarrow W \quad & F(\varphi) = \varphi^* : \quad \forall \alpha \in W^* \quad \varphi^*(\alpha) = \alpha \circ \varphi \end{aligned}$$

Consideriamo analogamente il funtore covariante biduale $F' := F \circ F : \text{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{K}}$: si può verificare che F' è un'equivalenza di categorie.

Definizione 1.3.8. Un funtore $F : \underline{\mathcal{A}} \rightarrow \underline{\mathcal{B}}$ si dice *pienamente fedele* se la mappa che definisce da $\text{Mor}(\underline{\mathcal{A}})$ a $\text{Mor}(\underline{\mathcal{B}})$ è biiettiva. Diciamo inoltre che F è *essenzialmente suriettivo* se per ogni $B \in \underline{\mathcal{B}}$ esiste un oggetto $A \in \underline{\mathcal{A}}$ tale che $B \cong F(A)$.

Presentiamo un criterio per verificare se due categorie sono equivalenti:

Lemma 1.3.9. Sia $F : \underline{\mathcal{A}} \rightarrow \underline{\mathcal{B}}$ un funtore: allora F è un'equivalenza di categorie se e solo se è pienamente fedele ed essenzialmente suriettivo.

Dimostrazione omessa.

1.3.3 Trucchetti

Lemma 1.3.10. Sia \mathbb{K} un campo infinito, siano $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{K}[\mathbf{x}; y] \setminus \{0\}$ polinomi generici in $n+1$ variabili. Allora esiste sempre un'affinità φ di \mathbb{A}^{n+1} tale che $\varphi(f_1), \dots, \varphi(f_r)$ sono monici in y , cioè $\deg_y(f_i) = \deg(f_i)$.

Dimostrazione. Siano $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_j$ le parti omogenee di grado massimo di f_1, \dots, f_j . Per il principio d'identità dei polinomi, $\exists P \in \mathbb{A}^{n+1} \setminus V(\tilde{f}_1 \cdots \tilde{f}_r)$. Sia φ una mappa lineare (in particolare un'affinità) tale che $\varphi(P) = (\mathbf{0}; 1)$:

□

Capitolo 2

Ipersuperfici

2.1 Prime definizioni

Definizione 2.1.1. Consideriamo l'insieme dei polinomi in $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ di grado positivo, quotientato rispetto alla relazione d'equivalenza data da $f \sim g \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^* : g = \lambda f$: i suoi elementi $\mathcal{I} = [f]$ sono detti *ipersuperfici affini*. Elenchiamo di seguito alcune definizioni relative ad un'ipersuperficie affine $\mathcal{I} = [f]$.

- Ogni rappresentante di \mathcal{I} è detto *equazione dell'ipersuperficie*.
- Il *supporto* di \mathcal{I} è $V(\mathcal{I}) := V(f)$ (non dipende dalla scelta del rappresentante).
- Il *grado* di \mathcal{I} è quello di f .
- \mathcal{I} si dice *irriducibile* se lo è f .
- Se $f = cf_1^{m_1} \dots f_s^{m_s}$ è una fattorizzazione in fattori irriducibili distinti, denoteremo

$$\mathcal{I} = m_1 \mathcal{I}_1 + \dots + m_s \mathcal{I}_s$$

e diremo che $\mathcal{I}_k = [f_k]$ è una *componente irriducibile* di \mathcal{I} con molteplicità m_k ; se $m_k > 1$, si dirà che \mathcal{I}_k è una *componente multipla*. Un'ipersuperficie senza componenti multiple è detta *ridotta*. Si osserva infine che $V(f) = V(f_1) \cup \dots \cup V(f_s)$.

Talvolta, per abuso di notazione, si scriverà \mathcal{I} intendendo $V(\mathcal{I})$ (per esempio, $P \in \mathcal{I}$ con $P \in \mathbb{A}^n$ significherà $P \in V(\mathcal{I})$).

Osservazione 2.1.2. Si osserva che vale $V(fg) = V(f) \cup V(g)$ per ogni $f, g \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]$. In particolare, se $f = cf_1^{m_1} \dots f_s^{m_s}$ come sopra, si ha $V(f) = V(f_1) \cup \dots \cup V(f_s)$.

Osservazione 2.1.3. Per il principio d'identità dei polinomi, se \mathbb{K} è un campo infinito e $f \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ un polinomio, allora $V(f) = \mathbb{A}^n$ se e solo se $f = 0$; in particolare, il supporto di un'ipersuperficie affine non coincide mai con \mathbb{A}^n .

Osservazione 2.1.4. Osserviamo che il supporto non determina l'ipersuperficie affine: per esempio $[x] \neq [x^2]$ in $\mathbb{R}[x]$, tuttavia $V(x) = V(x^2) = \{0\}$. In realtà, se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, c'è una corrispondenza biunivoca tra insiemi algebrici associati a polinomi e ipersuperfici ridotte (lo vedremo più avanti).

Esempio 2.1.5. Consideriamo il polinomio $f = x^3(x^2 - y^2) \in \mathbb{R}[x, y]$: se $\mathcal{I} = [f]$, $\ell = [x]$, $r = [x - y]$ e $s = [x + y]$, possiamo scrivere $\mathcal{I} = 3\ell + r + s$.

Definizione 2.1.6. Consideriamo l'insieme dei polinomi omogenei in $\mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ di grado positivo, quozientato rispetto alla solita relazione d'equivalenza: i suoi elementi $\mathcal{I} = [F]$ sono detti *ipersuperfici proiettive*. Tutte le definizioni precedenti si applicano con modifiche minime: la più importante è che il *supporto* dell'ipersuperficie proiettiva sarà la varietà proiettiva $V_{\mathbb{P}}(F)$. L'Esercizio 1.2.10 garantisce che le componenti irriducibili di ipersuperfici proiettive siano ancora ipersuperfici proiettive.

Se $n = 2$ allora le rette affini/proiettive possono essere scritte come luogo di zeri di un polinomio di primo grado (omogeneo nel caso proiettivo): potremo dunque vederle come ipersuperfici. Con abuso di notazione, denoteremo con $L(P, Q)$ sia la retta passante per P e Q , sia la sua ipersuperficie associata: il significato sarà chiaro dal contesto.

Definizione 2.1.7. Diamo un po' di nomenclatura.

- Un'ipersuperficie affine/proiettiva con $n = 2$ è detta *curva affine/proiettiva piana*.
- Un'ipersuperficie affine/proiettiva con $n = 3$ è detta *superficie affine/proiettiva*.
- Le ipersuperfici (affini o proiettive) di grado 2, 3, 4 vengono dette rispettivamente *quadriche*, *cubiche*, *quartiche*. Le quadriche di \mathbb{A}^2 o di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ sono anche dette *coniche*.

2.1.1 Parte affine e chiusura proiettiva

Definizione 2.1.8. Se (U_0, j_0) è la carta affine standard di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ e $\mathcal{I} = [F]$ è un'ipersuperficie proiettiva di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, chiamiamo *parte affine* di \mathcal{I} nella carta U_0 l'ipersuperficie affine $\mathcal{I} \cap U_0 := [D(F)]$ di \mathbb{A}^n . La definizione si può estendere in modo ovvio a qualunque carta affine (eventualmente applicando un cambio di variabili per deomogeneizzare rispetto ad un opportuno iperpiano).

Osservazione 2.1.9. Si osserva facilmente che $V(\mathcal{I} \cap U_0) = V(\mathcal{I}) \cap U_0$, quindi la notazione utilizzata è coerente. Si osserva inoltre che $\deg(\mathcal{I} \cap U_0) = \deg(\mathcal{I})$ se e solo se $x_0 \nmid F$.

Definizione 2.1.10. Se $\mathcal{I} = [f]$ è un'ipersuperficie affine di \mathbb{A}^n , chiamiamo *chiusura proiettiva* di \mathcal{I} l'ipersuperficie proiettiva $\overline{\mathcal{I}} := [H(f)]$ di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. I punti di $\overline{\mathcal{I}} \cap H_0$ sono detti *punti impropri* o *punti all'infinito*.

Osservazione 2.1.11. La chiusura proiettiva conserva sempre il grado; inoltre da $D \circ H = \text{Id}$ si deduce che $\overline{\mathcal{I}} \cap U_0 = \mathcal{I}$ per ogni ipersuperficie affine \mathcal{I} .

Analogamente, se $\mathcal{I} = [F]$ è un'ipersuperficie proiettiva e $x_0 \nmid F$, allora $\overline{\mathcal{I} \cap U_0} = \mathcal{I}$. In quest'ultimo caso si avrà inoltre $\mathcal{I} \cap H_0 = \mathcal{J}$, dove \mathcal{J} è un'ipersuperficie proiettiva di H_0 (che è isomorfo a $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$) con lo stesso grado di \mathcal{I} . In particolare, se $n = 2$, allora \mathcal{I} avrà un numero finito di punti impropri ($\mathcal{J} = [G]$ con G omogeneo in due variabili).

2.1.2 Equivalenza affine e proiettiva di ipersuperfici

Definizione 2.1.12. Se $\mathcal{I} = [f]$ è un'ipersuperficie affine di \mathbb{A}^n e $\varphi : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ è un'affinità, denotiamo con $\varphi(\mathcal{I})$ l'ipersuperficie affine di equazione $\varphi(f) := f \circ \varphi^{-1}$, e si dirà che \mathcal{I} e $\varphi(\mathcal{I})$ sono due ipersuperfici *affinamente equivalenti*.

In modo analogo possiamo definire la nozione di *equivalenza proiettiva* di due ipersuperfici proiettive, tramite una proiettività.

Osservazione 2.1.13. Si verificano le seguenti proprietà:

- Il grado, il numero e la molteplicità delle componenti irriducibili di un'ipersuperficie sono invarianti affini/proiettivi.
- Se \mathcal{I} è un'ipersuperficie affine di \mathbb{A}^n e φ un'affinità di \mathbb{A}^n , allora $\overline{\varphi(\mathcal{I})} = \overline{\varphi}(\overline{\mathcal{I}})$, dove $\overline{\varphi} : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ è la proiettività associata a φ tramite la carta affine standard.
- Se \mathcal{I} è un'ipersuperficie proiettiva di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, tale che $[x_0]$ non sia una sua componente irriducibile, e φ è una proiettività che lascia invariato U_0 , allora $\varphi(\mathcal{I} \cap U_0) = \varphi(\mathcal{I}) \cap U_0$ e $\varphi(\mathcal{I} \cap H_0) = \varphi(\mathcal{I}) \cap H_0$ (con qualche abuso di notazione).

Nella pratica, praticamente tutto ciò che riguarderà lo studio di ipersuperfici sarà invariante per affinità e proiettività.

2.2 Studio locale

In questa sezione per semplicità considereremo sempre $\#\mathbb{K} = \infty^1$.

Definizione 2.2.1. Sia $\mathcal{I} = [f]$ un'ipersuperficie affine, sia $P \in \mathbb{A}^n$ e sia $r = \{P + t\mathbf{v} : t \in \mathbb{K}\}$ con $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ una retta passante per P . Consideriamo l'intersezione $\mathcal{I} \cap r$ ottenuta tramite l'equazione

$$g(t) := f(P + t\mathbf{v}) \in \mathbb{K}[t].$$

Definiamo la *molteplicità di intersezione* di \mathcal{I} e r nel punto P come

$$I(\mathcal{I}, r, P) := \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \text{ non è una radice di } g; \\ m & \text{se } 0 \text{ è una radice di } g \text{ con molteplicità } m; \\ \infty & \text{se } g = 0. \end{cases}$$

Si può dimostrare che questa definizione non dipende dalla parametrizzazione della retta, ed è un invariante affine. Diremo che r è una retta *tangente* a \mathcal{I} in P se $I(\mathcal{I}, r, P) \geq 2$.

Osserviamo che $I(\mathcal{I}, r, P) > 0$ se e solo se $P \in \mathcal{I}$; inoltre $I(\mathcal{I}, r, P) = \infty$ se e solo se $r \subseteq \mathcal{I}$.

Osservazione 2.2.2. Sia $\mathcal{I} = [f]$, $P = (p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{I}$ e $r = \{P + t\mathbf{v}\}$ con $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \neq \mathbf{0}$; sia $g(t) = f(P + t\mathbf{v})$ come in precedenza. Osserviamo che $t \mid g(t)$; inoltre r è tangente a \mathcal{I} in P se e solo se $t^2 \mid g(t)$. Ne deduciamo che la condizione di tangenza è equivalente a $g'(0) = 0$, cioè

$$\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = 0,$$

o sinteticamente $\mathbf{v} \cdot \nabla f(P) = 0$.

Definizione 2.2.3. Se $P \in \mathcal{I}$, l'unione delle rette tangenti a \mathcal{I} in $P = (p_1, \dots, p_n)$ prende il nome di *spazio tangente* a \mathcal{I} in P , e si verifica essere l'ipersuperficie affine $T_P(\mathcal{I})$ definita dall'equazione

$$\sum_{i=1}^n (x_i - p_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = 0,$$

o sinteticamente $(\mathbf{x} - P) \cdot \nabla f(P) = 0$. Talvolta come spazio tangente intenderemo il solo spazio vettoriale, cioè $T_{\mathcal{I}, P} := V(\nabla f(P) \cdot \mathbf{x})$.

¹Nel caso dei campi finiti, alcune delle definizioni che seguiranno non saranno più consistenti, e non mi è chiaro come dovrebbero essere corrette.

Diremo che un punto $P \in \mathcal{I}$ è *singolare* se $\nabla f(P) = 0$ (o, equivalentemente, se tutte le rette passanti per P sono tangenti a \mathcal{I} in P), altrimenti il punto è detto *liscio* o *semplice*. Un'ipersuperficie è detta *liscia* se tutti i suoi punti sono lisci, altrimenti è detta *singolare*.

Un iperpiano affine è detto *tangente* a \mathcal{I} in P se è contenuto in $T_P(\mathcal{I})$: se P è liscio, l'unico iperpiano tangente in P è $T_P(\mathcal{I})$ stesso; se P è singolare, ogni iperpiano passante per P è tangente.

Esempio 2.2.4. Se $\mathcal{I} = [f] \subseteq \mathbb{A}^n$ con $\deg f = 1$, allora esiste sempre una retta che “buca il piano” (cioè una retta r tale che $\#(\mathcal{I} \cap r) = 1$).

Sia infatti $P \in \mathcal{I}$: a meno di traslazione possiamo supporre $P = \mathbf{0}$ e $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$. Sia dunque $r = \{t\mathbf{v}\}$ con $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \neq \mathbf{0}$: si verifica $\mathcal{I} \cap r = [t \sum_{i=1}^n a_i v_i]$. Dato che necessariamente $\exists k$ tale che $a_k \neq 0$, è sufficiente scegliere $v_k = 1$ e $v_i = 0$ per $i \neq k$.

Definizione 2.2.5. Sia \mathcal{I} un'ipersuperficie affine di \mathbb{A}^n , sia $P \in \mathbb{A}^n$. Chiamiamo *molteplicità di P per \mathcal{I}* (o anche molteplicità di \mathcal{I} in P) il numero

$$m_P(\mathcal{I}) := \min\{I(\mathcal{I}, r, P) : r \text{ retta passante per } P\},$$

che si verifica essere un invariante affine.

Si osserva immediatamente che

- $0 \leq m_P(\mathcal{I}) \leq \deg(\mathcal{I})$;
- $m_P(\mathcal{I}) \geq 1$ se e solo se $P \in \mathcal{I}$;
- $m_P(\mathcal{I}) \geq 2$ se e solo se P è un punto singolare di \mathcal{I} ;
- Se \mathcal{I} e \mathcal{J} sono due ipersuperfici affini, allora $m_P(\mathcal{I} + \mathcal{J}) = m_P(\mathcal{I}) + m_P(\mathcal{J})$.

Le definizioni e i risultati precedenti si possono facilmente estendere al caso proiettivo, con opportune modifiche. Elenchiamo le più significative:

- La retta proiettiva generica per P sarà $L(P, Q)$, con $P \neq Q$.
- Lo spazio proiettivo tangente a $\mathcal{I} = [F]$ in $P \in \mathcal{I}$ si verifica essere l'ipersuperficie proiettiva $T_P(\mathcal{I})$ di equazione

$$\sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(P) = 0.$$

- Un punto $P \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ è singolare per un'ipersuperficie proiettiva $\mathcal{I} = [F]$ se $P \in \mathcal{I}$ e $\nabla F(P) = 0$. Se $\text{char } \mathbb{K} = 0$, applicando la formula di Eulero osserviamo che $\nabla F(P) = 0$ implica $P \in V(F)$, quindi la condizione $P \in \mathcal{I}$ diventa ridondante.

Lo studio locale può essere effettuato equivalentemente in parti affini e chiusure proiettive, con i dovuti accorgimenti:

- Se \mathcal{I} è un'ipersuperficie affine, passando alla chiusura proiettiva aggiungiamo un iperpiano all'infinito.
- Se \mathcal{I} è un'ipersuperficie proiettiva e $[x_i]$ è una sua componente irriducibile, passando alla carta affine U_i perdiamo quella componente.
- Se \mathcal{I} è un'ipersuperficie proiettiva e $P = [p_0, \dots, p_n] \in \mathcal{I}$, per studiare P possiamo passare a qualunque carta affine che contenga P , cioè U_i tale che $p_i \neq 0$.

Proposizione 2.2.6. Sia $\mathcal{I} = [f]$ un'ipersuperficie affine di \mathbb{A}^n e sia $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$. Allora \mathbf{a} è un punto singolare per \mathcal{I} se e solo se $j_0(\mathbf{a}) = [1, \mathbf{a}]$ è un punto singolare della chiusura proiettiva $\overline{\mathcal{I}} = [F]$. Inoltre, se $\mathbf{a} \in \mathcal{I}$, allora lo spazio proiettivo tangente a $\overline{\mathcal{I}}$ in $[1, \mathbf{a}]$ è $\overline{T_{\mathbf{a}}(\mathcal{I})}$.

Dimostrazione. \mathbf{a} è un punto singolare di \mathcal{I} se e solo se $f(\mathbf{a}) = 0$ e $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$. Sia $d := \deg f$: osservando che per $i = 1, \dots, n$ vale $\frac{\partial f}{\partial x_i}(1, \mathbf{a}) = x_0^{d-1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$, deduciamo le condizioni equivalenti

$$\begin{cases} f(\mathbf{a}) = 0; \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0, \quad \text{per } i = 1, \dots, n. \end{cases} \iff \begin{cases} F(1, \mathbf{a}) = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial x_i}(1, \mathbf{a}) = 0, \quad \text{per } i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Il secondo sistema è banalmente equivalente a

$$\begin{cases} F(1, \mathbf{a}) = 0; \\ dF(1, \mathbf{a}) = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial x_i}(1, \mathbf{a}) = 0, \quad \text{per } i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Applicando la formula di Eulero otteniamo equivalentemente

$$\begin{cases} F(1, \mathbf{a}) = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial x_0}(1, \mathbf{a}) + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(1, \mathbf{a}) = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial x_i}(1, \mathbf{a}) = 0 \quad \text{per } i = 1, \dots, n. \end{cases} \iff \begin{cases} F(1, \mathbf{a}) = 0; \\ \nabla F(1, \mathbf{a}) = 0. \end{cases}$$

Questo conclude la prima parte della dimostrazione.

Sia ora $\mathbf{a} \in \mathcal{I}$: vogliamo mostrare che $T_{[1, \mathbf{a}]}(\overline{\mathcal{I}}) = \overline{T_{\mathbf{a}}(\mathcal{I})}$. Se \mathbf{a} è un punto singolare, è chiaro che funziona tutto banalmente ($T_{\mathbf{a}}(\mathcal{I}) = \mathbb{A}^n$ e $T_{[1, \mathbf{a}]}(\overline{\mathcal{I}}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$); supponiamo dunque $\mathbf{a} \in \mathcal{I}$ punto liscio. L'equazione di $T_{\mathbf{a}}(\mathcal{I})$ è

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})(x_i - a_i) &= \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(1, \mathbf{a}) - \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(1, \mathbf{a}) = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(1, \mathbf{a}) + \frac{\partial F}{\partial x_0}(1, \mathbf{a}), \end{aligned}$$

grazie ancora alla formula di Eulero. Essendo nelle ipotesi in cui \mathbf{a} è un punto liscio di \mathcal{I} , allora $\frac{\partial F}{\partial x_k}(1, \mathbf{a}) \neq 0$ per qualche $k = 1, \dots, n$, dunque la chiusura proiettiva dell'equazione precedente è proprio $\sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(1, \mathbf{a})$. \square

Si può verificare che anche la molteplicità d'intersezione di una retta in un punto si può effettuare equivalentemente nella chiusura proiettiva, o in qualunque parte affine che contenga il punto.

A meno di traslazione, possiamo sempre supporre $P = \mathbf{0}$, e scrivere l'equazione di \mathcal{I} come

$$f = f_m + f_{m+1} + f_{m+2} + \dots + f_d,$$

dove $f_i \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]_i$ per $i = m, \dots, d$ e $f_m \neq 0$. È chiaro che per ogni retta r passante per P si ha che $I(\mathcal{I}, r, P) \geq m$; inoltre $I(\mathcal{I}, r, P) > m$ se e solo se la direzione \mathbf{v} di r è una radice di f_m . Avendo assunto $\#\mathbb{K} = \infty$, possiamo sempre concludere che $m_P(\mathcal{I}) = m$, e che le rette per cui $I(\mathcal{I}, r, P) > m$ sono quelle interamente contenute in $[f_m]$.

Se $\text{char } \mathbb{K} = 0$, osserviamo che $m_P(\mathcal{I}) = m$ se e solo se:

1. Tutte le derivate parziali di f di ordine $< m$ si annullano in P ;

2. Esiste almeno una derivata m -esima che non si annulla in P .

Definizione 2.2.7. Definiamo il *cono affine tangente* a \mathcal{I} in P come $C_P(\mathcal{I}) := [f_m]$, e il *cono proiettivo tangente* come la sua chiusura proiettiva. Diamo qualche definizione aggiuntiva nel caso si studi una curva piana affine/proiettiva \mathcal{C} in un punto $P \in \mathcal{C}$:

- Se r è una retta passante per P , diremo che r è una *tangente principale* a \mathcal{C} in P se $I(\mathcal{C}, r, P) > m_P(\mathcal{C})$.
Se \mathcal{C} è una curva piana affine (ma quest'osservazione si estende facilmente al caso delle curve proiettive), osserviamo che le tangenti principali di \mathcal{C} in P coincidono con le componenti lineari di $C_P(\mathcal{I})$: in particolare possiamo definirne la *molteplicità* in quanto componente irriducibile di $C_P(\mathcal{I})$; inoltre non potremo avere più di $m_P(\mathcal{I})$ tangenti principali con molteplicità, e nel caso $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ saranno esattamente $m_P(\mathcal{I})$ con molteplicità.
- Se il punto P è singolare, si dice *ordinario* se, a meno di passare alla chiusura algebrica di \mathbb{K} , possiede $m_P(\mathcal{I})$ tangenti principali distinte. Un punto singolare P di molteplicità 2 si chiama *nodo* se è ordinario, *cuspidale* se non è ordinario.
- Se il punto P è liscio e $\tau = [f_1]$ è la sua tangente (principale), P è detto *flesso* se $I(\mathcal{I}, \tau, P) \geq 3$, *flesso ordinario* se vale l'uguaglianza.

Esempio 2.2.8 (cubica piana liscia). Sia $\mathcal{C} = [f] \subseteq \mathbb{A}^2$ con $f(x, y) = y^2 - x^3 + x$ e $P = \mathbf{0}$. Sia $r = \{t(a, b) : t \in \mathbb{K}\}$ con $(a, b) \neq \mathbf{0}$ una retta generica passante per P : avremo

$$g(t) := f(t(a, b)) = ta + b^2t^2 - a^3t^3.$$

L'unica retta tangente si ha per $a = 0$, cioè se r è la retta $x = 0$, quindi P è un punto liscio, con molteplicità 1. La retta $x = 0$ interseca \mathcal{C} in P con molteplicità 2.

Esempio 2.2.9 (cubica annodata). Sia $\mathcal{C} = [f] \subseteq \mathbb{A}^2$ con $f(x, y) = y^2 - x^3 - x^2$ e $P = \mathbf{0}$. Sia $r = \{t(a, b) : t \in \mathbb{K}\}$ con $(a, b) \neq \mathbf{0}$ una retta generica passante per P : avremo

$$g(t) := f(t(a, b)) = t^2(b^2 - a^2) - a^3t^3.$$

Si osserva immediatamente che $m_P(\mathcal{C}) = 2$, dunque P è un punto singolare. Le tangenti principali saranno le rette $r_1 = [x - y]$ e $r_2 = [x + y]$, quindi si tratta di un nodo.

Esempio 2.2.10 (cubica cuspidale). Sia $\mathcal{C} = [f] \subseteq \mathbb{A}^2$ con $f(x, y) = y^2 - x^3$ e $P = \mathbf{0}$. È immediato osservare che $m_P(\mathcal{C}) = 2$ e si ha la sola tangente principale $r = [y]$ con molteplicità 2: dunque P è una cuspidale.

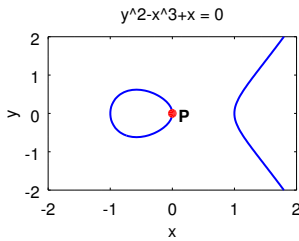


Figura 2.1: Cubica piana liscia

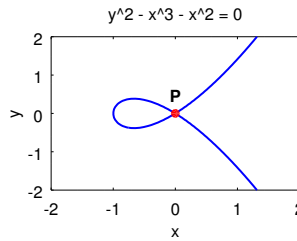


Figura 2.2: Cubica annodata

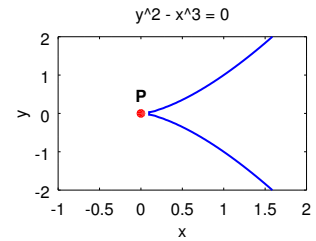


Figura 2.3: Cubica cuspidale

Esempio 2.2.11. Supponiamo $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ e consideriamo l'ipersuperficie affine \mathcal{C} di \mathbb{A}^2 di equazione $f(x, y) = y^2 - p(x)$, dove $d = \deg p \geq 3$, e cerchiamone i punti singolari. Un punto $P = (a, b)$ è singolare se e solo se soddisfa

$$\begin{cases} f(a, b) = 0; \\ \nabla f(a, b) = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} b^2 = p(a); \\ p'(a) = 0; \\ 2b = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0; \\ p(a) = 0; \\ p'(a) = 0. \end{cases}$$

Quindi i punti singolari sono i $P = (a, 0)$ tali che a è una radice multipla di $p(x)$, e possiamo scrivere

$$f(x, y) = y^2 - (x - a)^{2+\alpha} q(x), \quad \alpha \geq 0, \quad q(a) \neq 0.$$

Effettuando un opportuno cambio di variabili per porre $P = (0, 0)$, otteniamo l'equazione

$$g(u, v) = v^2 - u^{2+\alpha} q_1(u), \quad \alpha \geq 0, \quad q_1(0) \neq 0,$$

dunque $m_P(\mathcal{C}) = 2$. A meno di passare alla chiusura algebrica di \mathbb{K} , possiamo fare un'ulteriore distinzione:

- Se $\alpha = 0$ allora $g_2(u, v) = v^2 - cu^2 = (v - u\sqrt{c})(v + u\sqrt{c})$, dunque P è un nodo.
- Se $\alpha > 0$ allora $g_2(u, v) = v^2$, dunque P è una cuspid.

Vogliamo studiare eventuali punti singolari nel piano all'infinito, passando alla chiusura algebrica:

$$F(z, x, y) = y^2 z^{d-2} - \bar{p}(z, x), \quad \bar{p}(z, x) = \sum_{i=0}^d p_i z^{d-i} x^i, \quad p_d \neq 0,$$

e osserviamo che $\bar{Q} = [z, x, y] \in \bar{\mathcal{C}} \cap H_z$ se e solo se $z = 0$ e $\bar{p}(0, x) = p_d x^d = 0$, cioè $\bar{Q} = [0, 0, 1]$. Per studiare questo punto, passiamo alla carta affine U_y , ottenendo l'ipersuperficie affine di equazione

$$h(x, z) = z^{d-2} - \bar{p}(z, x) = 0.$$

e il punto affine $Q = (0, 0)$. Effettuando lo studio locale per Q , osserviamo che

- L'unica tangente principale è $\tau = [z]$, di molteplicità $d - 2$.
- Se $d = 3$, allora Q è un punto liscio. In questo caso $h_2 = 0$ e $h_3(0, x) = \bar{p}(0, x) \neq 0$, dunque P è un flesso ordinario.
- Se $d \geq 4$, allora Q è un punto singolare di molteplicità $d - 2$.

2.3 Molteplicità d'intersezione di due curve piane

Diamo tre definizioni equivalenti di molteplicità d'intersezione di due curve piane affini in un punto: una assiomatica, una tramite localizzazione e una basata sul risultante. Anche in questa sezione daremo sempre per scontata l'ipotesi $\# \mathbb{K} = \infty$.

Se $\mathcal{C} = [f]$ e $\mathcal{D} = [g]$ sono due curve piane affini e $P \in \mathbb{A}^2$, indicheremo la *molteplicità d'intersezione* di \mathcal{C} con \mathcal{D} in P con $I(\mathcal{C}, \mathcal{D}, P)$; talvolta, con abuso di notazione, denoteremo semplicemente $I(f, g, P)$ invece di $I([f], [g], P)$.

Definizione 2.3.1 (assiomatica). $I(\mathcal{C}, \mathcal{D}, P) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ è il numero che soddisfa i seguenti assiomi:

A1. $I(\mathcal{C}, \mathcal{D}, P) = \infty$ se e solo se \mathcal{C}, \mathcal{D} hanno una componente in comune contenente P .

A2. $I(\mathcal{C}, \mathcal{D}, P) = 0$ se e solo se $P \notin \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$.

A3. $I(\mathcal{C}, \mathcal{D}, P) = I(\mathcal{D}, \mathcal{C}, P)$.

A4. Se \mathcal{C}, \mathcal{D} sono rette distinte e contengono P , allora $I(\mathcal{C}, \mathcal{D}, P) = 1$.

A5. $I(\mathcal{C}, \mathcal{D}, P)$ è un invariante affine.

A6. $\forall a \in \mathbb{K}[x, y]$ si ha $I(f, g, P) = I(f, g + af, P)$.

A7. Se $f = \prod f_i$ e $g = \prod g_j$, allora $I(f, g, P) = \sum_{i,j} I(f_i, g_j, P)$

Osserviamo che l'assioma 7 è una sorta di bilinearità: pensando alle componenti delle curve in termini additivi, possiamo scrivere $\mathcal{C} = \sum \mathcal{C}_i$ e $\mathcal{D} = \sum \mathcal{D}_j$, dove $\mathcal{C}_i = [f_i]$ e $\mathcal{D}_j = [g_j]$. In questo modo la proprietà diventa $I(\sum \mathcal{C}_i, \sum \mathcal{D}_j, P) = \sum_{i,j} I(\mathcal{C}_i, \mathcal{D}_j, P)$.

Fatto 2.3.2. Le proprietà della definizione assiomatica determinano univocamente i numeri d'intersezione.

Idea. Non lo vediamo nel dettaglio, ma si mostra per induzione sul numero d'intersezione (i casi in cui esso è 0 o ∞ sono già sistemati univocamente dagli assiomi). Mostriamolo con un esempio: siano $f = y^3 + x^2$, $g = y + x^3$ e $P = (0, 0)$. Allora

$$\begin{aligned} I(f, g, P) &= I(y^3 + x^2, y + x^3, P) = \\ &= I(y^3 + x^2, y - xy^3, P) = \end{aligned} \quad \text{[A6]}$$

$$= I(y^3 + x^2, y, P) + I(y^3 + x^2, 1 - xy^2, P) = \quad \text{[A7]}$$

$$= I(x^2, y, P) + 0 = \quad \text{[A6] + [A2]}$$

$$= 2I(x, y, P) = 2 \quad \text{[A7] + [A4]}$$

Vediamo ora due diverse definizioni costruttive: una volta che saranno verificati gli assiomi, per il Fatto 2.3.2 dovranno necessariamente coincidere.

Definizione 2.3.3 (tramite localizzazione). Se $P = (a, b)$, sia $\mathfrak{m}_P := (x - a, y - b)$ il nucleo della mappa di valutazione, e sia $\mathcal{O}_P := \mathbb{K}[x, y]_{\mathfrak{m}_P}$ l'anello locale di P in \mathbb{A}^2 (si tratta del localizzato algebrico). L'anello $\mathcal{O}_P(f, g) := \mathcal{O}_P / (f, g)\mathcal{O}_P$ ha struttura di \mathbb{K} -algebra (in particolare di \mathbb{K} -spazio vettoriale), quindi definiamo

$$I(\mathcal{C}, \mathcal{D}, P) := \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_P(f, g).$$

Proposizione 2.3.4. La definizione di $I(\mathcal{C}, \mathcal{D}, P)$ tramite localizzazione è ben posta, e soddisfa gli assiomi.

Dimostrazione. La buona definizione è immediata, in quanto $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}^* \quad (\lambda f, \mu g) = (f, g)$.

A5. Sia $\varphi : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ un'affinità. Se $h \in \mathbb{K}[x, y]$ denotiamo $\widehat{h} := \varphi(h) = h \circ \varphi^{-1}$, sia $\widehat{P} := \varphi(P)$. Allora è sufficiente verificare che $\mathcal{O}_P(f, g) \cong \mathcal{O}_{\widehat{P}}(\widehat{f}, \widehat{g})$ (isomorfismo di spazi vettoriali). Si verifica senza grossi problemi che la mappa

$$\psi : \mathcal{O}_P(f, g) \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{P}}(\widehat{f}, \widehat{g}) \quad \left| \quad \psi\left(\frac{h}{k}\right) = \frac{\widehat{h}}{\widehat{k}} \right.$$

è ben definita ed è un isomorfismo di \mathbb{K} -algebre.

- A1. (\Leftarrow) Supponiamo che f, g abbiano una componente comune irriducibile h tale che $h(P) = 0$: c'è un'ovvio omomorfismo suriettivo $\mathcal{O}_P(f, g) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_P(h)$, da cui

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_P(f, g) \geq \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_P(h),$$

e sarà quindi sufficiente dimostrare che $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_P(h) = \infty$.

Supponiamo per assurdo che $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_P(h) < \infty$, sia wlog $P = 0$ (tramite A5): in particolare x, x^2, \dots sono \mathbb{K} -linearmente dipendenti in $\mathcal{O}_P(h)$, quindi troviamo $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tali che $\alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n = 0$ in $\mathcal{O}_P(h)$, cioè

$$\exists a \geq 1, \quad q \in \mathbb{K}[x] : \quad h(x, y) \mid x^a q(x) \text{ in } \mathcal{O}_P, \quad q(0) \neq 0.$$

Dunque $\exists k, \ell \in \mathbb{K}[x, y]$ tali che $\ell(\mathbf{0}) \neq 0$ e

$$h(x, y) \frac{k(x, y)}{\ell(x, y)} = x^a q(x) \quad \Rightarrow \quad h(x, y) k(x, y) = x^a q(x, y) \ell(x, y) \quad \text{in } \mathbb{K}[x, y].$$

Avendo preso h irriducibile in $\mathbb{K}[x, y]$, e dato che $h(\mathbf{0}) = 0$ ma $q(0)\ell(\mathbf{0}) \neq 0$, deduciamo che $h = \lambda x$ con $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Facendo lo stesso ragionamento a partire dalla dipendenza lineare di y, y^2, \dots , otterremmo anche $h = \mu y$ con $\mu \in \mathbb{K}^*$, che è assurdo.

(\Rightarrow) Supponiamo ora $(f, g) = 1$ in $\mathbb{K}[x, y]$: vogliamo mostrare che esistono due polinomi non nulli $s(x) \in \mathbb{K}[x] \cap (f, g)$ e $t(y) \in \mathbb{K}[y] \cap (f, g)$: se così fosse, potremmo considerare l'omomorfismo suriettivo $\mathcal{O}_P(s, t) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_P(f, g)$ e ottenere

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_P(f, g) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_P(s, t) < \infty,$$

in quanto $s(x)$ e $t(y)$ danno luogo a relazioni che limitano le potenze di x e di y .

Dimostriamo l'esistenza di $s(x)$: quella di $t(y)$ è analoga. Se $\deg_y f = 0$ o $\deg_y g = 0$, possiamo porre $s(x) = f$ oppure $s(x) = g$. Supponiamo dunque $\deg_y f, \deg_y g \geq 1$ e verifichiamo che $(f, g) = 1$ in $\mathbb{K}(x)[y]$: in questo modo per l'identità di Bezout esisteranno $\lambda, \mu \in \mathbb{K}[x, y]$ e $\lambda_1, \mu_1 \in \mathbb{K}[x]$ tali che

$$\frac{\lambda(x, y)}{\lambda_1(x)} f(x, y) + \frac{\mu(x, y)}{\mu_1(x)} g(x, y) = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda f + \mu g = \lambda_1 \mu_1,$$

e basterà porre $s(x) := \lambda_1(x) \mu_1(x)$.

Si può verificare che $\mathbb{K}(x)[y]$ è ancora un UFD, e che gli irriducibili di $\mathbb{K}[x, y]$ sono irriducibili o invertibili in $\mathbb{K}(x)[y]$. In particolare possiamo ricavare decomposizioni irriducibili di f e g in $\mathbb{K}(x)[y]$ a partire da quelle in $\mathbb{K}[x, y]$. Se per assurdo fosse $(f, g) \neq 1$ in $\mathbb{K}(x)[y]$, si dovrebbe avere $f_i = \frac{a}{s} g_j$ per qualche $a \in \mathbb{K}[x, y]$, $b \in \mathbb{K}[x]$, f_i, g_j componenti irriducibili di f, g sia in $\mathbb{K}[x, y]$ sia in $\mathbb{K}(x)[y]$. Ne deduciamo $s f_i = a g_j$ in $\mathbb{K}[x, y]$, da cui $g_j \mid s$ e in particolare $g_j \in \mathbb{K}(x)[y]^*$, che è assurdo.

- A2. Osserviamo che vale

$$I(\mathcal{C}, \mathcal{D}, P) = 0 \iff (f, g) \mathcal{O}_P = \mathcal{O}_P \iff \exists \lambda, \mu \in \mathcal{O}_P : \lambda f + \mu g = 1.$$

Se $P \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, allora $\forall \lambda, \mu \in \mathcal{O}_P$ si ha $(\lambda f + \mu g)(P) = 0$, dunque $I(\mathcal{C}, \mathcal{D}, P) \neq 0$. D'altra parte, se wlog $P \notin \mathcal{C}$, si ha $f \in \mathcal{O}_P^*$, dunque $(f, g) \mathcal{O}_P = \mathcal{O}_P$.

- A3. Ovvio in quanto $(f, g) \mathcal{O}_P = (g, f) \mathcal{O}_P$.

A4. Tramite A5 possiamo porre wlog $P = 0$, $\mathcal{C} = [x]$ e $\mathcal{D} = [y]$. Dato che quozientare per x e y equivale a valutare i polinomi in $\mathbf{0}$, si ha necessariamente $\mathcal{O}_P(x, y) \cong \mathbb{K}$ o $\mathcal{O}_P(x, y) \cong \{0\}$, ma il secondo caso si può escludere con A2.

A6. Basta osservare che $(f + ag, g)\mathcal{O}_P = (f, g)\mathcal{O}_P$.

A7. Basta mostrare che $I(f, gh, P) = I(f, g, P) + I(f, h, P)$, poi si può procedere per induzione. Se f, g hanno una componente in comune contenente P , allora la formula vale per A1. Supponiamo quindi che f, g non abbiano componenti in comune contenenti P , cioè $(f, g) = 1$ in \mathcal{O}_P , e consideriamo la successione di \mathcal{O}_P -moduli

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_P(f, h) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_P(f, gh) \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}_P(f, g) \rightarrow 0,$$

dove $\varphi = \cdot g$ e π è l'omomorfismo di proiezione. Verifichiamo che si tratta di una successione esatta:

- È chiaro che queste mappe siano omomorfismi di \mathbb{K} -moduli, che π sia suriettiva e che $\text{Im } \varphi \subseteq \ker \pi$.
- Sia $\bar{p} \in \mathcal{O}_P(f, h)$ tale che $\varphi(\bar{p}) = 0$, sia $p \in \mathcal{O}_P$ un suo rappresentante: dovremo avere $pg = \lambda f + \mu gh$ in \mathcal{O}_P per opportuni $\lambda, \mu \in \mathcal{O}_P$. Dato che $(f, g) = 1$ in \mathcal{O}_P , si deve avere $\lambda = g\lambda_0$ con $\lambda_0 \in \mathcal{O}_P$, da cui $p = \lambda_0 f + \mu h$ e quindi $\bar{p} = 0$. Dunque φ è iniettiva.
- Sia $\bar{p} \in \mathcal{O}_P(f, gh)$, sia $p \in \mathcal{O}_P$ un suo rappresentante. Supponiamo $\pi(\bar{p}) = 0$: allora $\exists \lambda, \mu \in \mathcal{O}_P$ tali che $p = \lambda f + \mu g$. Prendendo $\bar{\mu} \in \mathcal{O}_P(f, h)$, chiaramente $\varphi(\bar{\mu}) = \bar{\mu}g = \bar{p}$ in $\mathcal{O}_P(f, gh)$, dunque $\ker \pi \subseteq \text{Im } \varphi$.

È noto che la dimensione è una funzione additiva, nel senso che data una qualsiasi successione esatta di \mathbb{K} -spazi vettoriali

$$0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0,$$

si ha $\dim_{\mathbb{K}}(N) = \dim_{\mathbb{K}}(M) + \dim_{\mathbb{K}}(P)$. Questo basta per concludere. \square

Definizione 2.3.5 (tramite risultante). Se $P \notin \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, poniamo $I(\mathcal{C}, \mathcal{D}, P) = 0$. In caso contrario, per prima cosa rimuoviamo da f e g tutte le componenti irriducibili che non contengono P : per abuso di notazione denotiamo ancora con f e g tali polinomi. A meno di cambiamento di coordinate, possiamo supporre che $\deg_y f = \deg f$ e $\deg_y g = \deg g$ (diremo impropriamente che f e g sono monici in y), e che $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} \cap [x - a] = \{P\}$, dove $P = (a, b)$. Definiamo quindi $I(f \cap g, P)$ come la molteplicità di a come radice di $\text{Ris}_y(f, g)(x)$.

Proposizione 2.3.6. La definizione di $I(\mathcal{C}, \mathcal{D}, P)$ tramite il risultante è ben posta, e soddisfa gli assiomi.

Dimostrazione. Per la buona definizione, basta osservare che $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}^*$ si ha

$$\text{Ris}_y(\lambda f, \mu g) = \lambda^s \mu^r \text{Ris}_y(f, g),$$

dove $r = \deg_y f$ e $s = \deg_y g$.

A1 $I(\mathcal{C}, \mathcal{D}, P) = \infty$ se e solo se $\text{Ris}_y(f, g)(x) = 0$, se e solo se f e g hanno una componente comune irriducibile h in $\mathbb{K}(x)[y]$. Grazie alla scelta delle coordinate, i fattori irriducibili di f e g in $\mathbb{K}[x, y]$ sono monici in y , quindi coincidono con quelli in $\mathbb{K}(x)[y]$. Inoltre, avendo rimosso le componenti irriducibili che non contengono P , possiamo concludere che $I(\mathcal{C}, \mathcal{D}, P) = \infty$ se e solo se f, g hanno una componente comune irriducibile h in $\mathbb{K}[x, y]$ che contiene P .

A2 Siano $f_1(y) := f(a, y)$ e $g_1(y) := g(a, y)$ in $\mathbb{K}[y]$. Osserviamo che $I(\mathcal{C}, \mathcal{D}, P) = 0$ se e solo se $\text{Ris}_y(f, g)(a) \neq 0$ se e solo se $\text{Ris}(f_1, g_1) \neq 0$ se e solo se $(f_1, g_1) = 1$ in $\mathbb{K}[y]$, se e solo se $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{K}[y]$ tali che $\lambda f_1 + \mu g_1 = 1$. Se $P \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, allora $\lambda f_1(b) + \mu g_1(b) = \lambda f(P) + \mu g(P) = 0$, quindi $I(\mathcal{C}, \mathcal{D}, P) \neq 0$. D'altra parte, se $P \notin \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, abbiamo già definito $I(\mathcal{C}, \mathcal{D}, P) = 0$.

A3 Si osserva facilmente che $\text{Ris}_y(f, g) = \pm \text{Ris}_y(g, f)$.

A4 Dato che f, g sono monici in y , le due rette avranno equazioni

$$f = (y - b) + c_1(x - a), \quad g = (y - b) + c_2(x - a), \quad c_1 \neq c_2.$$

Si ricava facilmente $\text{Ris}_y(f, g)(x) = (c_1 - c_2)(x - a)$, da cui $I(\mathcal{C}, \mathcal{D}, P) = 1$.

A5 Dimostrazione omessa.

A6 Se $\deg_y(g + af) = \deg_y g$, osserviamo che possiamo ricavare $S_y(f, g + af)$ a partire da $S_y(f, g)$ agendo sulle righe, quindi senza alterare il determinante.

Se $\deg_y(g + af) \neq \deg_y g$ si può fornire una dimostrazione simile, partendo dalla matrice di Sylvester di grado maggiore e riducendola in modo opportuno agendo ancora sulle righe: non si otterrà direttamente l'altra matrice, ma una il cui determinante ne differisce soltanto per un coefficiente moltiplicativo non nullo. Non riportiamo i dettagli.

A7 Una proprietà nota del risultante (che qui non dimostreremo) è che

$$\text{Ris}(f, gh) = \text{Ris}(f, g) \text{Ris}(f, h)$$

Da questa si ricava immediatamente $I(f, gh, P) = I(f, g, P)I(f, h, P)$. □

Le definizioni che abbiamo dato sono valide per curve piane affini, ma possono essere facilmente estese alle curve piane proiettive. Se \mathcal{C} e \mathcal{D} sono curve piane proiettive, $P \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ e (U, j) è una carta affine che contiene P , allora possiamo definire $I(\mathcal{C}, \mathcal{D}, P) := I(\mathcal{C} \cap U, \mathcal{D} \cap U, j^{-1}(P))$. Possiamo anche mantenere la definizione in una delle tre forme precedenti (si verifica che sono tutte equivalenti), ma serviranno alcuni accorgimenti:

- Nella definizione assiomatica, bisogna effettuare qualche modifica agli assiomi A5 e A6.
- Nella definizione tramite risultante, ancora una volta rimuoveremo da F e G le componenti che non contengono P , e assegneremo d'ufficio $I(\mathcal{C}, \mathcal{D}, P) = 0$ se $P \notin \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$. Scegliamo quindi il sistema di coordinate in modo tale che $[0, 0, 1] \notin \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ (cioè F, G monici in y) e $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} \cap L(P, [0, 0, 1]) = \{P\}$. Definiamo infine $I(\mathcal{C}, \mathcal{D}, P)$ come la molteplicità di $[c, a]$ in quanto radice di $\text{Ris}_y(F, G)(z, x)$.
- Nella definizione tramite localizzazione², bisogna considerare

$$\mathcal{O}_P := \left\{ \frac{H}{K} : H, K \in \mathbb{K}[z, x, y]_d \text{ per qualche } d, K(P) \neq 0 \right\}.$$

Si verifica facilmente che \mathcal{O}_P presenta struttura di \mathbb{K} -algebra. Per semplicità, supponiamo $P = [1, a, b]$. Se $r = \deg F$, $s = \deg G$, ha senso considerare $\mathcal{O}_P/(z^{-r}F, z^{-s}G)$, e definire $I(\mathcal{C}, \mathcal{D}, P)$ come la sua dimensione come \mathbb{K} -spazio vettoriale. Si può verificare infatti che $\mathcal{O}_{[1, a, b]}(z^{-r}F, z^{-s}G) \cong \mathcal{O}_{[a, b]}(f, g)$ come \mathbb{K} -algebre, dove $f = D(F)$ e $g = D(G)$, il che giustifica il passaggio da carte affini a chiusura proiettiva.

²Questo me lo visto a mano, e non fa parte del programma.

È interessante osservare che, se \mathcal{C} è una curva piana e ℓ è una retta, allora il numero d'intersezione $I(\mathcal{C}, \ell, P)$ definito in questa sezione coincide con quello, definito nella sezione precedente, tra un'ipersuperficie e una retta in un punto. Per dimostrarlo possiamo ridurci wlog al caso affine, con $P = \mathbf{0}$, $\ell = [x]$ e $\mathcal{C} = [f]$. Se scriviamo $g(t) := f(0, t) = t^m f_0(t)$ con $f_0(0) \neq 0$, la molteplicità definita precedentemente è esattamente m ; d'altra parte si osserva che

$$I(f, x, P) = I(f(0, y), x, P) = I(y^m f_0(y), x, P) = I(y^m, x, P) = m,$$

applicando la definizione assiomatica.

2.3.1 Teorema di Bézout

Ci chiediamo cosa possiamo dire in generale sull'intersezione di una curva piana proiettiva $\mathcal{C} = [F]$ e di una retta proiettiva $\ell = L(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, con $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$. Posto $G(t, s) := F(t\mathbf{v}, s\mathbf{w})$ e $m := \deg F$, possiamo separare due casi:

- Se $G = 0$, allora $\ell \subseteq \mathcal{C}$.
- Se $G \neq 0$, allora G è ancora un polinomio omogeneo di grado m , quindi $\#(\mathcal{C} \cap \ell) \leq m$. Se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, abbiamo visto che possiamo sempre fattorizzare

$$G(t, s) = \prod_{i=1}^k (\mu_i t - \lambda_i s)^{\alpha_i}, \quad \forall i \neq j \quad [\lambda_i, \mu_i] \neq [\lambda_j, \mu_j], \quad \sum \alpha_i = m,$$

dunque i punti d'intersezione sono $P_i = \lambda_i \mathbf{v} + \lambda_j \mathbf{w}$, con molteplicità α_i , e la molteplicità totale è $\#(\mathcal{C} \cap \ell) = m$.

Teorema 2.3.7 (Bézout). Siano \mathcal{C} e \mathcal{D} curve piane proiettive, siano $m = \deg \mathcal{C}$, $n = \deg \mathcal{D}$.

- (i) Se $\#(\mathcal{C} \cap \mathcal{D}) > mn$, allora \mathcal{C}, \mathcal{D} hanno una componente comune.
- (ii) Se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ e \mathcal{C}, \mathcal{D} non hanno componenti comuni, allora $\#(\mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = mn$ con molteplicità (nel senso che, se $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \{P_1, \dots, P_h\}$, allora $\sum_{i=1}^h I(\mathcal{C}, \mathcal{D}, P_i) = mn$).

Dimostrazione. Siano $\mathcal{C} = [F]$ e $\mathcal{D} = [G]$, sia $R(z, x) := \text{Ris}_y(F, G) \in \mathbb{K}[z, x]$. Fissati alcuni punti $P_1, \dots, P_h \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, possiamo sempre metterci in un sistema di coordinate omogenee $[z, x, y]$ tali che $[0, 0, 1] \notin L(P_i, P_j)$ per ogni $i \neq j$ e che i polinomi F, G siano monici in y (basta scegliere $Q \notin \mathcal{C} + \sum_{i,j} L(P_i, P_j)$, e portarlo in $[0, 0, 1]$ tramite una proiettività). Tale scelta di coordinate ha alcune utili conseguenze:

- Essendo F, G monici in y , possiamo applicare la proprietà di specializzazione del risultante. Poste $F_{c,a}(y) := F(c, a, y)$ e $G_{c,a}(y) := G(c, a, y)$ in $\mathbb{K}[y]$, otteniamo $\deg F_{c,a} \geq 1$, $\deg G_{c,a} \geq 1$ e $\forall c, a \in \mathbb{K} \quad R(c, a) = \text{Ris}(F_{c,a}, G_{c,a})$.
- Per la stessa ragione, possiamo applicare la proprietà di omogeneità del risultante, ottenendo che $R(z, x) \in \mathbb{K}[z, x]_{mn}$.
- Posti $P_i = [c_i, a_i, b_i]$, si ha che i $[c_i, a_i]$ sono tutti distinti e ben definiti in $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$. Infatti, se si avesse $(c_i, a_i) = \mathbf{0}$ allora $P_i = [0, 0, 1]$; se si avesse $[c_i, a_i] = [c_j, a_j]$ con $i \neq j$, allora si verifica $[0, 0, 1] \in L(P_i, P_j)$.
- Il risultante $R(z, x)$ può essere utilizzato per calcolare $I(\mathcal{C}, \mathcal{D}, P_i)$ per $i = 1, \dots, h$.

(i) Siano P_1, \dots, P_{mn+1} punti distinti in $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, con $P_i = [c_i, a_i, b_i]$. Scegliamo il sistema di coordinate omogenee come detto precedentemente, rispetto ai punti P_1, \dots, P_{mn+1} . Per ogni i , i polinomi $F_{c_i, a_i}(y)$ e $G_{c_i, a_i}(y)$ avranno la componente $y - b_i$ in comune, dunque

$$R(c_i, a_i) = \text{Ris}(F_{c_i, a_i}, G_{c_i, a_i}) = 0 \quad \text{per } i = 1, \dots, mn + 1.$$

In particolare $R(z, x)$ avrà almeno $mn + 1$ radici distinte ma, dato che $R(z, x) \in \mathbb{K}[z, x]_{mn}$, si avrà $R(z, x) = 0$, dunque F e G avranno una componente comune in $\mathbb{K}[z, x, y]$ con $\deg_y \geq 1$.

(ii) Per il punto (i) si avrà $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \{P_1, \dots, P_h\}$ con $h \leq mn$. Scegliamo il sistema di coordinate omogenee al solito modo, rispetto ai punti P_1, \dots, P_h . Dato che F e G non hanno componenti comuni, in particolare $R \neq 0$, e possiamo fattorizzare

$$R(z, x) = \prod_{i=1}^k (a_i z - c_i x)^{\alpha_i}, \quad \forall i \neq j \quad [c_i, a_i] \neq [c_j, a_j], \quad \sum \alpha_i = mn.$$

Vorremmo trovare una biiezione tra le radici $[c_i, a_i]$ di $R(z, x)$ e i punti P_j , della forma

$$[c_i, a_i] \leftrightarrow [c_i, a_i, b_i] \quad \text{per qualche } b_i \in \mathbb{K} :$$

in questo modo, a meno di cambiare l'ordine dei punti, si avrebbe $h = k$ e $I(\mathcal{C}, \mathcal{D}, P_i) = \alpha_i$ per $i = 1, \dots, h$, e potremmo concludere.

- Se $[c_i, a_i]$ è una radice di $R(z, x)$, in particolare $\text{Ris}(F_{c_i, a_i}, G_{c_i, a_i}) = 0$, perciò $F_{c_i, a_i}(y)$ e $G_{c_i, a_i}(y)$ hanno una radice comune b_i , da cui $[c_i, a_i, b_i] = P_j$ per qualche j . Dato che le coordinate $[z, x]$ dei punti P_j sono tutte distinte, la scelta di b_i è univoca.
- Se $P_j = [\hat{c}_j, \hat{a}_j, \hat{b}_j]$, in particolare $F_{\hat{c}_j, \hat{a}_j}(y)$ e $G_{\hat{c}_j, \hat{a}_j}(y)$ hanno \hat{b}_j come radice comune, dunque $R(\hat{c}_j, \hat{a}_j) = 0$ e quindi $[\hat{c}_j, \hat{a}_j] = [c_i, a_i]$ per qualche i .

È chiaro che le due mappe definite sopra sono l'una l'inversa dell'altra, quindi abbiamo trovato la biiezione richiesta. \square

Vediamo alcune applicazioni del teorema di Bézout:

Proposizione 2.3.8. Supponiamo $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ e sia \mathcal{I} un'ipersuperficie proiettiva riducibile di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, con $n \geq 2$: allora \mathcal{I} ammette un punto singolare.

Dimostrazione. Sia F un'equazione dell'ipersuperficie: per ipotesi $F = GH$ con G, H polinomi omogenei di grado ≥ 1 . Osserviamo che è sufficiente mostrare che $\exists P \in V(G) \cap V(H)$: infatti in tal caso si verifica facilmente $\nabla F(P) = \mathbf{0}$.

Se $n = 2$, un tale punto esiste sempre per il teorema di Bézout. Supponiamo quindi $n \geq 3$: vorremmo abbassare la dimensione per poter applicare ancora il teorema, quindi intersechiamo le ipersuperfici di equazioni F, G, H con il piano $x_3 = \dots = x_n = 0$, ottenendo tre polinomi omogenei $\overline{F}, \overline{G}, \overline{H} \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$, nulli o con gli stessi gradi di quelli precedenti. Sarà sufficiente trovare $P \in V(\overline{G}) \cap V(\overline{H})$: in tal caso si avrà $P = [\overline{P}, \mathbf{0}] \in V(G) \cap V(H)$. Separiamo due casi:

- Se $\overline{F} = 0$, allora wlog $\overline{G} = 0$, e qualunque $\overline{P} \in V(H)$ andrà bene.
- Se $\overline{F} \neq 0$, in particolare $\deg \overline{G}, \deg \overline{H} \geq 1$, dunque possiamo applicare il teorema di Bézout per ottenere \overline{P} come richiesto. \square

Si osserva facilmente che, se $n = 2$, allora l'ipotesi $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ non è necessaria: infatti due rette sul piano proiettivo hanno sempre un punto di intersezione (si possono vedere come spazi proiettivi, e applicare la formula di Grassmann).

Esercizio 2.3.9. Sia \mathcal{C} una curva piana proiettiva ridotta: dimostrare che \mathcal{C} ha un numero finito di punti singolari.

Soluzione. Sia $F \in \mathbb{K}[z, x, y]$ un'equazione della curva, e siano F_z, F_x, F_y le sue derivate parziali rispetto a z, x, y . Ricordiamo che $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ è un punto singolare di \mathcal{C} se e solo se $F(P) = F_z(P) = F_x(P) = F_y(P) = 0$.

Se $\text{char } \mathbb{K} = p \neq 0$ ci serve la seguente osservazione: se un qualche polinomio omogeneo H soddisfa $\nabla H = \mathbf{0}$, allora H è una potenza p -esima. Infatti si verifica facilmente che, se per esempio $\frac{\partial H}{\partial z} = 0$, allora tutti i monomi di H presentano solo le potenze di z multiple di p (e analogo per x, y). In particolare, si potrà scrivere $H(z, x, y) = H_0(z^p, x^p, y^p)$ per un opportuno H_0 , da cui $H(z, x, y) = H_0(z, x, y)^p$ perché siamo in caratteristica p .

Supponiamo per assurdo che \mathcal{C} abbia infiniti punti singolari, cioè

$$\#(V(F) \cap V(F_z) \cap V(F_x) \cap V(F_y)) = \infty.$$

È chiaro che $\nabla F \neq \mathbf{0}$ (se $\text{char } \mathbb{K} = 0$ perché $\deg F \geq 1$, altrimenti per l'osservazione precedente). Applicando il teorema di Bézout più volte, possiamo trovare una componente irriducibile H comune ai polinomi F, F_z, F_x, F_y , e in particolare scrivere $F = GH$. In particolare, riciclando la notazione precedente per $u = z, x, y$ si avrà

$$H \mid F_u = H_u G + H G_u \quad \Rightarrow \quad H \mid H_u G$$

Se $H \mid G$ allora $H^2 \mid F$ e abbiamo finito. In caso contrario si dovrà avere $H \mid H_u$ e quindi $H_u = 0$ per $u = z, x, y$ (o è nullo, o ha grado minore di H). Ma questo implicherebbe $\nabla H = \mathbf{0}$, che è assurdo per le stesse ragioni date in precedenza. \square

Teorema 2.3.10. Siano \mathcal{C}, \mathcal{D} curve piane proiettive senza componenti comuni, sia $P \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ un punto tale che $m_P(\mathcal{C}) = r$ e $m_P(\mathcal{D}) = s$. Allora valgono le seguenti:

(i) $I(\mathcal{C}, \mathcal{D}, P) \geq rs$.

(ii) $I(\mathcal{C}, \mathcal{D}, P) = rs$ se e solo se \mathcal{C}, \mathcal{D} non hanno tangenti principali in comune in P .

Dimostrazione. Dimostriamo solo il primo punto. Scegliendo un opportuno sistema di coordinate affini, possiamo scrivere $\mathcal{C} = [f]$, $\mathcal{D} = [g]$ e $P = \mathbf{0}$, con

$$\begin{aligned} f(x, y) &= a_0(x) + a_1(x)y + \dots + y^m, \\ g(x, y) &= b_0(x) + b_1(x)y + \dots + y^n, \end{aligned}$$

dove $x^{r-i} \mid a_i(x)$ per $i = 0, \dots, r-1$ e $x^{s-j} \mid b_j(x)$ per $j = 0, \dots, s-1$. Vogliamo mostrare che $x^{rs} \mid R(x) := \text{Ris}_y(f, g)(x)$. Per farlo, utilizziamo un trucco analogo a quello usato nella dimostrazione della proprietà di omogeneità del risultante. Data la matrice di Sylvester

$$S(x) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-1} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ & & a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-1} & 1 \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ & & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & 1 \end{pmatrix},$$

il cui determinante è $R(x)$, otteniamo una nuova matrice $\tilde{S}(x)$ eseguendo le seguenti operazioni:

- per $i = 1, \dots, s-1$, moltiplichiamo la riga i -esima per x^{s-i} ;
- per $j = 1, \dots, r-1$, moltiplichiamo la riga $n+j$ -esima per x^{r-j} .

In questo modo, tutte le entrate della i -esima colonna della matrice $\tilde{S}(x)$ saranno multiple di $x^{r+s+1-i}$, per $i = 1, \dots, r+s-1$, dunque $x^D \mid \det(\tilde{S}(x))$, dove $D = \frac{1}{2}(r+s)(r+s-1)$.

D'altra parte, le operazioni che abbiamo eseguito sulle righe implicano $\det(\tilde{S}(x)) = x^N R(x)$, dove $N = \frac{1}{2}(r(r-1) + s(s-1))$, dunque $x^{D-N} \mid R(x)$. Si verifica facilmente che $D-N = rs$. \square

2.4 Sistemi lineari di curve

Definizione 2.4.1. Definiamo il *sistema lineare completo* di curve di grado $d \geq 0$ come

$$V_d := \mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d),$$

i cui punti sono le curve proiettive piane di grado d . I sottospazi proiettivi di V_d si dicono in generale *sistemi lineari* di curve di grado d ; quelli di dimensione 1 si chiamano *fasci*.

Osserviamo che $\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d$ è un \mathbb{K} -spazio vettoriale di dimensione $\binom{d+2}{2}$, in particolare, V_d eredita la struttura di \mathbb{K} -spazio vettoriale e $\dim_{\mathbb{K}}(V_d) = \binom{d+2}{2} - 1$. In generale, il fascio generato da due equazioni $F, G \in V_d$ linearmente indipendenti è $\{tF + sG \mid [t, s] \in \mathbb{P}^1\}$.

Definizione 2.4.2. Dato un punto $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, definiamo il sistema lineare

$$V_d(P) := \{[F] \in V_d : P \in V(F)\}$$

di codimensione 1 ($P \in V(F)$ è una condizione lineare sui coefficienti di F). Più in generale, dati i punti $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, definiamo il sistema lineare $V_d(P_1, \dots, P_k) := \bigcap_{i=1}^k V_d(P_i)$.

Osserviamo che in generale vale $\text{codim}_{\mathbb{K}}(V_d(P_1, \dots, P_k)) \leq k$, essendo un sistema lineare definito da k condizioni lineari. La sua dimensione effettiva dipende però dalla disposizione dei punti.

Definizione 2.4.3. $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ impongono *condizioni indipendenti* alle curve di grado d se $\text{codim}(V_d(P_1, \dots, P_k)) = k$.

Esercizio 2.4.4. Fissato un punto $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, dimostrare che le curve proiettive di grado d per le quali P è un punto singolare formano un sistema lineare.

Soluzione. Le condizioni da imporre ad una generica curva $\mathcal{C} = [F]$ sono

$$\begin{cases} F(P) = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial z}(P) = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial x}(P) = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial y}(P) = 0. \end{cases}$$

Ciascuna delle quattro le equazioni impone una condizione lineare sui coefficienti di F . \square

2.4.1 Coniche per cinque punti

In questa sottosezione supponiamo per semplicità $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$. Alcuni dei risultati presentati sono validi anche nel caso generale (in particolare, quelli sulle coniche per cinque punti), ma richiedono qualche accorgimento aggiuntivo.

Esercizio 2.4.5. Una conica proiettiva è liscia se e solo se è irriducibile.

Soluzione. Abbiamo già dimostrato che le ipersuperfici riducibili hanno sempre un punto singolare. Supponiamo dunque che la conica proiettiva \mathcal{Q} abbia un punto singolare P : passando ad un'opportuna carta affine, possiamo supporre la parte affine di \mathcal{Q} abbia equazione

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 = (\alpha_1x + \beta_1y)(\alpha_2x + \beta_2y),$$

dunque \mathcal{Q} è riducibile. \square

Osservazione 2.4.6. Se $\#V(\mathcal{Q}) \neq 1$, l'ipotesi $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ non è necessaria: da un lato le coniche riducibili sono comunque singolari (unione di due rette), dall'altro $\#V(\mathcal{Q}) \geq 2$ assicura che le due rette in $\overline{\mathbb{K}}[x, y]$ che compongono \mathcal{Q} in realtà hanno coefficienti in \mathbb{K} .

Fissati cinque punti distinti $P_1, \dots, P_5 \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, vogliamo classificare le coniche proiettive passanti per essi, o in altri termini studiare $V_2(P_1, \dots, P_5)$, in funzione dei cinque punti. Grazie all'osservazione precedente, se $\mathcal{Q} \in V_2(P_1, \dots, P_5)$, allora il risultato dell'esercizio può essere applicato in questo contesto anche senza l'ipotesi $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$.

Esercizio 2.4.7. Siano $P_1, \dots, P_5 \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ punti distinti in una conica \mathcal{Q} . Dimostrare che i cinque punti sono in posizione generale (cioè non ce ne sono tre allineati) se e solo se \mathcal{Q} è liscia.

Soluzione. Supponiamo che tre dei punti siano allineati, wlog $P_1, P_2, P_3 \in \ell$ retta. Applicando il teorema di Bézout deduciamo $\mathcal{Q} = \ell + r$, dove r è una retta opportuna; dunque \mathcal{Q} è riducibile, e non può essere liscia.

Supponiamo ora che \mathcal{Q} non sia liscia: in particolare sarà riducibile, dunque $\mathcal{Q} = \ell + r$, dove ℓ e r sono rette opportune. Per il principio dei cassetti, almeno tre dei cinque punti saranno sulla stessa retta. Questo conclude l'esercizio. \square

Proposizione 2.4.8. Siano $P_1, \dots, P_5 \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ punti distinti: allora esiste sempre una conica passante per i cinque punti. Inoltre i cinque punti impongono condizioni indipendenti sulle coniche se e solo se non ce ne sono 4 allineati.

Dimostrazione. Osserviamo che $\dim_{\mathbb{K}} V_2 = 5$: in particolare, esiste sempre almeno una conica che passa per P_1, \dots, P_5 ; inoltre le condizioni sono indipendenti se e solo se tale conica è unica.

(\Rightarrow) Supponiamo che quattro dei cinque punti siano allineati, wlog $P_1, \dots, P_4 \in r$ retta. Se s è una retta qualsiasi passante per P_5 , allora $\mathcal{Q} := r + s \in V_2(P_1, \dots, P_5)$. Dato che s non è scelta in modo univoco, la conica non è unica.

(\Leftarrow) Supponiamo che esistano due coniche distinte $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2 \in V_2(P_1, \dots, P_5)$. Applicando il teorema di Bézout deduciamo che le due coniche devono avere una retta in comune, quindi $\mathcal{Q}_1 = \ell + r$ e $\mathcal{Q}_2 = \ell + s$, con ℓ, r, s opportune rette e $r \neq s$. In particolare $\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2 = \ell + (r \cap s)$ e, dato che $\#(r \cap s) = 1$, almeno quattro dei cinque punti saranno contenuti in ℓ . \square

Esercizio 2.4.9. Classificare le coniche che passano per 5 punti distinti P_1, \dots, P_5 .

Soluzione. Sfruttando i risultati precedenti, possiamo considerare casi separati, a seconda della posizione reciproca assunta dai cinque punti. Sia k il massimo numero di punti tra i cinque che stanno sulla stessa retta.

- Se $k = 5$, sia ℓ la retta che contiene tutti e cinque i punti: applicando il teorema di Bézout, deduciamo che le coniche che vanno bene sono tutte e sole quelle della forma $\mathcal{Q} = \ell + r$, dove r è una retta qualsiasi. In particolare, avendo totale libertà nella scelta dei coefficienti dell'equazione di r , avremo $\dim_{\mathbb{K}}(V_2(P_1, \dots, P_5)) = \dim_{\mathbb{K}}(V_1) = 2$.

- Se $k = 4$, siano wlog $P_1, \dots, P_4 \in \ell$ retta. Le coniche che andranno bene saranno quelle della forma $\mathcal{Q} = \ell + r$, dove r è una retta passante per P_5 qualsiasi. In particolare avremo $\dim_{\mathbb{K}}(V_2(P_1, \dots, P_5)) = \dim_{\mathbb{K}}(V_1(P_5)) = 1$.
- Se $k = 3$, per la Proposizione 2.4.8 andrà bene una sola conica. Se wlog $P_1, P_2, P_3 \in \ell$ retta, necessariamente $\mathcal{Q} = \ell + r$, dove $r = L(P_4, P_5)$.
- Se $k = 2$, ancora andrà bene una sola conica. Per l'Esercizio 2.4.7 tale conica dev'essere liscia, quindi irriducibile. \square

Esercizio 2.4.10. Dimostrare che fissare un punto singolare per una conica su \mathbb{P}^2 impone tre condizioni indipendenti.

2.4.2 Cubiche per otto punti

Proposizione 2.4.11. Siano $P_1, \dots, P_8 \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ otto punti distinti tali che

- non esista una retta che ne contenga quattro;
- non esista una conica che ne contenga sette.

Allora P_1, \dots, P_8 impongono condizioni indipendenti alle cubiche piane proiettive.

Dimostrazione. Osserviamo che la tesi è equivalente a $\dim V_3(P_1, \dots, P_8) = 1$. È immediato che valga il segno di maggiore o uguale (la codimensione è al più 8). Supponiamo per assurdo $\dim V_3(P_1, \dots, P_8) \geq 2$, e separiamo tre casi:

- Supponiamo che tre punti (wlog P_1, P_2, P_3) siano allineati, sia ℓ tale retta. Per i punti P_4, \dots, P_8 passa una e una sola conica \mathcal{Q} (vedi Proposizione 2.4.8). Sia A un qualsiasi punto in $\ell \setminus \{P_1, P_2, P_3\}$ e B un punto che non appartiene al supporto di $\ell + \mathcal{Q}$. Dato che $\dim V_3(P_1, \dots, P_8) \geq 2$, aggiungendo due condizioni la dimensione resta ≥ 0 , da cui possiamo prendere una cubica \mathcal{C} tale che $P_1, \dots, P_8, A, B \in \mathcal{C}$. Dato che $P_1, P_2, P_3, A \in \ell$, necessariamente $\ell \subseteq \mathcal{C}$ (per Bézout), dunque $\mathcal{C} = \ell + \mathcal{D}$ per qualche conica \mathcal{D} . D'altra parte $P_4, \dots, P_8 \notin \ell$ (per ipotesi), dunque appartengono a \mathcal{D} , che deve coincidere con \mathcal{Q} (si era detto che è unica). Questo implicherebbe che $B \notin \ell + \mathcal{Q} = \mathcal{C}$, che è assurdo per costruzione.
- Supponiamo che non ci siano tre punti allineati, ma ci siano sei punti su una conica (wlog $P_1, \dots, P_6 \in \mathcal{Q}$, ma $P_7, P_8 \notin \mathcal{Q}$). Sia $\ell = L(P_7, P_8)$ e siano $A \in \mathcal{Q} \setminus \{P_1, \dots, P_6\}$, $B \notin \mathcal{Q} + \ell$. Sia come prima \mathcal{C} una cubica passante per P_1, \dots, P_8, A, B : dato che $P_1, \dots, P_6, A \in \mathcal{Q}$, per Bézout $\mathcal{C} = \mathcal{Q} + r$ con r retta opportuna; tuttavia $P_7, P_8 \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{Q} = r$, da cui $r = \ell$, e si arriva all'assurdo come nel primo caso.
- Supponiamo infine che non ci siano tre punti allineati né sei punti sulla stessa conica. Sia $\ell = L(P_1, P_2)$ (in particolare $P_3, \dots, P_8 \notin \ell$), e siano $A, B \in \ell \setminus \{P_1, P_2\}$ qualsiasi. Sia ancora \mathcal{C} una cubica passante per P_1, \dots, P_8, A, B : dato che $P_1, P_2, A, B \in \mathcal{C} \cap \ell$, per Bézout $\mathcal{C} = \ell + \mathcal{Q}$ dove \mathcal{Q} è un'opportuna conica. Ma $P_3, \dots, P_8 \in \mathcal{C} \setminus \ell = \mathcal{Q}$, che è assurdo. \square

Corollario 2.4.12. Siano $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ due cubiche senza componenti comuni. Supponiamo che $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{P_1, \dots, P_9\}$ dove i P_i sono punti distinti, sia \mathcal{C} una cubica passante per P_1, \dots, P_8 : allora anche $P_9 \in \mathcal{C}$ (equivalentemente, P_1, \dots, P_9 non impongono condizioni indipendenti alle coniche).

Dimostrazione. Osserviamo che siamo nelle ipotesi della proposizione precedente: se P_1, \dots, P_4 fossero allineati, per Bézout la loro retta sarebbe una componente comune di \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 ; analogamente se P_1, \dots, P_7 appartenessero ad una conica. Dunque $\dim V_3(P_1, \dots, P_8) = 1$, da cui $V_3(P_1, \dots, P_8) = \{s\mathcal{C}_1 + t\mathcal{C}_2 \mid [s, t] \in \mathbb{P}^1\}$. In particolare, $\forall \mathcal{C} \in V_3(P_1, \dots, P_8)$ vale $P_9 \in \mathcal{C}$. \square

2.5 Quadriche e punti di flesso

In questa sezione assumeremo sempre $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ e $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$.

L'equazione di una quadrica \mathcal{Q} di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ si può sempre scrivere tramite una forma quadratica $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x}$, dove A è una matrice simmetrica in $\mathbb{K}^{(n+1) \times (n+1)}$ e \mathbf{x}^t è il vettore riga $(x_0 \ x_1 \ \cdots \ x_n)$; la scelta della matrice A è univoca, a meno di moltiplicazione per scalare.

Si osserva facilmente che $\nabla Q(\mathbf{x}) = 2A\mathbf{x}$, da cui deduciamo che il luogo dei punti singolari della quadrica \mathcal{Q} è esattamente lo spazio proiettivo $\mathbb{P}(\text{Ker } A)$, di dimensione $n - \text{Rk } A$. In particolare \mathcal{Q} è una curva liscia se e solo se A è invertibile.

Supponiamo ora $n = 2$. A meno di proiettività, possiamo sempre portare Q in una delle seguenti forme:

- $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$. In questo caso $\text{Rk } A = 3$, dunque siamo nel caso liscio e irriducibile.
- $x_0^2 + x_1^2$. In questo caso $\text{Rk } A = 2$ e la quadrica è riducibile:

$$x_0^2 + x_1^2 = (x_0 - \sqrt{-1}x_1)(x_0 + \sqrt{-1}x_1),$$

quindi è somma di due rette distinte.

- x_0^2 . In questo caso $\text{Rk } A = 1$, e la quadrica è una retta doppia.

In particolare, una condizione necessaria e sufficiente per la riducibilità della conica è $\det A = 0$. Questa condizione può essere applicata anche alle coniche affini: passando alla chiusura proiettiva

Analogamente al caso proiettivo, anche l'equazione di una quadrica affine di \mathbb{A}^n si può scrivere tramite una forma quadratica

$$q(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 1 & \hat{\mathbf{x}}^t \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{\mathbf{x}} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

dove A è ancora una matrice simmetrica in $\mathbb{K}^{(n+1) \times (n+1)}$ e $\hat{\mathbf{x}}^t$ è il vettore riga $(x_1 \ \cdots \ x_n)$.

Se $\mathcal{Q} = [q]$ è una quadrica affine di \mathbb{A}^n con q come in (2.1), allora $\overline{\mathcal{Q}} = [Q]$ con $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x}$; vale anche il viceversa (passando da una quadrica proiettiva ad una sua parte affine). In particolare, una condizione necessaria e sufficiente per la riducibilità della conica è ancora $\det A = 0$.

Se scriviamo la matrice A nella forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} c & B^t \\ \hline B & \hat{A} \end{array} \right), \quad \hat{A} \in \mathbb{K}^{n \times n},$$

si verifica che $\nabla q(\hat{\mathbf{x}}) = 2(\hat{A}\hat{\mathbf{x}} + B)$.

Per *hessiano* di un polinomio $F(z, x, y) \in \mathbb{K}[z, x, y]_d$ intendiamo

$$H_F(z, x, y) := \det \begin{pmatrix} F_{zz} & F_{zx} & F_{zy} \\ F_{zx} & F_{xx} & F_{xy} \\ F_{zy} & F_{xy} & F_{yy} \end{pmatrix},$$

dove abbiamo denotato $F_{uv} = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$. Questa notazione sarà mantenuta anche nel seguito.

Si verifica che l'hessiano è un invariante proiettivo a meno di un coefficiente moltiplicativo, ovvero che $H_{\varphi(F)}(\mathbf{x}) = c\varphi(H_F)(\mathbf{x})$ per qualche $c \in \mathbb{K}^*$, per ogni proiettività φ . In particolare, se $\mathcal{C} = [F]$, ha parecchio senso definire l'ipersuperficie $H_{\mathcal{C}} := [H_F]$.

Ci tornerà utile scrivere l'hessiano in una forma che possa essere calcolata facilmente nella carta affine U_z :

Lemma 2.5.1. Se $F(z, x, y) \in \mathbb{K}[z, x, y]_d$ e $f(x, y) := F(1, x, y)$, vale la formulazione alternativa

$$H_F(1, x, y) = \det \begin{pmatrix} d(d-1)f & (d-1)f_x & (d-1)f_y \\ (d-1)f_x & f_{xx} & f_{xy} \\ (d-1)f_y & f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

In particolare, se $P = [1, x, y] \in V(F)$ si ottiene

$$H_F(P) = (d-1)^2 \det \begin{pmatrix} 0 & f_x & f_y \\ f_x & f_{xx} & f_{xy} \\ f_y & f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Vogliamo agire sulle righe e colonne della matrice hessiana, in modo da applicare la formula di Eulero e far sparire la derivata rispetto a z :

$$\begin{aligned} z^2 H_F(z, x, y) &= \begin{vmatrix} z^2 F_{zz} & z F_{zx} & z F_{zy} \\ z F_{zx} & F_{xx} & F_{xy} \\ z F_{zy} & F_{xy} & F_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (d-1)z F_z & (d-1)F_x & (d-1)F_y \\ z F_{zx} & F_{xx} & F_{xy} \\ z F_{zy} & F_{xy} & F_{yy} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} d(d-1)F & (d-1)F_x & (d-1)F_y \\ (d-1)F_x & F_{xx} & F_{xy} \\ (d-1)F_y & F_{xy} & F_{yy} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Per concludere la dimostrazione, è sufficiente osservare che $F_u(1, x, y) = f_u(x, y)$ e $F_{uv}(1, x, y) = f_{uv}(x, y)$ per $u, v = x, y$. \square

Proposizione 2.5.2. Supponiamo $\text{char } \mathbb{K} = 0$, sia $\mathcal{C} = [F]$ una curva proiettiva piana e P un punto liscio di \mathcal{C} . Allora P è un punto di flesso di \mathcal{C} se e solo se l'hessiano H_F si annulla in P .

Dimostrazione. Mettiamoci in una carta affine tale che $P \mapsto (0, 0) \in \mathbb{A}^2$, e sviluppiamo l'equazione della parte affine tramite Taylor:

$$f(x, y) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{0})x + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{0})y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{0})x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{0})y^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(\mathbf{0})xy \right)}_{=: q(x, y)} + \dots,$$

cioè $f(x, y) = q(x, y) + \tilde{f}(x, y)$, dove q è l'equazione di una quadrica affine \mathcal{Q} passante per $(0, 0)$ e \tilde{f} è un polinomio i cui monomi hanno tutti grado almeno 3.

Si verifica che P è un punto di flesso se e solo se \mathcal{Q} è riducibile, cioè se e solo se la sua matrice associata A è singolare. Dato che l'annullarsi dell'hessiano in P è un invariante proiettivo, a meno di cambiare coordinate proiettive possiamo supporre $F = H(f)$ e $P = [1, 0, 0]$.

Sia $d := \deg F$. Se $d = 1$ allora P è banalmente un punto di flesso, quindi in quanto segue supporremo $d \geq 2$. Vogliamo verificare che $\det(A) = 0$ se e solo se $H_F(P) = 0$. Applicando il Lemma 2.5.1, otteniamo

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & f_x & f_y \\ f_x & f_{xx} & f_{xy} \\ f_y & f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = (d-1)^{-2} H_F(P).$$

Questo conclude la dimostrazione. \square

Enunciamo il seguente fatto, senza dimostrarlo:

Fatto 2.5.3. Supponiamo $\text{char } \mathbb{K} = 0$, sia $\mathcal{C} = [F]$ una curva proiettiva piana. Se $F \mid H_F$, allora \mathcal{C} è unione di rette.

Possiamo quindi dedurre il seguente corollario:

Corollario 2.5.4. Supponiamo $\text{char } \mathbb{K} = 0$, sia \mathcal{C} una curva proiettiva piana liscia di grado $d \geq 3$. Allora \mathcal{C} ha almeno un punto di flesso, e al più $3d(d-2)$.

Dimostrazione. Sia F un'equazione di \mathcal{C} : il fatto precedente implica che $H_F \neq 0$ e che H_F non ha componenti in comune con F (una curva liscia è in particolare irriducibile). Si verifica facilmente che $\deg H_F$ è omogeneo di grado $3d(d-2)$, quindi per il teorema di Bézout possiamo concludere $\#(\mathcal{C} \cap [H_F]) = 3d(d-2)$. \square

In realtà, con opportune osservazioni, si può ricavare un risultato più preciso:

Corollario 2.5.5. Supponiamo $\text{char } \mathbb{K} = 0$, sia \mathcal{C} una curva proiettiva piana irriducibile di grado $d \geq 3$ con s punti singolari. Allora \mathcal{C} ha al più $3d(d-2) - 2s$ punti di flesso.

Riassumendo quanto abbiamo ottenuto in questa sezione, se $\text{char } \mathbb{K} = 0$ e $\mathcal{C} = [F]$ è una curva proiettiva piana di grado d , cosa possiamo dire sui punti di flesso?

Se $d = 1$: \mathcal{C} è una retta, e ogni suo punto è di flesso ($H_F = 0$).

Se $d = 2$: L'equazione della curva è una forma quadratica $F = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$, da cui $H_F = 2 \det(A)$. Se $\det(A) \neq 0$, allora la curva è una conica irriducibile e non ha punti di flesso. Se $\det(A) = 0$, allora la curva è l'unione di due rette: se coincidono, tutti i punti tranne la loro intersezione saranno di flesso, altrimenti non avremo punti di flesso.

Se $d \geq 3$: Se \mathcal{C} è liscia e $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, allora F ha almeno un punto di flesso, e al più $3d(d-2)$.

2.6 Forma di Weierstrass e di Legendre

I casi $d = 1$ e $d = 2$ in un certo senso sono i meno interessanti: presentano un numero finito di curve (a meno di proiettività), cosa che non avviene per $d \geq 3$.

Proposizione 2.6.1 (forma di Weierstrass). Sia $\text{char } \mathbb{K} \neq 2, 3$, sia \mathcal{C} una cubica piana proiettiva liscia, sia $O \in \mathcal{C}$ un flesso. Allora esiste un sistema di coordinate omogenee $[z, x, y]$ su \mathbb{P}^2 tale che $O = [0, 0, 1]$, la parte affine di \mathcal{C} rispetto a z ha equazione $y^2 = p(x)$ con $p(x) := x^3 + ax + b$, e il discriminante³ $\Delta := 4a^3 + 27b^2$ di $p(x)$ è diverso da 0.

Una parte affine che rispetta quelle proprietà sarà detta *forma di Weierstrass*.

Dimostrazione. Scelgo delle coordinate omogenee tali che $O = [0, 0, 1]$ e $z = 0$ sia la tangente a \mathcal{C} in O (questo si può sempre fare). Osserviamo che $y, z \nmid F$ (in caso contrario \mathcal{C} non sarebbe liscia). Passando alla carta affine U_y possiamo scrivere

$$F(z, x, 1) = z + z(az + bx) + g_3(z, x),$$

dove $g_3 \in \mathbb{K}[z, x]_3$ soddisfa $g_3(0, 1) \neq 0$ (altrimenti si avrebbe $z \mid F$). Dato che $y \nmid F$, cambiamo carta affine:

$$F(1, x, y) = y^2 + y(a + bx) + g_3(x, 1).$$

³Questo nome non è un caso: è il numero che si utilizza per trovare le radici di polinomi di terzo grado. Si definisce come $\Delta := \text{Ris}(p, p')$ ed è nullo se e solo $p(x)$ presenta radici multiple.

Consideriamo il cambio di variabili $y' = y + \frac{1}{2}(bx + a)$, indotto dalla proiettività

$$\varphi(z, x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

Questo cambio di variabili lascia invariati il flesso $O = [0, 0, 1]$ e la retta $z = 0$, mentre rende l'equazione della curva della forma

$$f(x, y) = y^2 - g_1(x), \quad g_1(x) = \alpha_0 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3,$$

dove $\alpha_0 \neq 0$ perché $g_3(1, 0) \neq 0$. Cambiamo ancora variabili: $x' = x + \frac{\alpha_1}{3\alpha_0}$ porta alla forma

$$y^2 = \beta_0 x^3 + \beta_2 x + \beta_3, \quad \beta_0 = \alpha_0 \neq 0.$$

Infine, per rendere l'espressione a destra monica, cambiamo $y \mapsto \beta_0^2 y$ e $x \mapsto \beta_0 x$.

Per la condizione sul discriminante basta osservare che, supponendo per assurdo $\Delta = 0$, si avrebbe $p(x) = (x - \alpha)^2(x - \beta)$, da cui $f(x, y) = y^2 - (x - \alpha)^2(x - \beta)$ e ne dedurremmo che $(\alpha, 0)$ è un punto singolare. Questo è assurdo in quanto \mathcal{C} è una curva liscia. \square

Nell'ipotesi di chiusura algebrica, una cubica piana proiettiva liscia ha sempre un punto di flesso, dunque

Corollario 2.6.2. Se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ e $\text{char } \mathbb{K} \neq 2, 3$, ogni cubica piana proiettiva liscia ammette forma di Weierstrass.

Talvolta è utile portare una cubica piana proiettiva liscia in un'altra forma, in cui fissiamo le radici di $p(x)$.

Proposizione 2.6.3 (forma di Legendre). Se $y^2 - p(x)$ è la forma di Weierstrass di una cubica liscia \mathcal{C} , e tutte le radici di $p(x)$ sono in \mathbb{K} , allora \mathcal{C} ammette un'equazione affine, nota come *forma di Legendre*, del tipo

$$y^2 = cx(x - 1)(x - \lambda), \quad \lambda \neq 0, 1 \quad c \in \mathbb{K}^*.$$

Dimostrazione. Siano $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ le radici di $p(x)$: sono distinte in quanto $\Delta(p) \neq 0$. Possiamo applicare un cambiamento della sola variabile x , che manda $\alpha_1 \mapsto 0$ e $\alpha_2 \mapsto 1$: si verifica che l'unica affinità che soddisfa tali ipotesi è $x' = \frac{x - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}$, e che posto $\lambda := \alpha_3' = \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}$, si ottiene un'equazione della forma richiesta. \square

Osserviamo che, se $\sqrt{c} \in \mathbb{K}$ (come succede nel caso di $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$), allora possiamo riscalarare y portando l'equazione nella forma monica $y^2 = x(x - 1)(x - \lambda)$; in generale, questo non è sempre possibile farlo.

Dato che l'ipotesi $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ è sufficiente a poter portare qualunque cubica liscia in forma di Weierstrass, sarà sufficiente anche a portarla in forma di Legendre.

Per quanto resta di questa sezione, ci metteremo sempre nelle ipotesi $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ e $\text{char } \mathbb{K} \neq 2, 3$ e le curve considerate saranno sempre nel piano proiettivo.

Proposizione 2.6.4. Se \mathcal{C} è una cubica liscia, allora \mathcal{C} ha esattamente 9 punti di flesso. In particolare, nella carta affine della forma di Weierstrass, i punti di flesso sono della forma $(a_i, \pm b_i)$ con $b_i \neq 0$ per $i = 1, \dots, 4$, più quello all'infinito.

Dimostrazione. Come prima cosa, ci mettiamo in forma di Weierstrass rispetto ad un flesso O , ottenendo l'equazione $f(x, y) = y^2 - p(x)$, con $p(x) = x^3 + ax + b$. Osserviamo che O è l'unico punto all'infinito di $V(f)$, quindi gli altri flessi andranno cercati nella carta affine. Per la Proposizione 2.5.2, cerchiamo i punti $P = (x, y)$ tali che $y^2 = p(x)$ e $H_F(P) = 0$. Per il Lemma 2.5.1, possiamo scrivere

$$H_F(P) = \begin{vmatrix} 0 & f_x & f_y \\ f_x & f_{x^2} & f_{xy} \\ f_y & f_{xy} & f_{y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -p' & 2y \\ -p' & -p'' & 0 \\ 2y & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(2y^2 p'' - p'^2).$$

I punti P cercati soddisfano quindi

$$\begin{cases} y^2 = p(x), \\ 2p(x)p''(x) - p'(x)^2 = 0. \end{cases}$$

Sia $k(x) := 2p(x)p''(x) - p'(x)^2$: osserviamo che $k' = 2pp''' = 12p$.

Supponiamo per assurdo che k abbia una radice multipla α : in tal caso $x - \alpha \mid (k, k')$, in particolare $p(\alpha) = 0$ e $k(\alpha) = -p'(\alpha)^2 = 0$, da cui $x - \alpha \mid (p, p')$ e p avrebbe una radice multipla, che è assurdo.

Dunque k ha quattro radici distinte a_1, a_2, a_3, a_4 , che non sono radici di p , ed è chiaro che i punti di flesso nella carta affine sono $(a_i, \pm b_i)$, dove $b_i = \sqrt{p(a_i)} \neq 0$. \square

Esempio 2.6.5. Cerchiamo i punti di flesso della cubica $\mathcal{C} = [F]$, con $F = z^3 + x^3 + y^3$.

La cubica è liscia (basta considerare ∇F), quindi ci aspettiamo di trovarne 9. Si ricava facilmente $H(F) = 216zxy$, dunque i punti di flesso saranno tutti e soli quelli che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} z^3 + x^3 + y^3 = 0; \\ zxy = 0. \end{cases}$$

Se per esempio $y = 0$, si hanno i punti di flesso $[1, -1, 0]$, $[1, \omega, 0]$, $[1, \omega^{-1}, 0]$, dove ω è una radice terza primitiva di -1 . Gli altri sei punti si ricavano permutando le coordinate di questi tre.

Esercizio 2.6.6. Sia \mathcal{C} una cubica liscia: se $P_1, P_2 \in \mathcal{C}$ sono due punti di flesso distinti, allora $L(P_1, P_2)$ interseca \mathcal{C} in un terzo punto di flesso.

Soluzione. Mettiamo \mathcal{C} in forma di Weierstrass rispetto al punto di flesso $O = P_1$. Per la proposizione precedente, si avrà $P_2 = [1, a, b]$ con $b \neq 0$, inoltre $P_3 = [1, a, -b]$ è un altro punto di flesso. È immediato osservare che $P_3 \in L(P_1, P_2)$, e per Bézout si ha $\#(\mathcal{C}, L(P_1, P_2)) = 3$. \square

Esercizio 2.6.7. Sia \mathcal{C} una cubica liscia: se $P_1, P_2 \in \mathcal{C}$ sono due punti di flesso distinti, allora esiste una proiettività φ di \mathbb{P}^2 che lascia invariata \mathcal{C} e scambia P_1 con P_2 .

Soluzione. Sia O il terzo punto di intersezione di $L(P_1, P_2)$ con \mathcal{C} (che esiste ed è un punto di flesso per l'esercizio precedente). Mettiamo \mathcal{C} in forma di Weierstrass rispetto ad O : i punti dati saranno della forma $P_1 = [1, a, b]$ e $P_2 = [1, a, -b]$ con $b \neq 0$, e la cubica sarà definita da un'equazione della forma $F(z, x, y) = zy^2 - G(z, x)$. Consideriamo la proiettività $\varphi : [z, x, y] \mapsto [z, x, -y]$: è facile verificare che φ scambia P_1 con P_2 , e inoltre $\varphi(F) = F$. \square

Ci chiediamo quante siano le rette che coinvolgono i flessi di una cubica liscia. Per l'Esercizio 2.6.6 sappiamo che, contando una retta per ogni coppia di flessi, ciascuna retta sarebbe stata contata tre volte. Dato che i flessi sono 9, le rette saranno $\frac{1}{3} \binom{9}{2} = 12$. Si può verificare che i 9 punti e le 12 rette formano una configurazione isomorfa al piano affine su $\mathbb{K} = \mathbb{F}_3$.

Esercizio 2.6.8. Sia \mathcal{C} una cubica liscia, sia O un punto di flesso, sia $f(x, y) = y^2 - p(x)$ la forma di Weierstrass di \mathcal{C} rispetto a O , siano $\alpha_1, \dots, \alpha_3$ le radici di $p(x)$ e siano $P_i = [1, \alpha_i, 0]$ per $i = 1, \dots, 4$. Allora le rette $L(P_i, O)$ sono tangenti a \mathcal{C} in P_i e la retta $z = 0$ è tangente in O ; inoltre non ci sono altre rette proiettive tangenti a \mathcal{C} e passanti per O .

Soluzione. La retta $z = 0$ è la tangente del flesso O per costruzione; per le altre rette, osserviamo che nella carta affine della forma di Weierstrass sono definite dalle equazioni $x - \alpha_i$ per $i = 1, \dots, 4$, ed è immediato verificare che si tratta di rette tangenti.

Mostriamo che non ce ne sono altre. Dato che O è l'unico punto di \mathcal{C} all'infinito, il punto di tangenza andrà cercato nella carta affine. Sia $P = [1, a, b]$ tale punto: si verifica facilmente che la parte affine della retta $\ell := L(P, O)$ è la retta verticale $x = a$, che interseca \mathcal{C} in due punti distinti, a meno che $p(a) = 0$. Se $p(a) = 0$, allora ℓ è una delle rette considerate in precedenza. In caso contrario, la retta non può essere tangente, in quanto ha tre punti d'intersezione distinti P, Q, O con \mathcal{C} : per il teorema di Bézout le intersezioni sono esattamente 3, con molteplicità. \square

Riprendiamo quanto già richiamato sul birapporto in 1.1.3. Se \mathcal{C} è una cubica liscia e O un suo punto di flesso, abbiamo visto nell'Esercizio 2.6.8 che ci sono esattamente quattro rette proiettive distinte r_1, \dots, r_4 passanti per O e tangenti a \mathcal{C} . Osserviamo che il modulo $j(r_1, \dots, r_4)$ non dipende dalla scelta di O tra i flessi di \mathcal{C} : dato un altro flesso O' e le relative tangenti r'_1, \dots, r'_4 , possiamo considerare una proiettività che scambia O con O' lasciando invariata la cubica (Esercizio 2.6.7); dato che il modulo è un invariante proiettivo, avremo $j(r'_1, \dots, r'_4) = j(r_1, \dots, r_4)$.

Definizione 2.6.9. L'osservazione precedente consente di definire il *modulo* di una cubica piana proiettiva liscia \mathcal{C} come $j(\mathcal{C}) = j(r_1, r_2, r_3, r_4)$.

Proposizione 2.6.10. Se $y^2 = x(x - 1)(x - \lambda)$ è la forma di Legendre di una cubica liscia rispetto ad un punto di flesso O , allora $j(\mathcal{C}) = j(\lambda)$.

Dimostrazione. Analogamente alla soluzione dell'Esercizio 2.6.8, si osserva che le tangenti a \mathcal{C} passanti per O sono $x = 0$, $x = z$, $x = \lambda z$ e $z = 0$. Scegliendo $\ell = \{y = 0\}$, i punti d'intersezione con le quattro rette sono

$$P_1 = [1, 0, 0], \quad P_2 = [1, 1, 0], \quad P_3 = [1, \lambda, 0], \quad P_4 = [0, 1, 0],$$

che identificando ℓ con $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ hanno coordinate affini rispettivamente $0, 1, \lambda, \infty$. Dato che il modulo è invariante per permutazione dei punti, si ha

$$j(\mathcal{C}) = j(0, 1, \infty, \lambda) = j(\text{Bir}(0, 1, \infty, \lambda)) = j(\lambda). \quad \square$$

Come ci si può aspettare dalla proposizione precedente, il modulo ci permette di caratterizzare le cubiche piane proiettive lisce:

Teorema 2.6.11. Due cubiche lisce $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ sono proiettivamente equivalenti se e solo se $j(\mathcal{C}_1) = j(\mathcal{C}_2)$. Inoltre $\forall \alpha \in \text{Im}(j)$ esiste una cubica \mathcal{C} tale che $j(\mathcal{C}) = \alpha$.

Dimostrazione. Se $\alpha = j(\lambda)$ per qualche $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$, basta prendere una cubica \mathcal{C}^* di equazione $y^2 = x(x - 1)(x - \lambda)$ in qualche carta affine, per avere $j(\mathcal{C}^*) = \alpha$.

Se \mathcal{C}_1 è un'altra cubica liscia tale che $j(\mathcal{C}_1) = \alpha$, sia O un suo flesso e siano r_1, \dots, r_4 le quattro rette tangenti a \mathcal{C}_1 passanti per O . Supponiamo wlog che r_3 sia tangente di flesso e che $\text{Bir}(r_1, \dots, r_4) = \lambda$ (per farlo, basta ordinare le rette in modo che il birapporto sia quello, quindi portare la tangente di flesso in r_3 tramite un doppio scambio, che non altera il birapporto). Osserviamo che i tre punti di tangenza che non sono di flesso sono sempre allineati (basta vederli

nella forma di Legendre), denotiamo con ℓ tale retta. Se denotiamo con $0, 1, \infty, \lambda$ le solite quattro rette tangenti a \mathcal{C}^* e passanti per il flesso all'infinito, e con s la retta $y = 0$, abbiamo $\text{Bir}(r_1, \dots, r_4) = \lambda = \text{Bir}(0, 1, \infty, \lambda)$, quindi esiste una proiettività φ del piano proiettivo che manda rispettivamente r_1, r_2, r_3, r_4, ℓ in $0, 1, \infty, \lambda, s$ (vedi Corollario 1.1.9).

Occorre dimostrare che φ manda \mathcal{C}_1 in \mathcal{C}^* : in questo modo avremmo concluso, in quanto la scelta di \mathcal{C}_1 è stata generica tra le cubiche lisce di modulo α . Chiaramente φ manda anche i punti di tangenza delle rette di \mathcal{C}_1 in quelli rispettivi di \mathcal{C}^* . Impostando i conti sull'equazione della parte affine di $\varphi(\mathcal{C}_1)$, ci si riesce a ridurre a $f(x, y) = y^2 - \alpha x(x - 1)(x - \lambda)$, che come già visto si può ridurre alla forma di Legendre cercata. \square

2.7 Gruppo abeliano sui punti di una cubica liscia

Sia per ora \mathbb{K} un campo generico, sia \mathcal{C} una cubica proiettiva piana liscia. Dati $A, B \in \mathcal{C}$, sia

$$\ell := \begin{cases} L(A, B) & \text{se } A \neq B, \\ \tau_A(\mathcal{C}) & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove con $\tau_A(\mathcal{C})$ si è indicata la retta tangente a \mathcal{C} in A . L'equazione di $\mathcal{C} \cap \ell$ avrà due zeri in corrispondenza dei punti A e B (doppio se $A = B$), dunque avrà necessariamente un terzo zero in corrispondenza di un punto che denoteremo con $\mathcal{R}(A, B)$.

Definizione 2.7.1. Fissato un punto $O \in \mathcal{C}$, definiamo l'operazione di somma formale rispetto a O tra i punti della curva come

$$A \oplus B := \mathcal{R}(O, \mathcal{R}(A, B)).$$

Si verifica che quest'operazione dà a \mathcal{C} una struttura di gruppo abeliano tale che

- L'elemento neutro è O ;
- L'inverso di A è dato da $\mathcal{R}(A, \mathcal{R}(O, O))$.

Questa costruzione si riesce a fare soltanto per curve di questo grado. L'unica verifica complicata è quella dell'associatività: la sua dimostrazione andrà divisa in due parti.

Osservazione 2.7.2. Per ora ci limitiamo a mostrare che la proprietà è soddisfatta per “quasi tutte” le terne di punti $A, B, C \in \mathcal{C}$; per estendere il risultato a tutte le terne di punti, utilizzeremo strumenti che introdurremo più avanti. Definiamo i seguenti punti:

$$\begin{aligned} R &:= \mathcal{R}(A, B), & P &:= \mathcal{R}(B, C), \\ \bar{R} &:= \mathcal{R}(R, O), & \bar{P} &:= \mathcal{R}(P, O), \\ S &:= \mathcal{R}(\bar{R}, C), & Q &:= \mathcal{R}(\bar{P}, A). \end{aligned}$$

Facendo i conti, si osserva che $(A \oplus B) \oplus C = \mathcal{R}(O, S)$ e $A \oplus (B \oplus C) = \mathcal{R}(O, Q)$, dunque vale l'uguaglianza se e solo se $S = Q$.

Supponiamo che i punti $A, B, C, O, R, \bar{R}, P, \bar{P}, S$ siano tutti distinti (in qualche senso, questo risulterà poi essere un insieme denso nelle configurazioni possibili). Definiamo le due cubiche riducibili

$$\mathcal{C}_1 := L(A, B) + L(P, O) + L(\bar{R}, C), \quad \mathcal{C}_2 := L(B, C) + L(R, O) + L(\bar{P}, A),$$

e osserviamo che

$$A, B, C, O, R, \bar{R}, P, \bar{P}, S \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}_1, \quad A, B, C, O, R, \bar{R}, P, \bar{P}, Q \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}_2.$$

Dato che \mathcal{C} è liscia e \mathcal{C}_1 no, per il teorema di Bézout l'intersezione $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}_1$ è costituita esattamente dai nove punti distinti soprastanti. Applicando il Corollario 2.4.12, deduciamo infine $S = Q$.

Consideriamo da qui a fine sezione il caso $\text{char } \mathbb{K} \neq 2, 3$ e $\mathbb{K} = \bar{\mathbb{K}}$. Data una cubica proiettiva piana liscia \mathcal{C} , sceglieremo come punto O , rispetto al quale definire la somma, un punto di flesso di \mathcal{C} : si verifica che questo implica $\mathcal{R}(O, O) = O$, il che semplifica i conti. In queste ipotesi si osserva che $A \oplus B \oplus C = O$ se e solo se A, B, C sono allineati in senso lato (cioè se $C = \mathcal{R}(A, B)$).

In particolare, si avrà $2A = O$ se e solo se $A \oplus A \oplus O = O$, o equivalentemente se $O \in \tau_A(\mathcal{C})$. Gli elementi che soddisfano questa relazione sono i punti di tangenza delle solite quattro rette (vedi Esercizio 2.6.8), e formano un sottogruppo isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Cercando i punti tali che $3A = O$, questi sono invece i nove flessi di \mathcal{C} , che formano un sottogruppo isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

Questo risultato si può generalizzare (cioè ci aspettiamo che gli $A \in \mathcal{C}$ tali che $mA = 0$ formino un sottogruppo isomorfo a $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$), ma non abbiamo i mezzi per dimostrarlo in questo corso.

Capitolo 3

Topologia di Zariski e Nullstellensatz

3.1 Insiemi algebrici affini, ideali associati e Nullstellensatz

In questa sezione \mathbb{K} sarà un campo generico e R sarà l'anello di polinomi $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] = \mathbb{K}[\mathbf{x}]$.

Definizione 3.1.1. Se $S \subseteq R$, definiamo l'insieme algebrico associato a S come

$$V_{\mathbb{A}^n}(S) := \bigcap_{f \in S} V(f) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{A}^n : \forall f \in S \ f(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Qualora non ci sia rischio di ambiguità, indicheremo semplicemente $V(S)$ o $V_{\mathbb{A}}(S)$. Se S è indicizzato come $S = \{f_i : i \in \mathcal{I}\}$, denoteremo a volte $V(S) = V(f_i : i \in \mathcal{I})$.

Definizione 3.1.2. Se $X \subseteq \mathbb{A}^n$, definiamo il suo *ideale associato* come

$$I(X) := \{f \in R : \forall \mathbf{x} \in X \ f(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Si verifica immediatamente che I è effettivamente un ideale di R .

Osservazione 3.1.3. Sono di verifica immediata le seguenti proprietà:

- (P1) Le mappe V e I invertono le inclusioni.
- (P2) Se $S \subseteq R$ e $J := \langle S \rangle_R$ è l'ideale generato da S , allora $V(S) = V(J) = V(\sqrt{J})$.
- (P3) Se $S, T \subseteq R$, allora $V(S) \cup V(T) = V(ST)$.
- (P4) Se \mathcal{S} è una famiglia di sottoinsiemi di R , allora $\bigcap_{S \in \mathcal{S}} V(S) = V(\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S)$.
- (P5) Se \mathcal{J} è una famiglia di ideali di R , allora $\bigcap_{J \in \mathcal{J}} V(J) = V(\sum_{J \in \mathcal{J}} J)$.
- (P6) Se \mathcal{X} è una famiglia di sottoinsiemi di \mathbb{A}^n , allora $I(\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X) = \bigcap_{X \in \mathcal{X}} I(X)$.
- (P7) Se $X \subseteq \mathbb{A}^n$, allora $I(X)$ è un ideale radicale.
- (P8) Se $S \subseteq \{0\}$, allora $V(S) = \mathbb{A}^n$. Se $\#\mathbb{K} = \infty$, allora vale anche il viceversa.
- (P9) Se $J \subseteq R$ è un ideale, allora $\sqrt{J} \subseteq I(V(J))$.

(P10) Se $X \subseteq \mathbb{A}^n$, allora $V(I(X))$ è il più piccolo insieme algebrico contenente X .

(P11) Valgono $I \circ V \circ I = I$ e $V \circ I \circ V = V$.

(P12) Se $X \subseteq \mathbb{A}^n$, allora $X = \emptyset$ se e solo se $I(X) = R$.

(P13) Se $\varphi : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ è un'affinità, allora per ogni $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $S \subseteq R$ si hanno

$$I(\varphi(X)) = \varphi(I(X)), \quad V(\varphi(S)) = \varphi(V(S)),$$

dove se $f \in R$ si intende come al solito $\varphi(f) := f \circ \varphi$.

Osservando che un'affinità $\varphi : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ induce un isomorfismo di \mathbb{K} -algebre su R , in particolare φ manda ideali in ideali, conservando primalità e massimalità (e lo stesso vale per φ^{-1}).

Osservazione 3.1.4. Usando le proprietà precedenti, è facile verificare che V induce una biiezione tra l'insieme degli ideali associati e quello degli insiemi algebrici, con inversa I . Siano infatti $\mathcal{I} := \{I(X) : X \subseteq \mathbb{A}^n\}$ e $\mathcal{V} := \{V(S) : S \subseteq R\}$: se $J = I(X) \in \mathcal{I}$, allora $I \circ V(J) = I(V(I(X))) = I(X) = J$; d'altra parte, se $X = V(S)$, allora $V \circ I(X) = V(I(V(S))) = V(S) = X$.

Osservazione 3.1.5. Dato che R è noetheriano (per il teorema della base di Hilbert), osserviamo che per ogni $S \subseteq R$ si ha $\langle S \rangle_R = (g_1, \dots, g_r)$. Ogni g_i si ottiene come combinazione R -lineare di elementi di S , dunque esistono finiti $f_j \in S$ tali che $\langle S \rangle_R = (f_1, \dots, f_s)$. In particolare, dato che $V(S) = V(\langle S \rangle_R) = V(f_1, \dots, f_s)$, ogni insieme algebrico può essere definito tramite un numero finito di polinomi.

Proposizione 3.1.6. Se $P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$, allora valgono $I(P) = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$, $I(P) \in \text{SpecMax } R$ e $V(I(P)) = \{P\}$.

Dimostrazione. Se $P = \mathbf{0}$ è tutto facile. Gli altri casi si riducono a $P = \mathbf{0}$ per traslazione. \square

Corollario 3.1.7. Se $\mathfrak{m} \in \text{SpecMax } R$, allora $V(\mathfrak{m}) = \emptyset$ oppure $V(\mathfrak{m}) = \{P\}$ e $\mathfrak{m} = I(P)$.

Dimostrazione. Supponiamo $V(\mathfrak{m}) \neq \emptyset$. Sia $P \in V(\mathfrak{m})$: per le proprietà precedenti vale

$$\mathfrak{m} = \sqrt{\mathfrak{m}} \subseteq I(V(\mathfrak{m})) \subseteq I(P).$$

Per la proposizione precedente si ricava immediatamente $\mathfrak{m} = I(P)$ e $V(\mathfrak{m}) = \{P\}$. \square

Teorema 3.1.8 (Nullstellensatz di Hilbert). Sia \mathbb{K} un campo, sia $R := \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Allora le seguenti proprietà sono equivalenti:

1. Se $J \subseteq R$ è un ideale tale che $V(J) = \emptyset$, allora $J = R$;
2. Se $\mathfrak{m} \in \text{SpecMax } R$, allora $\exists P \in \mathbb{A}^n$ tale che $\mathfrak{m} = I(P)$;
3. Se $J \subseteq R$ è un ideale, allora $I(V(J)) = \sqrt{J}$;
4. \mathbb{K} è algebricamente chiuso.

Dimostrazione.

(3 \Rightarrow 2) Per il Corollario 3.1.7, basta mostrare che $V(\mathfrak{m}) \neq \emptyset$. In caso contrario, si avrebbe $\mathfrak{m} = \sqrt{\mathfrak{m}} = I(V(\mathfrak{m})) = I(\emptyset) = R$, che è assurdo.

(2 \Rightarrow 1) Supponiamo per assurdo $V(J) = \emptyset$ ma $J \neq R$. Allora $\exists \mathfrak{m} \in \text{SpecMax } R$ tale che $J \subseteq \mathfrak{m}$, da cui $\emptyset = V(J) \supseteq V(\mathfrak{m}) = V(I(P)) = \{P\}$ per la Proposizione 3.1.6, che è assurdo.

(1 \Rightarrow 3) Abbiamo già visto $\sqrt{J} \subseteq I(V(J))$, manca da dimostrare l'altra inclusione.

Sia $g \in I(V(J))$, sia $\tilde{J} := (J, yg - 1) \subseteq R[y]$. Osserviamo che $(\mathbf{x}, y) \in V(\tilde{J})$ implicherebbe $\mathbf{x} \in V(J)$ e quindi $g(\mathbf{x}) = 0$; tuttavia si dovrebbe avere anche $yg(\mathbf{x}) = 1$, che è assurdo. Dunque $V(\tilde{J}) = \emptyset$ e quindi $\tilde{J} = R[y]$. In particolare $1 \in \tilde{J}$, da cui ricaviamo un'equazione della forma

$$\sum_{i=1}^s a_i f_i + b(yg - 1) = 1, \quad a_i, b \in R[y], \quad f_i \in J.$$

Sostituendo $y = g^{-1}$ (formalmente si passa al quoziente $R[y]/(yg - 1)$) otteniamo

$$\sum_{i=1}^s a_i(\mathbf{x}, g^{-1}(\mathbf{x})) f_i(\mathbf{x}) = 1.$$

A meno di moltiplicare per un denominatore comune, che sarà una potenza di g , otteniamo la relazione

$$g^N = \sum_{i=1}^s \tilde{a}_i(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x}), \quad \tilde{a}_i \in R,$$

da cui $g \in \sqrt{J}$.

(1 \Rightarrow 4) Supponiamo per assurdo che \mathbb{K} non sia algebricamente chiuso: allora $\exists \alpha \in \overline{\mathbb{K}} \setminus \mathbb{K}$. Tale α ammetterà un polinomio minimo $f(x_1)$ di grado almeno 2, irriducibile in $\mathbb{K}[x_1]$. In particolare f non ammette zeri in \mathbb{K} , ma neanche in \mathbb{A}^n (considerandolo come polinomio in R). Dunque $V(f) = \emptyset$, da cui $(f) = R$, che è assurdo.

(4 \Rightarrow 2) Osserviamo che $F := R/\mathfrak{m}$ è un campo, e in più eredita da R la struttura di \mathbb{K} -algebra finitamente generata. A questo punto, richiamiamo (senza dimostrarlo) il seguente risultato:

Teorema 3.1.9 (Nullstellensatz algebrico). Siano $\mathbb{K} \subseteq F$ due campi, supponiamo che F sia una \mathbb{K} -algebra finitamente generata. Allora F è un'estensione finita (in particolare algebrica) di \mathbb{K} .

Applicando il Nullstellensatz algebrico all'estensione $\mathbb{K} \subseteq F$, dato che $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, otteniamo $F = \mathbb{K}$. Sia ora $\pi : R \twoheadrightarrow F$ la mappa di proiezione, siano $a_i := \pi(x_i)$ per $i = 1, \dots, n$, sia $P := (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$: banalmente π manda $I(P) = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ in 0, dunque $I(P) \subseteq \mathfrak{m}$. Dato che anche $I(P)$ è massimale, possiamo concludere $\mathfrak{m} = I(P)$. \square

Osservazione 3.1.10. Una conseguenza del Nullstellensatz di Hilbert è che, se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, allora gli ideali associati coincidono con gli ideali radicali. In particolare, V induce una biiezione tra ideali radicali e insiemi algebrici, con inversa I . Analogamente, si ha una bigezione tra ideali massimali e punti dello spazio affine.

3.2 Topologia di Zariski sullo spazio affine

Anche in questa sezione \mathbb{K} sarà un campo generico e $R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] = \mathbb{K}[\mathbf{x}]$.

Definizione 3.2.1. Definiamo la *topologia di Zariski* su \mathbb{A}^n come quella i cui chiusi sono gli insiemi algebrici.

Verificare gli assiomi di topologia sui chiusi di \mathcal{Z} è piuttosto semplice, ricordando le proprietà dell'Osservazione 3.1.3. D'ora in poi, quando parleremo di insiemi chiusi e insiemi aperti, lo faremo rispetto alla topologia di Zariski, quando non diversamente specificato.

Grazie alle proprietà viste sulle affinità, si verifica facilmente che sono degli omeomorfismi anche per la topologia di Zariski.

Proposizione 3.2.2. Sia $i : \mathbb{A}^k \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ una mappa affine iniettiva: allora la topologia su $i(\mathbb{A}^k)$, indotta per restrizione da quella di \mathbb{A}^n , coincide con quella indotta da i .

Dimostrazione (facoltativa). Osserviamo che $i(\mathbb{A}^n)$ è un sottospazio affine di \mathbb{A}^n , in particolare è un chiuso di Zariski. Ci si convince facilmente che, a meno di applicare un'opportuna affinità, possiamo ridurci al caso in cui $i(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots)$, in particolare $i(\mathbb{A}^k) = V(x_{k+1}, \dots, x_n)$.

Se X è un chiuso di \mathbb{A}^k , allora $X = V(S)$ con $S \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_k]$. Si verifica facilmente

$$\begin{aligned} i(X) &= \{(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \in \mathbb{A}^n : \forall f \in S \ f(\mathbf{x}) = 0\} = \\ &= V_{\mathbb{A}^n}(S) \cap V_{\mathbb{A}^n}(x_{k+1}, \dots, x_n) = V_{\mathbb{A}^n}(S \cup \{x_{k+1}, \dots, x_n\}), \end{aligned}$$

dunque $i(X)$ è un chiuso di \mathbb{A}^n .

Se $X \subseteq \mathbb{A}^k$ e $i(X)$ è un chiuso di \mathbb{A}^n , allora $i(X) = V(J) \subseteq V(x_{k+1}, \dots, x_n)$, dove J è un ideale di $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. In particolare si ha

$$\begin{aligned} i(X) &= V(J) \cap V(x_{k+1}, \dots, x_n) = V(J + (x_{k+1}, \dots, x_n)) = \\ &= \{(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \in \mathbb{A}^n : \forall f \in J \ f(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = 0\} \\ \Rightarrow X &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{A}^k : \forall f \in J \ f(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = 0\} = V_{\mathbb{A}^k}(\tilde{J}), \end{aligned}$$

dove $\tilde{J} := \{\tilde{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{0}), \ f \in J\}$, dunque X è un chiuso di \mathbb{A}^k . □

Proposizione 3.2.3. La topologia di Zariski è sempre T1 (equivalentemente, i punti sono chiusi).

Dimostrazione. $\forall P \in \mathbb{A}^n$ si ha $V(I(P)) = \{P\}$ (vedi Proposizione 3.1.6). □

Proposizione 3.2.4. Se X è un chiuso di \mathbb{A}^1 , allora $X = \mathbb{A}^1$ oppure $\#X < \infty$.

Dimostrazione. Sia $X = V(S)$: se $S = \emptyset$, allora $X = \mathbb{A}^1$. In caso contrario, sia $f \in S$: in dimensione 1 i polinomi hanno finiti zeri, dunque $\#V(f) < \infty$, ma si ha anche $X = V(S) \subseteq V(f)$, da cui $\#X < \infty$. □

Proposizione 3.2.5. Se $\#\mathbb{K} < \infty$, allora la topologia di Zariski è discreta; in caso contrario, non è T2.

Dimostrazione. Se $\#\mathbb{K} < \infty$, allora \mathbb{A}^n ha finiti punti, tutti chiusi (T1), quindi la topologia di Zariski è discreta. Se $\#\mathbb{K} = \infty$, separiamo due casi:

- In dimensione 1, mostriamo che due aperti non vuoti si intersecano sempre. Passando al complementare vogliamo verificare che, dati due chiusi $X, Y \neq \mathbb{A}^1$ qualsiasi, allora $X \cup Y \neq \mathbb{A}^1$. Per la Proposizione 3.2.4 si ha $\#X, \#Y < \infty$, mentre $\#\mathbb{A}^1 = \infty$.
- In dimensione maggiore, consideriamo un'immersione $i : \mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{A}^n$: sottospazi topologici di spazi T2 dovrebbero essere ancora T2, tuttavia per la Proposizione 3.2.2 $i(\mathbb{A}^1) \cong \mathbb{A}^1$, che non è T2. □

Definizione 3.2.6. Al variare di $f \in R$, denoteremo con $U_f = \mathbb{A}^n \setminus V(f)$ gli *aperti standard* (o *aperti principali*) della topologia di Zariski su \mathbb{A}^n .

Esercizio 3.2.7. Verificare che gli aperti principali formano una base per \mathcal{Z} .

Soluzione. Passando ai complementari, la tesi è equivalente ad avere che ogni chiuso sia intersezione di supporti di ipersuperfici. Questo è verificato per la definizione della topologia di Zariski. \square

Proposizione 3.2.8. La topologia di Zariski è quasi-compatta¹

Dimostrazione. Uno spazio topologico è quasi-compatto se, da ogni famiglia di chiusi con intersezione vuota, possiamo estrarre una sottofamiglia finita che abbia ancora intersezione vuota. Nella topologia di Zariski, questo è equivalente ad avere che

$$\forall S \subseteq R \text{ tale che } \bigcap_{f \in S} V(f) = \emptyset \quad \exists f_1, \dots, f_s \in S : \bigcap_{i=1}^s V(f_i) = \emptyset.$$

Si conclude tramite l'Osservazione 3.1.5. \square

La proprietà P9 ha la conseguenza che $V \circ I$ corrisponde alla chiusura topologica, rispetto alla topologia di Zariski. In formula, $\forall X \subseteq \mathbb{A}^n \quad V(I(X)) = \overline{X}^{\mathcal{Z}}$.

Esercizio 3.2.9. Verificare che i chiusi di \mathbb{A}^2 sono soltanto le unioni finite di ipersuperfici e punti, e \mathbb{A}^2 stesso.

Soluzione. Se X è un chiuso, in particolare $X = V(f_1, \dots, f_N)$ con $f_1, \dots, f_N \in R$. Per $N = 0$ abbiamo $X = \mathbb{A}^2$, per $N = 1$ abbiamo $X = V(f)$; per $N \geq 2$ lavoriamo per induzione su N . Si ha infatti $X = V(f_1, \dots, f_{N-1}) \cap V(f_N)$, ma

$$V(f_1, \dots, f_{N-1}) = Y \cup V(g_1) \cup \dots \cup V(g_M) = Y \cup V(g),$$

dove $\#Y < \infty$ e $g = g_1 \cdots g_M \in R$, da cui

$$X = (Y \cap V(f_N)) \cup (V(g) \cap V(f_N)) =: Y_1 \cup V(g, f_N).$$

Chiaramente $\#Y_1 < \infty$, mentre $V(g, f_N)$ è l'intersezione di due curve piane. Se $h = \gcd(g, f_N)$, scriviamo $g = h\tilde{g}$, $f_N = h\tilde{f}$ e otteniamo $V(g, f_N) = V(h) \cup V(\tilde{g}, \tilde{f})$, dove necessariamente $\#V(\tilde{g}, \tilde{f}) < \infty$ per il teorema di Bézout. \square

I chiusi di \mathbb{A}^3 (e quelli in dimensioni maggiori) sono molto più complicati da descrivere.

Esempio 3.2.10 (cubica gobba). Sia $\mathcal{C}_3 = V(y - x^2, z - xy)$ un chiuso di \mathbb{A}^3 : si osserva facilmente che coincide con il grafico della funzione $\mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^2 \mid t \mapsto (t^2, t^3)$, in particolare $\#\mathcal{C}_3 = \infty$.

Tuttavia \mathcal{C}_3 non è un'ipersuperficie: infatti se fosse $\mathcal{C}_3 = V(f)$ (wlog f ridotto), si avrebbe $f \mid y - x^2, z - xy$, tuttavia si osserva facilmente (lemma di Gauss) che $y - x^2$ e $z - xy$ sono irriducibili in $\mathbb{K}[z, x, y]$.

¹Cioè compatta ma non T2. Alcuni autori parlano di compattezza soltanto per spazi T2; noi no, ma preferiamo evitare possibili ambiguità.

3.2.1 Spazi topologici noetheriani

Definizione 3.2.11. Uno spazio topologico si dice *noetheriano* se vale la DCC sui chiusi, o equivalentemente la ACC sugli aperti.

Non tutti gli spazi topologici sono noetheriani: per esempio si verifica facilmente che la topologia euclidea su \mathbb{R} non lo è (gli intervalli chiusi della forma $[0, 2^{-n}]$ non soddisfano la DCC).

Proposizione 3.2.12. La topologia di Zariski è noetheriana.

Dimostrazione. Se $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots$ è una catena discendente di chiusi, allora $I(Y_1) \subseteq I(Y_2) \subseteq \dots$ è una catena ascendente di ideali. Dato che R è noetheriano, vale la ACC sugli ideali, quindi questa catena è stazionaria. In particolare anche $V(I(Y_1)) \supseteq V(I(Y_2)) \supseteq \dots$ è stazionaria, ma questa coincide con la catena iniziale, perché $V(I(Y_i)) = \overline{Y_i} = Y_i$. \square

Definizione 3.2.13. Dato X spazio topologico noetheriano e $Y \subseteq X$ chiuso non vuoto, diciamo che Y è *riducibile* se $\exists Z, W \subsetneq Y$ chiusi tali che $Y = Z \cup W$ (in particolare $Z, W \neq \emptyset$).

Definizione 3.2.14. Dato X spazio topologico noetheriano e $Y \subseteq X$ chiuso non vuoto, una sua *decomposizione irriducibile* è una scrittura della forma $Y = Z_1 \cup \dots \cup Z_k$, dove gli Z_i sono chiusi irriducibili. La decomposizione si dirà *minimale* se $\forall i \neq j \ Z_i \not\subseteq Z_j$.

Da una decomposizione irriducibile possiamo sempre ridurci ad una decomposizione minimale, scartando i chiusi superflui (sono finiti, quindi si può procedere induttivamente).

I chiusi irriducibili si comportano in modo simile agli elementi irriducibili di un anello, come mostra il seguente lemma.

Lemma 3.2.15. Sia X uno spazio topologico noetheriano, sia $Y \subseteq X$ un chiuso non vuoto. Allora Y è irriducibile se e solo se, per ogni scelta finita di chiusi Z_1, \dots, Z_r tali che $Y \subseteq Z_1 \cup \dots \cup Z_r$, si ha $Y \subseteq Z_j$ per qualche j .

Dimostrazione. Supponiamo che Y sia irriducibile: vale $Y = Y \cap (\bigcup_{j=1}^r Z_j) = \bigcup_{j=1}^r (Y \cap Z_j)$, dunque per irriducibilità esiste j tale che $Y \cap Z_j = Y$, cioè $Y \subseteq Z_j$.

D'altra parte, se Y fosse riducibile, avremmo $Y = Y_1 \cup Y_2$ con $Y_1, Y_2 \subsetneq Y$; scegliendo banalmente $Z_1 = Y_1$ e $Z_2 = Y_2$, è chiaro che non si può avere $Y \subseteq Z_j$. \square

Teorema 3.2.16. Sia X uno spazio topologico noetheriano, $Y \subseteq X$ un chiuso non vuoto. Allora Y ammette sempre una decomposizione irriducibile; inoltre la sua decomposizione minimale è unica (a meno dell'ordine dei fattori).

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che la famiglia

$$\Sigma = \{Y \subseteq X \text{ chiuso non vuoto} \mid Y \text{ non ammette decomposizione irriducibile}\}$$

non sia vuota. Dotando Σ dell'ordinamento parziale dato dall'inclusione discendente (cioè $Y_1 \leq Y_2$ se $Y_1 \supseteq Y_2$), si verifica (tramite noetherianità) che Σ soddisfa le ipotesi del lemma di Zorn, dunque troviamo $Y_0 \in \Sigma$ minimale (insiemicamente parlando).

Dato che $Y_0 \neq \emptyset$ non ammette decomposizione, in particolare non è irriducibile, quindi $Y_0 = Z \cup W$ con $Z, W \subsetneq Y_0$. Tuttavia Z e W ammettono decomposizione per minimalità di Y_0 , e combinandole ne otteniamo una per Y_0 , che è assurdo.

Siano ora $Z_1 \cup \dots \cup Z_r$ e $W_1 \cup \dots \cup W_s$ due decomposizioni minimali di Y . Applicando il Lemma 3.2.15, per ogni Z_i esiste W_j che lo contiene e viceversa, dunque fissato i troviamo j e i_1 che soddisfano $Z_i \subseteq W_j \subseteq Z_{i_1}$. Per minimalità si ha necessariamente $i = i_1$, da cui $Z_i = W_j$. Ripetendo il ragionamento per tutti gli indici, otteniamo una biiezione tra gli Z_i e i W_j , legati da uguaglianza. \square

Proposizione 3.2.17. Sia $X \neq \emptyset$ un chiuso di \mathbb{A}^n . Allora X è irriducibile se e solo se $I(X)$ è un ideale primo.

Dimostrazione. Mostriamo che X è riducibile se e solo se $I(X)$ non è primo.

(\Rightarrow) Se $X = Y \cup Z$ con $Y, Z \subsetneq X$ chiusi, allora $I(X) \subsetneq I(Y), I(Z)$ (questo per esempio per l'Osservazione 3.1.4), dunque possiamo prendere $f \in I(Y) \setminus I(X)$ e $g \in I(Z) \setminus I(X)$. Inoltre si ha $I(X) = I(Y) \cap I(Z)$ da cui $fg \in I(X)$, dunque $I(X)$ non può essere primo.

(\Leftarrow) Se $I(X) \not\subseteq \text{Spec}(R)$, allora $\exists f, g \notin I(X)$ tali che $fg \in I(X)$. In particolare si ottiene $X \subseteq V(fg) = V(f) \cup V(g)$, da cui

$$X = (V(f) \cup V(g)) \cap X = (V(f) \cap X) \cup (V(g) \cap X).$$

Per concludere basta mostrare che $V(f) \cap X \neq X$ (e lo stesso per $V(g)$), cioè che $V(f) \not\supseteq X$. Questo segue facilmente da $f \notin I(X)$. \square

Osserviamo che, se $\#\mathbb{K} = \infty$, per il principio d'identità dei polinomi vale $I(\mathbb{A}^n) = (0)$. Dato che R è un dominio, $(0) \in \text{Spec}(R)$, dunque \mathbb{A}^n è irriducibile.

Se inoltre $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, abbiamo già visto per il Nullstellensatz di Hilbert che V e I inducono una bigezione tra ideali radicali e insiemi algebrici (cioè chiusi affini). In particolare, avremo una bigezione anche tra ideali primi e chiusi irriducibili.

Esercizio 3.2.18. Sia $\mathcal{I} = [f]$ un'ipersuperficie ridotta di \mathbb{A}^n con supporto $X = V(f)$. Allora \mathcal{I} è riducibile se e solo se X è riducibile.

Soluzione. \mathcal{I} è riducibile se e solo se f è riducibile, se e solo se $(f) \notin \text{Spec}(R)$. Per la proposizione precedente, questo è equivalente ad avere X riducibile. \square

Il Lemma 3.2.15 ha delle somiglianze con il prime avoidance lemma. Questo risulta evidente nello svolgimento del seguente esercizio:

Esercizio 3.2.19. Sia X un chiuso di \mathbb{A}^n , sia $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$ una sua decomposizione irriducibile minimale: allora $I(X) = I(X_1) \cap \dots \cap I(X_r)$, dove gli $I(X_i)$ sono primi distinti minimali (nel senso che $I(X_i) \not\supseteq \bigcap_{j \neq i} I(X_j)$ per ogni i).

Soluzione. L'unica parte immediata è la dimostrazione della minimalità. Supponiamo per assurdo che $I(X_i) \supseteq \bigcap_{j \neq i} I(X_j)$ per qualche i : passando alle varietà otteniamo $X_i \subseteq \bigcup_{j \neq i} X_j$, per cui esiste $j \neq i$ tale che $X_i \subseteq X_j$ per il Lemma 3.2.15, che è assurdo per minimalità. \square

Proposizione 3.2.20. Se X è uno spazio topologico noetheriano e $Y \subset X$ è un sottospazio topologico, allora anche Y è noetheriano.

Dimostrazione. Se (Z_i) è una catena discendente di chiusi di Y , allora esistono $\tilde{Z}_0, \tilde{Z}_1, \dots$ chiusi di X tali che $Z_i = Y \cap \tilde{Z}_i$. A meno di sostituire \tilde{Z}_i con $\tilde{Z}_0 \cap \dots \cap \tilde{Z}_i$, possiamo supporre che (\tilde{Z}_i) sia una catena discendente di chiusi di X , quindi stazionaria. In particolare anche $(Z_i) = (\tilde{Z}_i \cap Y)$ sarà stazionaria, quindi Y soddisfa la DCC sui chiusi. \square

Questo ci consente di estendere la definizione di irriducibilità anche a insiemi non chiusi:

Definizione 3.2.21. Se X è uno spazio topologico noetheriano e $Y \subseteq X$, diremo che Y è *irriducibile* se lo è nella topologia di sottospazio.

Si verifica facilmente che questa definizione è compatibile con quella già data sugli insiemi chiusi.

Proposizione 3.2.22. Sia X uno spazio topologico noetheriano. Un insieme $Y \subseteq X$ è irriducibile se e solo se \overline{Y} è irriducibile in X .

Dimostrazione.

Y riducibile: $\exists Z_1, Z_2$ chiusi di X tali che $Y = (Y \cap Z_1) \cup (Y \cap Z_2)$ e $Y \not\subseteq Z_1, Z_2$. Osserviamo che $\overline{Y} = \overline{Y \cap Z_1} \cup \overline{Y \cap Z_2}$, dunque vorremmo mostrare che $\overline{Y \cap Z_i} \neq \overline{Y}$ per $i = 1, 2$.

$$\overline{Y \cap Z_i} \subseteq \overline{Z_i} = Z_i \quad \Rightarrow \quad Y \cap \overline{Y \cap Z_i} \subseteq Y \cap Z_i \subsetneq Y,$$

dunque $\overline{Y \cap Z_i} \not\supseteq Y$, e in particolare $\overline{Y \cap Z_i} \not\supseteq \overline{Y}$.

Y irriducibile: sia $\overline{Y} = Z_1 \cup Z_2$ con Z_1, Z_2 chiusi di X . In particolare $Y = (Y \cap Z_1) \cup (Y \cap Z_2)$ è unione di chiusi di Y , quindi wlog $Y \subseteq Z_1$, da cui $\overline{Y} \subseteq \overline{Z_1} = Z_1$. \square

Proposizione 3.2.23. Sia X uno spazio topologico noetheriano irriducibile. Se $U \subseteq X$ è un aperto non vuoto, allora è denso in X .

Dimostrazione. Mostriamo equivalentemente che, per ogni altro aperto non vuoto $V \subseteq X$, si ha $U \cap V \neq \emptyset$. Infatti da $U \cap V = \emptyset$ si deduce $Y \cup Z = X$ con $Y = X \setminus U$ e $Z = X \setminus V$ chiusi di X , e quindi wlog $Y = X$ per irriducibilità, cioè $U = \emptyset$. \square

Corollario 3.2.24. Sia X uno spazio topologico noetheriano, sia $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$ una sua decomposizione irriducibile minimale. Un aperto $U \subseteq X$ è denso se e solo se $X_i \cap U \neq \emptyset \quad \forall i$.

Dimostrazione. Osserviamo che $U = \bigcup (X_i \cap U)$, dunque

$$\overline{U} = \bigcup_{i=1}^n \overline{X_i \cap U} = \bigcup_{X_i \cap U \neq \emptyset} X_i$$

per la proposizione precedente. Per minimalità della decomposizione, U è denso se e solo se l'unione prende tutti gli indici. \square

Corollario 3.2.25. Sia X uno spazio topologico noetheriano: l'intersezione finita di aperti densi di X è ancora un aperto denso.

Dimostrazione. Siano $U, V \subseteq X$ aperti densi, sia $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$ una decomposizione irriducibile minimale: $U \cap X_i$ e $V \cap X_i$ sono aperti densi in X_i , quindi $X_i \cap U \cap V \neq \emptyset$ e possiamo concludere applicando il risultato precedente. \square

Concludiamo la sezione dimostrando il seguente risultato²:

Proposizione 3.2.26. Siano X, Y spazi topologici noetheriani, sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione continua. Se X è irriducibile, allora anche $f(X)$ è irriducibile.

Dimostrazione. $f(X)$ è irriducibile se e solo se $\overline{f(X)}$ lo è; siano quindi $W_1, W_2 \subseteq Y$ chiusi tali che $\overline{f(X)} = W_1 \cup W_2$. Posti $Z_i := f^{-1}(W_i)$, tali insiemi formano un ricoprimento chiuso di X , dunque wlog $Z_1 = X$. In particolare $f(X) = f(Z_1) = f \circ f^{-1}(W_1) \subseteq W_1 \subseteq \overline{f(X)}$, da cui $W_1 = \overline{f(X)}$ perché è un chiuso. \square

²Che sorprendentemente a lezione non è stato fatto. Tuttavia, ad un certo punto sarà comunque utilizzato.

3.3 Topologia di Zariski sullo spazio proiettivo

Vogliamo definire la topologia di Zariski anche sugli spazi proiettivi. In questa sezione denoteremo $R := \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ e $R_i := \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_i$. Ci metteremo inoltre nell'ipotesi in cui \mathbb{K} sia un campo infinito.

In questa sezione presenteremo alcuni fatti e definizioni che non sono stati dati esplicitamente durante il corso, ma che più volte sono stati utilizzati implicitamente, e che ritengo siano utili per capire meglio il parallelismo con il caso affine. Questi casi saranno sempre segnalati con delle note a piè di pagina. Si consiglia inoltre di rivedere la parte di teoria sugli anelli graduati prima di proseguire la lettura.

Definizione 3.3.1. La *topologia di Zariski* su $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ è la topologia quoziente³ definita da $\pi : \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, tramite la topologia di Zariski su \mathbb{A}^{n+1} .

Vorremmo descrivere i chiusi di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ tramite opportuni chiusi di \mathbb{A}^{n+1} . A tale scopo, ci è utile dare la seguente definizione.

Definizione 3.3.2. Un chiuso affine $X \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ è un *cono algebrico* se $0 \in X$ e vale

$$\forall \mathbf{x} \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda \mathbf{x} \in X.$$

Osserviamo che $Y \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ è un chiuso se e solo se $\hat{X} := \pi^{-1}(Y)$ è un chiuso di $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$. Si verifica facilmente che \hat{X} è un insieme saturo⁴, che in questo contesto significa che \hat{X} soddisfa la proprietà

$$\forall \mathbf{x} \in \hat{X} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}^* \quad \lambda \mathbf{x} \in \hat{X}.$$

In particolare, se $X := \hat{X} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$, allora X è un cono algebrico.

Definizione 3.3.3. Se $Y \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ è un chiuso proiettivo, definiamo il suo cono algebrico associato come $CY := \pi^{-1}(Y) \cup \{0\}$.

Osservazione 3.3.4. Abbiamo osservato che ad ogni chiuso proiettivo Y possiamo associare un cono algebrico CY . D'altra parte, se $X \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ è un cono algebrico, si verifica facilmente che $\pi(X \setminus \{0\})$ è un chiuso proiettivo. In particolare, si verifica che queste due mappe sono una l'inversa dell'altra, e danno luogo ad una bigezione tra chiusi proiettivi e coni algebrici. In particolare queste mappe commutano con unioni e intersezioni. Talvolta per semplicità denoteremo con π anche la mappa $X \mapsto \pi(X \setminus \{0\})$ appena considerata.

Vorremmo poter associare a ciascun chiuso proiettivo un ideale, e viceversa. In notazione⁵ tornerà comodo dire che, dati $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ e $f \in R$, si ha $f(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ se $\forall \mathbf{x} \in \pi^{-1}(\bar{\mathbf{x}}) \quad f(\mathbf{x}) = 0$. Equivalentemente, dato $\bar{\mathbf{x}} = [x_0, \dots, x_{n+1}]$ e posto $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{A}^{n+1}$, si ha

$$f(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \quad \iff \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}^* \quad f(\lambda \mathbf{x}) = 0.$$

Definizione 3.3.5. Se $Y \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ è un chiuso, definiamo il suo *ideale associato* $I(Y)$ come $I(CY) \subseteq R$.

Volendo potremmo dare una definizione più generale⁶, simile a quella che abbiamo dato nel caso affine, dove ad un sottoinsieme $Y \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ associamo un ideale

$$I(Y) := \{f \in R : \forall \bar{\mathbf{x}} \in Y \quad f(\bar{\mathbf{x}}) = 0\}.$$

³Cioè la topologia più fine tra quelle che rendono continua la proiezione.

⁴Cioè $\pi^{-1} \circ \pi(\hat{X}) = \hat{X}$.

⁵Questa notazione non è stata data durante il corso. Tuttavia risulterà comoda per quello che segue.

⁶Questa definizione non è stata data durante il corso.

Estendendo la definizione di cono algebrico associato a tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, si osserva che queste due definizioni coincidono.

Lemma 3.3.6. Sia $f = \sum_{i=0}^d f_i$ con $f_i \in R_i$ e $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$: allora $f(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ se e solo se $\forall i \ f_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0$.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{x} \in \pi^{-1}(\bar{\mathbf{x}})$: per ogni $\lambda \in \mathbb{K}^*$ si ha $0 = f(\lambda\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^d \lambda^i f_i(\mathbf{x})$. Scegliendo $d+1$ elementi $\lambda_i \in \mathbb{K}^*$ distinti, otteniamo un sistema lineare in $f_i(\mathbf{x})$ con matrice di Vandermonde invertibile, quindi $f_i(\mathbf{x}) = 0$ per ogni i . Dato che gli f_i sono omogenei, concludiamo. L'altra freccia è ovvia. \square

In modo analogo, si può verificare⁷ che se $fg(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ allora $f(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ oppure $g(\bar{\mathbf{x}}) = 0$. Per entrambi i risultati è necessaria l'ipotesi $\# \mathbb{K} = \infty$.

Proposizione 3.3.7. Se $J \subsetneq R$ è un ideale omogeneo, allora $V_{\mathbb{A}}(J)$ è un cono algebrico.

Dimostrazione. Per ipotesi $J \subseteq (x_0, \dots, x_n)$, da cui $V_{\mathbb{A}}(J) \supseteq \{0\}$; inoltre $J = (g_1, \dots, g_r)$ con g_i omogenei, quindi $V_{\mathbb{A}}(J) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{A}^{n+1} : g_i(\mathbf{x}) = 0 \ \forall i\}$. Dato che i g_i sono omogenei, ne deduciamo che $\forall \mathbf{x} \in V_{\mathbb{A}}(J)$ e $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*$ si ha $\lambda\mathbf{x} \in V_{\mathbb{A}}(J)$. \square

Proposizione 3.3.8. Un chiuso affine X è un cono algebrico se e solo se $I(X)$ è un ideale omogeneo diverso da R .

Dimostrazione.

(\Rightarrow) Sia $Y := \pi(X)$ il chiuso proiettivo associato a X . Si verifica che un generico $f \in R$ appartiene a $I(X)$ se e solo se $\forall \bar{\mathbf{x}} \in Y \ f(\bar{\mathbf{x}}) = 0$. Dato $f = \sum_{d=0}^n f_d \in I(X)$, applicando il Lemma 3.3.6 si ottiene dunque $f_d \in I(X)$ per ogni d .

(\Leftarrow) Applicare la proposizione precedente all'ideale $I(X)$, osservando che $V_{\mathbb{A}}(I(X)) = X$. \square

Definizione 3.3.9. Se $S \subseteq R$, definiamo l'*insieme algebrico proiettivo*⁸ associato a S come

$$V_{\mathbb{P}^n}(S) := \{\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) : \forall f \in S \ f(\bar{\mathbf{x}}) = 0\}.$$

Qualora non ci sia rischio di ambiguità, indicheremo semplicemente $V_{\mathbb{P}}(S)$ oppure $V(S)$. Questa definizione chiaramente coincide con quella data per le ipersuperfici proiettive.

Osservazione 3.3.10. È utile fare le seguenti osservazioni⁹

- Se $S \subseteq R$, avrà senso considerare l'ideale omogeneo J generato da S piuttosto che $\langle S \rangle_R$:

$$J := \left(f_j \in R : f = \sum_{i=0}^{s_f} f_i \in S, \ j \leq s_f \right).$$

In particolare si verifica che $V_{\mathbb{P}}(S) = \pi(V_{\mathbb{A}}(J))$.

- Segue facilmente che gli insiemi algebrici proiettivi coincidono con i chiusi proiettivi. D'altra parte, abbiamo visto che se $J \subsetneq R$ è un ideale omogeneo allora $V_{\mathbb{A}}(J)$ è un cono algebrico.

⁷Questo non è stato enunciato a lezione.

⁸Questa definizione non è stata enunciata davvero durante il corso, ma è stata ripetutamente utilizzata nelle lezioni successive, in qualche sua forma.

⁹Ci addentriamo nel campo delle cose utili, ma che non sono state mai dette esplicitamente a lezione.

- Gli insiemi algebrici proiettivi soddisfano la maggior parte delle proprietà già viste per gli insiemi algebrici affini, con opportune modifiche. In particolare, se $S \subseteq R$ e J è l'ideale omogeneo generato da S , si avrà $V_{\mathbb{P}}(S) = V_{\mathbb{P}}(J) = V_{\mathbb{P}}(\sqrt{J})$.
- Ogni chiuso proiettivo Y si può scrivere nella forma $Y = V_{\mathbb{P}}(g_1, \dots, g_r) = \bigcap_{i=1}^r V_{\mathbb{P}}(g_i)$, dove i g_i sono polinomi omogenei. In particolare, le ipersuperfici proiettive forniscono una base di chiusi per la topologia di Zariski sullo spazio proiettivo.
- Le proiettività sono omeomorfismi anche per la topologia di Zariski.

Proposizione 3.3.11. Sia $Y \neq \emptyset$ un chiuso proiettivo: Y è irriducibile se e solo se lo è $\mathcal{C}Y$.

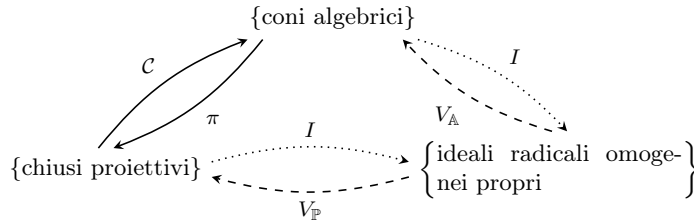
Dimostrazione.

- (\Leftarrow) Se Y fosse riducibile, allora $Y = Y_1 \cup Y_2$ con $Y_1, Y_2 \subsetneq Y$ chiusi proiettivi. In particolare si verifica che $\mathcal{C}Y = \mathcal{C}Y_1 \cup \mathcal{C}Y_2$, e che non si può avere $\mathcal{C}Y_i = \mathcal{C}Y$ (\mathcal{C} è una bigezione).
- (\Rightarrow) Se $\mathcal{C}Y$ fosse riducibile, allora $I(\mathcal{C}Y) = I(Y) \notin \text{Spec}(R)$, quindi $\exists f, g$ omogenei tali che $f, g \notin I(Y)$ ma $fg \in I(Y)$ (vedi Lemma 1.2.14). In particolare $V_{\mathbb{P}}(f) \cup V_{\mathbb{P}}(g) = V_{\mathbb{P}}(fg) \supseteq Y$, da cui $Y = (Y \cap V_{\mathbb{P}}(f)) \cup (Y \cap V_{\mathbb{P}}(g))$. Si conclude osservando che $f \notin I(Y)$ implica $Y \not\subseteq V_{\mathbb{P}}(f)$ (e analogo per g). \square

La freccia (\Rightarrow) della proposizione precedente in classe è stata fatta in modo analogo, ma restando sulle varietà affini, arrivando quindi a $\mathcal{C}Y = (\mathcal{C}Y \cap V_{\mathbb{A}}(f)) \cup (\mathcal{C}Y \cap V_{\mathbb{A}}(g))$. Da qui servono un paio di osservazioni in più: bisogna notare che $\mathcal{C}Y \cap V_{\mathbb{A}}(f)$ e $\mathcal{C}Y \cap V_{\mathbb{A}}(g)$ sono coni algebrici, quindi che applicando π si ottiene la relazione di riducibilità per Y , che funziona in quanto π è una bigezione tra coni algebrici e chiusi proiettivi.

3.3.1 Nullstellensatz proiettivo

Le osservazioni fatte finora in questa sezione ci consentono di costruire il seguente diagramma che, ignorando gli archi tratteggiati oppure quelli a puntini, è commutativo.



Se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, per il Nullstellensatz di Hilbert commuterà tutto il diagramma. In particolare, possiamo fornire una versione del Nullstellensatz valida per gli spazi proiettivi:

Teorema 3.3.12 (Nullstellensatz proiettivo). Sia \mathbb{K} un campo, sia $R := \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$. Allora le seguenti proprietà sono equivalenti:

1. Se $J \subseteq R$ è un ideale omogeneo tale che $V_{\mathbb{P}}(J) = \emptyset$, allora $\sqrt{J} \supseteq (x_0, \dots, x_n)$;
2. Se $J \subseteq R$ è un ideale omogeneo, allora $I(V_{\mathbb{P}}(J)) = \sqrt{J}$;
3. \mathbb{K} è algebricamente chiuso.

Dimostrazione.

(3 \Rightarrow 1) Dal diagramma, se $V_{\mathbb{P}}(J) = \emptyset$ e $J \subseteq (x_0, \dots, x_n)$, allora $V_{\mathbb{A}}(J) = \{0\}$, da cui otteniamo $\sqrt{J} = I(0) = (x_0, \dots, x_n)$ per Nullstellensatz.

(3 \Rightarrow 2) Vale sempre $I \circ V_{\mathbb{P}} = I \circ \pi \circ V_{\mathbb{A}} = I \circ V_{\mathbb{A}}$, dunque $I(V_{\mathbb{P}}(J)) = I(V_{\mathbb{A}}(J)) = \sqrt{J}$ per Nullstellensatz.

($\neg 3 \Rightarrow (\neg 1 \wedge \neg 2)$) Omesso. □

Nel caso proiettivo, non c'è corrispondenza tra ideali massimali e punti, come si può osservare dal seguente esempio:

Esempio 3.3.13. Sia $\bar{P} = [1, 3, -2, 1] \in \mathbb{P}^3$: posto $P := (1, 3, -2, 1) \in \mathbb{A}^4$, il cono associato a $\{\bar{P}\}$ in \mathbb{A}^4 sarà la retta $r = L(0, P)$. Questa retta si può ricavare imponendo che la seguente matrice non abbia rango massimale:

$$\text{Rk} \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 3 & x_1 \\ -2 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{pmatrix} \leq 1 \iff \begin{cases} x_1 - 3x_0 = 0 \\ x_2 + 2x_0 = 0 \\ x_3 - x_0 = 0 \end{cases}$$

In particolare $I(\bar{P}) = I(r) = (x_1 - 3x_0, x_2 + 2x_0, x_3 - x_0)$, che non è un ideale massimale.

Come già visto, vale ancora la corrispondenza tra chiusi irriducibili e ideali primi.

Osservazione 3.3.14. Supponiamo $\mathbb{K} = \bar{\mathbb{K}}$. Sia $X = V_{\mathbb{A}}(f)$ un'ipersuperficie affine, sia $f = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ la decomposizione in irriducibili. Osserviamo che $I(X) = \sqrt{(f)} = (p_1 \dots p_k)$, da cui $X = V_{\mathbb{A}}(p_1) \cup \dots \cup V_{\mathbb{A}}(p_k)$. Dato che i p_i sono irriducibili, i (p_i) sono primi e i $V_{\mathbb{A}}(p_i)$ sono irriducibili. Questa decomposizione è anche minimale: infatti se $V_{\mathbb{A}}(p_i) \subseteq V_{\mathbb{A}}(p_j)$, allora $(p_i) = I(V_{\mathbb{A}}(p_i)) \supseteq I(V_{\mathbb{A}}(p_j)) = (p_j)$ (per il Nullstellensatz), cioè $p_i \mid p_j$ e quindi $i = j$.

Analogamente, se $X = V_{\mathbb{P}}(F)$ è un'ipersuperficie proiettiva e F_1, \dots, F_k sono i suoi fattori irriducibili distinti, allora $X = V_{\mathbb{P}}(F_1) \cup \dots \cup V_{\mathbb{P}}(F_k)$ è la sua decomposizione irriducibile minimale.

3.4 Chiusura proiettiva

Osserviamo che le carte affini standard (U_i, j_i) forniscono un ricoprimento di aperti per $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. Data una carta affine (U, j) , possiamo dotare U della topologia di sottospazio indotta da $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. Ci chiediamo se ci sia un legame tra questa topologia e quella data da \mathbb{A}^n tramite j . La risposta sarà affermativa.

Nel contesto di questa sezione, a differenza della precedente, avremo $R := \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e $\bar{R} := \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$, gli insiemi affini saranno ambientati in \mathbb{A}^n e quelli proiettivi in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

Proposizione 3.4.1. Le carte affini $j : \mathbb{A}^n \hookrightarrow U \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ sono omeomorfismi.

Dimostrazione. Senza perdita di generalità possiamo ricondurci al caso di (U_0, j_0) (le proiettività sono omeomorfismi). Dato che j_0 è biiettiva, basta mostrare che è continua e chiusa. È sufficiente testare le due proprietà sulle ipersuperfici (affini su \mathbb{A}^n , proiettive su $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$), dato che formano una base di chiusi.

Data un'ipersuperficie proiettiva $V_{\mathbb{P}}(F)$, si verifica $j_0^{-1}(V_{\mathbb{P}}(F)) = V_{\mathbb{A}}(D(F))$, che è un chiuso affine. D'altra parte, se $V_{\mathbb{A}}(f)$ è un'ipersuperficie affine, si verifica $j_0(V_{\mathbb{A}}(f)) = V_{\mathbb{P}}(H(f)) \cap U_0$, che è chiuso in U_0 . □

Definizione 3.4.2. Se X è un chiuso di \mathbb{A}^n , definiamo la sua *chiusura proiettiva* in \mathbb{P}^n come la chiusura topologica di $j(X)$ in \mathbb{P}^n .

Se X è un chiuso affine e $I(X) = (g_1, \dots, g_r)$, verrebbe da sperare che $I(\overline{X}) = (H(g_1), \dots, H(g_r))$. Non è così, come mostra il seguente esempio:

Esempio 3.4.3. Sia $\mathcal{C}_3 = V_{\mathbb{A}}(y - x^2, z - xy) \subseteq \mathbb{A}^3$ la cubica gobba: in particolare si avrà $I(\mathcal{C}_3) = (y - x^2, z - xy)$. Dato che $zx - y^2 \in I(\mathcal{C}_3)$, possiamo scrivere anche $I(\mathcal{C}_3) = (y - x^2, z - xy, zx - y^2)$. Posti $g_1 = y - x^2$, $g_2 = z - xy$ e $g_3 = zx - y^2$, si avrà $I(\mathcal{C}_3) = (g_1, g_2) = (g_1, g_2, g_3)$. Siano

$$\begin{aligned} J_1 &:= (H(g_1), H(g_2)) = (wy - x^2, wz - xy), \\ J_2 &:= (H(g_1), H(g_2), H(g_3)) = (wy - x^2, wz - xy, zx - y^2). \end{aligned}$$

Si verifica che $V_{\mathbb{P}}(J_1) \cap \{w = 0\} = V_{\mathbb{P}}(w, x)$, mentre $V_{\mathbb{P}}(J_2) \cap \{w = 0\} = V_{\mathbb{P}}(w, x, y)$, quindi $V_{\mathbb{P}}(J_1) \neq V_{\mathbb{P}}(J_2)$.

Se la supposizione fatta prima di questo esempio fosse corretta, si dovrebbe avere invece $\overline{\mathcal{C}_3} = V_{\mathbb{P}}(J_1) = V_{\mathbb{P}}(J_2)$, che è falso.

Si può dimostrare invece (ma noi non lo faremo) che vale sempre il seguente fatto:

Fatto 3.4.4. Se X è un chiuso affine e $J = I(X)$, allora $\overline{X} = V(J^*)$, dove $J^* = (H(f) : f \in J)$.

Osservazione 3.4.5. Si verifica facilmente che, se X è un chiuso affine tale che $I(X) = (f)$, allora $I(X)^* = (H(f))$, e in particolare $\overline{X} = V_{\mathbb{P}}(H(f))$.

Nel caso $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, possiamo dire di più: la chiusura proiettiva del supporto di un'ipersuperficie affine è il supporto della chiusura proiettiva dell'ipersuperficie (in formula, $X = V_{\mathbb{A}}(f) \Rightarrow \overline{X} = V_{\mathbb{P}}(H(f))$). Infatti ci si riconduce facilmente al caso in cui f è squarefree, e in quel caso vale $I(X) = I(V(f)) = (f)$ per il Nullstellensatz affine.

Capitolo 4

Varietà quasi-proiettive

4.1 Varietà quasi-proiettive e funzioni regolari

Definizione 4.1.1. Un insieme $X \subseteq \mathbb{P}^n$ è una *varietà quasi-proiettiva* se è localmente chiuso in \mathbb{P}^n , cioè se esistono un aperto Z e un chiuso U di \mathbb{P}^n tali che $X = U \cap Z$. Le varietà quasi-proiettive sono dotate della topologia di sottospazio indotta da quella di Zariski su \mathbb{P}^n .

Si osserva facilmente che i chiusi e gli aperti di una varietà quasi-proiettiva sono a loro volta varietà quasi-proiettive. In particolare, questo è vero per tutti i chiusi e gli aperti di \mathbb{P}^n .

Definizione 4.1.2. Sia X una varietà quasi-proiettiva. Una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ si dice *regolare* se è localmente rapporto di polinomi omogenei dello stesso grado, cioè se $\forall P \in X$ esistono $U \ni P$ aperto e $A, B \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$ tali che

$$f = \frac{A}{B} \text{ su } U, \quad B \neq 0 \text{ su } U.$$

Si verifica facilmente che, fissata una varietà quasi-proiettiva X , le funzioni regolari $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ formano una \mathbb{K} -algebra, che indicheremo con $\mathcal{O}_X(X)$.

Definizione 4.1.3. Se X, Y sono varietà quasi-proiettive, diremo che $f : X \rightarrow Y$ è un *morfismo* se soddisfa le seguenti proprietà:

1. f è una funzione continua;
2. $\forall V \subseteq Y$ aperto $\forall \varphi \in \mathcal{O}_V(V)$ si ha $\varphi \circ f \in \mathcal{O}_W(W)$, dove $W := f^{-1}(V)$.

Si verifica facilmente che l'identità è un morfismo, e che la composizione di morfismi è ancora un morfismo. Diremo quindi che un morfismo $f : X \rightarrow Y$ è un *isomorfismo* di varietà quasi-proiettive se $\exists g : Y \rightarrow X$ morfismo tale che $g \circ f = \text{Id}_X$ e $f \circ g = \text{Id}_Y$.

Definizione 4.1.4. Se $f : X \rightarrow Y$ è un morfismo di varietà quasi-proiettive, definiamo il *pullback* $f^* : \mathcal{O}_Y(Y) \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$ tale che $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$.

Si verifica facilmente che il pullback è ben definito ed è un omomorfismo di \mathbb{K} -algebre; inoltre si comporta bene rispetto all'identità e alla composizione, cioè soddisfa $(\text{Id}_X)^* = \text{Id}_{\mathcal{O}_X(X)}$ e $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

Possiamo inoltre osservare che, se $f : X \rightarrow Y$ è un isomorfismo di varietà quasi-proiettive, allora $f^* : \mathcal{O}_Y(Y) \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$ è un isomorfismo di \mathbb{K} -algebre. Si può dire di più: sotto queste ipotesi, se $U \subseteq X$ è un aperto e $V = f(U) \subseteq Y$, allora $\mathcal{O}_V(V) \cong \mathcal{O}_U(U)$ tramite $(f|_U)^*$.

Osservazione 4.1.5. Nel linguaggio delle categorie (vedi sottosezione 1.3.2), quello che abbiamo fatto è stato definire la categoria delle varietà quasi-proiettive e i relativi morfismi. Il pullback è un funtore controvariante dalla categoria delle varietà quasi-proiettive a quella delle \mathbb{K} -algebre.

Osservazione 4.1.6. Vediamo alcuni esempi e alcune osservazioni sui morfismi, che torneranno utili. In ciò che segue X, Y, Z saranno varietà quasi-proiettive.

- Si verifica facilmente che restrizioni di funzioni regolari sono ancora funzioni regolari, e restrizioni di morfismi sono ancora morfismi.
- Se $X \subseteq Y$, osserviamo che $i : X \hookrightarrow Y$ è un morfismo, e il suo pullback $i^* : \mathcal{O}_Y(Y) \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$ è la mappa che restringe le funzioni regolari da Y a X (cioè $i^*(g) = g|_X$).
- Se $f : X \rightarrow Y$ è un morfismo e $Y \subseteq Z$, si osserva che anche $\tilde{f} : X \rightarrow Z$, definito da f tramite l'inclusione, è un morfismo. In particolare $\tilde{f}^* = (i \circ f)^* = f^* \circ i^*$, dunque $\tilde{f}^*(g) = g|_Y \circ f$.
- Se $\{U_i : i \in I\}$ è un ricoprimento aperto di X , si verifica che una mappa $f : X \rightarrow Y$ è un morfismo se e solo se $f|_{U_i} : U_i \rightarrow Y$ è un morfismo per ogni i (essere un morfismo è una “proprietà locale”).
- Se $f : X \rightarrow Z$ è un morfismo e Y è un aperto di Z tale che $\text{Im } f \subseteq Y$, allora $f : X \rightarrow Y$ è un morfismo: infatti gli aperti di Y sono anche aperti di Z , quindi soddisfano le proprietà richieste.

Lemma 4.1.7. Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà quasi-proiettiva, siano $F_0, \dots, F_m \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$ tali che gli F_i non si annullano contemporaneamente su X : allora la mappa $F : X \rightarrow \mathbb{P}^m$ tale che $F(\bar{\mathbf{x}}) = [F_0(\mathbf{x}), \dots, F_m(\mathbf{x})]$ è ben definita ed è un morfismo.

Dimostrazione.

Buona definizione. Bisogna verificare che $[F_0(\lambda \mathbf{x}), \dots, F_m(\lambda \mathbf{x})]$ non dipende dalla scelta di $\lambda \in \mathbb{K}^*$, e che $\nexists \bar{\mathbf{x}} \in X$ tale che $(F_0(\mathbf{x}), \dots, F_m(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$. La prima proprietà è verificata perché gli F_i sono omogenei dello stesso grado, e la seconda è verificata perché non si annullano contemporaneamente su X .

Continuità. Basta mostrare che $F^{-1}(V_{\mathbb{P}^m}(G))$ è un chiuso per ogni $G \in \mathbb{K}[y_0, \dots, y_m]$ omogeneo. Si verifica facilmente che $F^{-1}(V_{\mathbb{P}^m}(G)) = \{\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{P}^n : G(F(\mathbf{x}))\} = V_{\mathbb{P}^n}(G \circ F)$, e che $G \circ F$ è un polinomio omogeneo in n variabili.

Morfismo. Sia $V \subseteq \mathbb{P}^m$ un aperto, sia $g \in \mathcal{O}_V(V)$: vogliamo mostrare che anche $g \circ F : F^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{K}$ è regolare. Sia $P \in F^{-1}(V)$, sia $Q := F(P) \in V$, sia $V_1 \ni Q$ un aperto di V tale che $g|_{V_1} = \frac{A}{B}$ con $A, B \in \mathbb{K}[y_0, \dots, y_m]_d$ e $B \neq 0$ su V_1 , sia $U := F^{-1}(V_1) \subseteq F^{-1}(V)$, che è un aperto di $F^{-1}(V)$ e contiene P . Osserviamo che $g \circ F|_U = \frac{A \circ F}{B \circ F}$, che $B \circ F \neq 0$ su U e che $A \circ F$ e $B \circ F$ sono polinomi omogenei in n variabili con lo stesso grado. \square

4.2 Varietà affini

In questa sezione denoteremo $R := \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e $\bar{R} := \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$.

Dato che la carta affine j_0 identifica \mathbb{A}^n con un aperto U_0 di \mathbb{P}^n , possiamo dare allo spazio affine una struttura di varietà quasi-proiettiva, assegnandogli la \mathbb{K} -algebra di funzioni regolari $\mathcal{O}_{U_0}(U_0)$. Più in generale, se $X \subseteq \mathbb{A}^n$ è un chiuso affine, dato che $j_0 : \mathbb{A}^n \rightarrow U_0$ è un omeomorfismo, possiamo dare a X struttura di varietà quasi-proiettiva identificandolo con $Y := j_0(X) \subseteq U_0$ e assegnandogli la \mathbb{K} -algebra $\mathcal{O}_Y(Y)$. Lo stesso vale per qualunque aperto di X .

Si può osservare che le proiettività di \mathbb{P}^n inducono isomorfismi sulle varietà quasi-proiettive soggiacenti. In particolare, dato che le carte affini sono proiettivamente equivalenti, la struttura di varietà quasi-proiettiva dei chiusi affini non dipende dalla scelta della carta affine.

Definizione 4.2.1. Una varietà quasi-proiettiva X si dice *affine* se è isomorfa ad un chiuso affine.

Identificando i chiusi affini tramite j_0 , risulta più comodo portare le funzioni regolari in coordinate affini. Otteniamo in questo modo una definizione equivalente:

Definizione 4.2.2. Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n$ un chiuso affine. Una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ si dice *regolare* se è localmente rapporto di polinomi, cioè se $\forall P \in X$ esistono $U \ni P$ aperto di X e $a, b \in R$ tali che

$$f = \frac{a}{b} \text{ su } U, \quad b \neq 0 \text{ su } U.$$

Fissato X , si verifica che le funzioni regolari $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ formano una \mathbb{K} -algebra, che denotiamo con $\mathcal{O}_X(X)$, e che $\mathcal{O}_X(X) = \{\varphi \circ j_0 : \varphi \in \mathcal{O}_Y(Y)\}$, dove $Y := j_0(X)$.

Ad un'osservazione più attenta, la definizione precedente si può applicare anche a qualunque aperto di X , che corrisponde a una varietà quasi-proiettiva contenuta in una carta affine di \mathbb{P}^n .

Esempio 4.2.3. Se $X \subseteq \mathbb{A}^n$ è un chiuso affine, le funzioni polinomiali $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ sono banalmente regolari. In particolare, la proiezione alla i -esima coordinata affine, essendo rappresentata da x_i , è una funzione regolare per ogni i . Nel caso $n = 1$ osserviamo che tale proiezione è la funzione identità.

Lemma 4.2.4. Sia X una varietà quasi-proiettiva. Una mappa $f : X \rightarrow \mathbb{A}^1$ è un morfismo se e solo se è una funzione regolare.

Dimostrazione. Se f è un morfismo, dato che $\text{Id}_{\mathbb{K}}$ è regolare, si ha $f = \text{Id}_{\mathbb{K}} \circ f$ regolare. Supponiamo ora f regolare, e dividiamo la dimostrazione in due punti.

f è continua. Dato che i chiusi di \mathbb{A}^1 sono le unioni finite di punti, è sufficiente dimostrare che $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ si abbia $f^{-1}(\lambda)$ chiuso in X . Poiché f è regolare, $\forall P \in X$ esistono $U \ni P$ aperto in X e $A, B \in \overline{R}_d$ tali che $B \neq 0$ su U e $f|_U = \frac{A}{B}$. Tali U formano un ricoprimento aperto di X , quindi è sufficiente verificare che $f^{-1}(\lambda) \cap U$ sia un chiuso per ciascun U (fatti noti di topologia). Vale $f^{-1}(\lambda) \cap U = \{Q \in U : f(Q) = \lambda\} = V_{\mathbb{P}}(\lambda B - A) \cap U$, quindi questo punto è concluso.

f è un morfismo. Sia $V \subseteq \mathbb{A}^1$ un aperto, $g \in \mathcal{O}_V(V)$ e $Y := f^{-1}(V)$: dobbiamo dimostrare che $g \circ f : Y \rightarrow \mathbb{K}$ è una funzione regolare. Per ogni $P \in Y$ si trova un aperto $U \ni P$ di Y tale che

$$\begin{aligned} f|_U &= \frac{A}{B} & A, B \in \overline{R}_d & & B \neq 0 \text{ su } U; \\ g|_{f(U)} &= \frac{a}{b} & a, b \in \mathbb{K}[t] & & b \neq 0 \text{ su } f(U). \end{aligned}$$

In particolare $g \circ f|_U = \frac{a(A/B)}{b(A/B)}$ con $b(A/B) \neq 0$ su Y . Moltiplicando numeratore e denominatore per un'opportuna potenza di B , si ottiene che $g \circ f|_U$ è della forma \hat{A}/\hat{B} con $\hat{A}, \hat{B} \in \overline{R}_{d'}$, come richiesto. \square

Osservazione 4.2.5. Una conseguenza immediata del precedente lemma è che le funzioni regolari sono sempre continue. In particolare, i luoghi di zeri di funzioni regolari sono insiemi chiusi.

Proposizione 4.2.6. Sia X una varietà quasi-proiettiva. Una mappa $f = (f_1, \dots, f_m) : X \rightarrow \mathbb{A}^m$ è un morfismo se e solo se f_i è regolare $\forall i \leq m$.

Dimostrazione. Se f è un morfismo, dato che le coordinate x_i sono funzioni regolari, si ha che $f_i = x_i \circ f$ è regolare. Supponiamo ora f regolare, e dividiamo la dimostrazione in due punti come in precedenza.

f è **continua**. Dato che i chiusi di \mathbb{A}^m sono le intersezioni finite di ipersuperfici affini, è sufficiente dimostrare che $\forall g \in R$ si abbia $f^{-1}(V_{\mathbb{A}}(g))$ chiuso in X . Vale

$$f^{-1}(V_{\mathbb{A}}(g)) = \{P \in X : g \circ f(P) = 0\},$$

che è chiuso in quanto luogo di zeri di una funzione regolare: infatti $g \circ f = g(f_1, \dots, f_m)$ è un polinomio di funzioni regolari, e $\mathcal{O}_X(X)$ è una \mathbb{K} -algebra.

f è un **morfismo**. Si fa in modo analogo al caso in una dimensione. \square

Osservazione 4.2.7. In realtà si riesce a dimostrare di più: questo risultato è valido anche per generiche mappe $f : X \rightarrow Y$, dove Y è intersezione di un aperto e di un chiuso di \mathbb{A}^m . Un modo per vederlo è identificare Y con una varietà quasi-proiettiva contenuta in una carta affine, e ripetere lo stesso procedimento della dimostrazione, muovendosi tramite tale carta.

Tramite questo ragionamento, se $f : X \rightarrow Y$ è un morfismo, dove Y è come sopra, allora $f : X \rightarrow W$ è un morfismo per ogni varietà quasi-proiettiva $W \supseteq \text{Im } f$. Mettendocisi in carte affini, si dovrebbe riuscire a verificare che questo si può fare anche quando Y non si immerge in una varietà affine¹.

Corollario 4.2.8. Sia X una varietà quasi-proiettiva e $f : X \rightarrow \mathbb{P}^m$ una mappa generica. Siano (U_i, j_i) le carte affini standard di \mathbb{P}^m , siano $\hat{U}_i := f^{-1}(U_i)$ e siano $j_i^{-1} \circ f|_{\hat{U}_i} = (f_{i,1}, \dots, f_{i,m})$ con $f_{i,j} : \hat{U}_i \rightarrow \mathbb{K}$. Supponiamo che gli \hat{U}_i siano aperti di X : allora f è un morfismo se e solo se gli $f_{i,j}$ sono funzioni regolari.

Dimostrazione. Osserviamo che $\{\hat{U}_i\}$ è un ricoprimento aperto di X , e che per costruzione la mappa $j_i^{-1} \circ f|_{\hat{U}_i}$ è ben definita come nelle ipotesi. Dato che $f(\hat{U}_i) \subseteq U_i$, e U_i è un aperto di \mathbb{P}^m , allora $f : \hat{U}_i \rightarrow \mathbb{P}^m$ è un morfismo se e solo se $f : \hat{U}_i \rightarrow U_i$ è un morfismo, ma in coordinate affini $j_i^{-1} \circ f|_{\hat{U}_i} = (f_{i,1}, \dots, f_{i,m})$ è un morfismo se e solo se le $f_{i,j}$ sono regolari. Poiché f è un morfismo se e solo se $f|_{\hat{U}_i}$ è un morfismo per ogni i , possiamo concludere. \square

Esempio 4.2.9. Sia $U := \{x \neq 0\} \subseteq \mathbb{A}^1$: questa è una varietà quasi-proiettiva in quanto $j_0(U) = \mathbb{P}^1 \setminus \{[1, 0], [0, 1]\}$. Consideriamo la mappa $f : U \rightarrow \mathbb{A}^2 \mid f(x) = (x, \frac{1}{x})$: la sua immagine è l'iperbole equilatera $Y := V_{\mathbb{A}^2}(xy - 1)$, che è un chiuso affine; inoltre si verifica facilmente che $f : X \rightarrow Y$ è bigettiva con inversa $(x, y) \mapsto x$, e che si tratta di due morfismi. Quindi U è una varietà affine.

4.2.1 Anello delle coordinate

D'ora in poi ci mettiamo nelle ipotesi in cui \mathbb{K} è un campo algebricamente chiuso.

Dato un chiuso affine $X \subseteq \mathbb{A}^n$, denotiamo con $r_X : R \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$ la mappa che manda un polinomio f nella sua restrizione $f|_X$; in assenza di ambiguità, scriveremo semplicemente r . Si verifica facilmente che la mappa r è ben definita, che è un omomorfismo di \mathbb{K} -algebre e che $\text{Ker}(r) = I(X)$.

¹Nulla di tutto questo è stato fatto a lezione, ma serve per sistemare un paio di dimostrazioni. Sorprendentemente questo risultato, per quanto sembri ovvio, non sono riuscito a derivarlo direttamente dalla definizione...

Definizione 4.2.10. Se $X \subseteq \mathbb{A}^n$ un chiuso affine, definiamo il suo *anello delle coordinate* (o *algebra affine*) $\mathbb{K}[X] := R/I(X)$.

Osserviamo in particolare che $I(\mathbb{A}^n) = (0)$, da cui $\mathbb{K}[\mathbb{A}^n] = R$.

Consideriamo la proiezione $p : R \rightarrow \mathbb{K}[X]$ e l'immersione $i : \mathbb{K}[X] \hookrightarrow \mathcal{O}_X(X)$. Se $\bar{f} = p(f) \in \mathbb{K}[X]$ e $\mathbf{x} \in X$, possiamo considerare $\bar{f}(\mathbf{x})$ equivalentemente come $f(\mathbf{x})$ o $(i(\bar{f}))(\mathbf{x})$.

Definizione 4.2.11. Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n$ un chiuso affine. Se $S \subseteq \mathbb{K}[X]$ e $Y \subseteq X$ è un chiuso di X , definiamo

$$V_X(S) = \{\mathbf{x} \in X : \forall f \in S \quad f(\mathbf{x}) = 0\},$$

$$I_X(Y) = \{f \in \mathbb{K}[X] : \forall \mathbf{x} \in Y \quad f(\mathbf{x}) = 0\}.$$

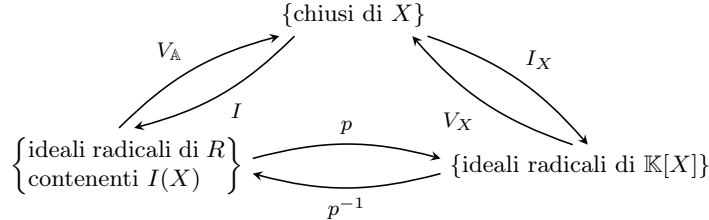
Si verifica facilmente che $I_X = p \circ I$ e che $V_X(S) = X \cap V_{\mathbb{A}}(p^{-1}(S))$; inoltre, restringendosi al caso $S = J$ ideale, si ha più semplicemente $V_X = V_{\mathbb{A}} \circ p^{-1}$.

Osserviamo che la proiezione p induce una biiezione tra gli ideali di R contenenti $I(X)$ e gli ideali di $\mathbb{K}[X]$, e che tale biiezione conserva l'essere ideali radicali, primi o massimali. Inoltre la maggior parte delle proprietà soddisfatte da $V_{\mathbb{A}}$ e I sono soddisfatte anche da V_X e I_X , con opportune modifiche. Possiamo inoltre fornire una versione del Nullstellensatz per l'anello $\mathbb{K}[X]$:

Teorema 4.2.12 (Nullstellensatz relativo). Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n$ un chiuso affine: allora V_X induce una biiezione tra gli ideali radicali di $\mathbb{K}[X]$ e i chiusi di X , con inversa I_X . Inoltre, se J è un ideale di $\mathbb{K}[X]$, valgono le seguenti proprietà:

- (i) Se $V_X(J) = \emptyset$, allora $J = \mathbb{K}[X]$;
- (ii) Se $J \in \text{SpecMax}(\mathbb{K}[X])$ allora $\exists P \in X$ tale che $J = I_X(P)$;
- (iii) $I_X(V_X(J)) = \sqrt{J}$.

Dimostrazione. Per il Nullstellensatz di Hilbert i chiusi di X , che sarebbero i chiusi affini contenuti in X , sono in corrispondenza biunivoca con gli ideali radicali di R contenenti $I(X)$. Consideriamo dunque il seguente diagramma:



Si osserva che tutto commuta, in particolare V_X e I_X sono una l'inversa dell'altra.

- (i) $\emptyset = V_X(J) = V_{\mathbb{A}}(p^{-1}(J))$, da cui $p^{-1}(J) = R$ e dunque $J = \mathbb{K}[X]$.
- (ii) J corrisponde a $\mathfrak{m} \in \text{SpecMax}(R) = I(P)$ con $\mathfrak{m} \supseteq I(X)$, dunque $P \in X$.
- (iii) $I_X(V_X(J)) = p(I(V_{\mathbb{A}}(p^{-1}(J)))) = p(\sqrt{p^{-1}(J)}) = \sqrt{J}$. □

Esercizio 4.2.13. Siano $A, B \in \overline{R}_d$ e $a, b \in \mathbb{K}[t]$, siano $f = \frac{A}{B}$ e $g = \frac{a}{b}$: dimostrare che

$$\exists A_1, B_1 \in \overline{R}_{d'} \quad : \quad g \circ f = \frac{A_1}{B_1}.$$

Soluzione. Se $a = \sum_{i=0}^r a_i t^i$ e $b = \sum_{j=0}^s b_j t^j$, osservare che

$$g \circ f = \frac{\sum_{i=0}^r a_i \frac{A^i}{B^i}}{\sum_{j=0}^s b_j \frac{A^j}{B^j}} = \frac{\sum_{i=0}^r a_i A^i B^{r+s-i}}{\sum_{j=0}^s b_j A^j B^{r+s-j}} = \frac{A_1}{B_1},$$

con $A_1, B_1 \in \overline{R}_{d(r+s)}$. □

Proposizione 4.2.14. L'immersione $r : \mathbb{K}[X] \hookrightarrow \mathcal{O}_X(X)$ è un isomorfismo di \mathbb{K} -algebre.

Dimostrazione. Ci basta mostrare la suriettività. Data $\varphi \in \mathcal{O}_X(X)$, consideriamo l'ideale di X definito come $J := \{f \in \mathbb{K}[X] : f\varphi \in \mathbb{K}[X]\}$; la tesi è equivalente ad avere $1 \in J$, cioè $V_X(J) = \emptyset$ (per il Nullstellensatz relativo).

Dato $P \in X$ qualsiasi, vogliamo mostrare che $P \notin V_X(J)$. Sia

$$X = \underbrace{X_1 \cup \dots \cup X_k}_{=:Y} \cup \underbrace{X_{k+1} \cup \dots \cup X_s}_{=:Z}$$

una decomposizione irriducibile di X , tale che $P \in X_1, \dots, X_k$ ma $P \notin X_{k+1}, \dots, X_s$. Per definizione di funzione regolare, $\exists U \ni P$ aperto di X e $a, b \in R$ tali che $b \neq 0$ e $b\varphi - a = 0$ su U . Possiamo identificare a, b con le loro restrizioni in X , considerando $a, b \in \mathbb{K}[X] \subseteq \mathcal{O}_X(X)$, da cui $b\varphi - a \in \mathcal{O}_X(X)$.

Osserviamo che $\forall i \leq k$ si ha $P \in U \cap X_i$, dunque U è denso in Y (Proposizione 3.2.23). In particolare, poiché il luogo di zeri di $b\varphi - a$ è chiuso (Osservazione 4.2.5), vale $b\varphi - a = 0$ su Y .

Osserviamo che $Z \not\subseteq Z \cup \{P\}$ implica $I_X(Z) \supsetneq I_X(Z, P)$ per il Nullstellensatz, in particolare $\exists c \in \mathbb{K}[X]$ tale che $c(Z) = 0$ ma $c(P) \neq 0$. Vale $c(b\varphi - a) = 0$ su tutto X , cioè $cb\varphi = ca$; ne deduciamo $cb \in J$, ma $cb(P) \neq 0$, dunque $P \notin V_X(J)$. □

Poiché $\mathbb{K}[X] \cong \mathcal{O}_X(X)$ e $\mathcal{O}_X(X)$ è un invariante per isomorfismo di varietà quasi-proiettive, ha senso estendere la definizione dell'anello delle coordinate a tutte le varietà affini.

Osservazione 4.2.15. Ricordiamo che una \mathbb{K} -algebra R si dice *ridotta* se non ha elementi nilpotenti. Se $X \subseteq \mathbb{A}^n$ è un chiuso affine, allora $\mathbb{K}[X]$ è una \mathbb{K} -algebra ridotta: infatti $\mathbb{K}[X] = R/I(X)$, ma $I(X)$ è un ideale radicale, dunque il quoziente non ha elementi nilpotenti. Inoltre $\mathbb{K}[X]$ è una \mathbb{K} -algebra finitamente generata dai $p(x_i)$.

In particolare, il pullback è anche un funtore controvariante dalla categoria delle varietà affini a quella delle \mathbb{K} -algebre finitamente generate ridotte.

Osservazione 4.2.16. Combinando la Proposizione 4.2.14 e la Proposizione 4.2.6 al caso $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ e $X = \mathbb{A}^n$, otteniamo che i morfismi $f : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$ sono le m -uple di polinomi in n variabili.

Proposizione 4.2.17. Le funzioni regolari su \mathbb{P}^1 sono le costanti.

Dimostrazione. Ricopriamo \mathbb{P}^1 con le solite carte affini (j_0, U_0) e (j_1, U_1) : una funzione regolare su U_0 può essere scritta tramite j_0 nella forma $p(t) \in \mathbb{K}[t]$; analogamente una funzione regolare su U_1 sarà scritta tramite j_1 nella forma $q(s) \in \mathbb{K}[s]$.

Sia $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1)$: in particolare $f|_{U_0} \in \mathcal{O}_{U_0}(U_0)$ e $f|_{U_1} \in \mathcal{O}_{U_1}(U_1)$, dunque possiamo scrivere $f|_{U_0} = p \circ j_0^{-1}$ e $f|_{U_1} = q \circ j_1^{-1}$, con $p \in \mathbb{K}[t]$ e $q \in \mathbb{K}[s]$. In particolare $p \circ j_0^{-1} = q \circ j_1^{-1}$ su $U_0 \cap U_1$, da cui $p(t) = q(1/t)$ su $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$.

Scrivendo $q(s) = \sum_{i=0}^m a_i s^i$ con $a_m \neq 0$ otteniamo $t^m p(t) = a_m + t(\dots)$ su $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$, quindi su \mathbb{A}^1 passando alla chiusura. Applicando il principio d'identità dei polinomi, da $a_m \neq 0$ deduciamo $m = 0$, dunque $f|_{U_0} \equiv a_0$. Analogamente f è costante su U_1 ; dato che $U_0 \cap U_1 \neq \emptyset$, f è costante su tutto \mathbb{P}^1 . □

Corollario 4.2.18. Le funzioni regolari su \mathbb{P}^n sono le costanti.

Dimostrazione. Se $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{P}^n)$, in particolare f è costante su tutte le rette proiettive (sono isomorfe a \mathbb{P}^1). Fissato un punto $O \in \mathbb{P}^n$, per ogni $P \neq O$ si ha

$$f(P) = f|_{L(O,P)}(P) = f|_{L(O,P)}(O) = f(O). \quad \square$$

Esempio 4.2.19. Esistono morfismi che sono omeomorfismi, ma non sono isomorfismi. Sia $C := V_{\mathbb{A}^2}(y^2 - x^3)$: questa curva piana presenta una cuspidale in 0 (vedi Figura 2.3). Diamo una parametrizzazione $f : \mathbb{A}^1 \rightarrow C$: va bene per esempio $f(t) = (t^2, t^3)$. Non è difficile verificare che f è un morfismo e un omeomorfismo.

Sia ora $f^* : \mathbb{K}[C] \rightarrow \mathbb{K}[\mathbb{A}^1]$ il pullback di f : chiaramente $\mathbb{K}[C] = \mathbb{K}[x, y]/(y^2 - x^3)$, e $f^*(a(x, y)) = a(t^2, t^3)$, da cui $t \notin \text{Im } f^*$. In particolare f^* non è surgettiva, quindi f non è un isomorfismo.

Si può verificare che non può proprio esistere un isomorfismo tra \mathbb{A}^1 e C : se ci fosse, questo indurrebbe un isomorfismo di \mathbb{K} -algebre tra $\mathbb{K}[C]$ e $\mathbb{K}[\mathbb{A}^1]$. A questo punto è sufficiente osservare che tali \mathbb{K} -algebre non possono essere isomorfe, con diverse argomentazioni:

- $\mathbb{K}[\mathbb{A}^1]$ è un UFD, mentre $\mathbb{K}[C]$ non lo è, dato che $y^2 = x^3$ in C , e si può verificare che x e y sono irriducibili in C .
- $\mathbb{K}[\mathbb{A}^1]$ è un PID, mentre $\mathbb{K}[C]$ possiede ideali non principali (provare con (x, y)).

La mappa di parametrizzazione dell'esempio precedente non è calata dal cielo: intersecando le rette della forma $y = tx$ con la curva, otteniamo $(x, y) = (t^2, t^3)$. Possiamo anche osservare che il grafico di f è la cubica gobba.

Esercizio 4.2.20. Mostrare che, parametrizzando in modo analogo la curva

$$C := V_{\mathbb{A}^2}(y^2 - x^2(x + 1)),$$

otteniamo un morfismo non bigettivo.

Soluzione. Intersecando con le rette otteniamo la parametrizzazione $f(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$, che è un morfismo in quanto polinomiale, ma non è iniettiva, dato che $f(\pm 1) = (0, 0)$ (d'altra parte, ricordiamo dalla Figura 2.2 che $(0, 0)$ è un punto doppio). \square

4.2.2 Aperti principali

Definizione 4.2.21. Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n$ un chiuso: indichiamo con $X_f := X \setminus V_X(f)$, al variare di $f \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, gli *aperti principali* di X (confronta con la Definizione 3.2.6).

Si verifica immediatamente che gli aperti principali formano una base di aperti di X , in particolare, sono varietà quasi-proiettive.

Proposizione 4.2.22. Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n$ un chiuso affine, sia $f \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$: allora X_f è una varietà affine e $\mathbb{K}[X_f] = \mathbb{K}[X]_f = \{ \frac{a}{f^m} : a \in \mathbb{K}[X], m \in \mathbb{N} \}$.

Dimostrazione. Siano $f \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, sia $J := I(X) + (yf - 1)$ ideale di $R[y]$ e sia

$$Y := V_{\mathbb{A}^{n+1}}(J) = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{A}^{n+1} : \mathbf{x} \in X, yf(\mathbf{x}) = 1\} :$$

vogliamo mostrare che $X_f \cong Y$. Consideriamo le mappe

$$\varphi : X_f \rightarrow Y \mid \varphi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, 1/f(\mathbf{x})), \quad \psi : Y \rightarrow X_f \mid \psi(\mathbf{x}, y) = (\mathbf{x}) :$$

si verifica che sono ben definite, l'una l'inversa dell'altra, e morfismi; dunque X_f è una varietà affine e ha senso considerare $\mathbb{K}[X_f] = \mathbb{K}[Y]$.

Estendiamo banalmente $\psi : Y \rightarrow X$ e consideriamo $\psi^* : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[Y]$: dato che $\psi^*(f)y = 1$ su Y , per la proprietà universale della localizzazione possiamo estendere ψ^* a $\bar{\psi} : \mathbb{K}[X]_f \rightarrow \mathbb{K}[Y]$, che sarà ancora un omomorfismo di \mathbb{K} -algebre. In questo modo abbiamo ottenuto il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc} R & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] & \xrightarrow{j} & \mathbb{K}[X]_f \\ \downarrow & & \downarrow \psi^* & & \searrow \bar{\psi} \\ R[y] & \longrightarrow & \mathbb{K}[Y] & & \end{array}$$

Vogliamo dimostrare che $\bar{\psi}$ è un isomorfismo di \mathbb{K} -algebre. In ciò che segue, per evitare di appesantire la notazione con tutte le mappe del diagramma, sarà spesso abusata.

$\bar{\psi}$ è surgettiva $\mathbb{K}[Y]$ è generato dalle immagini di $x_1, \dots, x_n, y \in R[y]$. Da $x_1, \dots, x_n \in R$ si deduce facilmente $x_1, \dots, x_n \in \text{Im } \bar{\psi}$; d'altra parte $yf = 1$ su $\mathbb{K}[Y]$ implica $y|_Y = f^{-1}|_Y = \psi^*(f)^{-1} = \bar{\psi}(\frac{1}{f}) \in \text{Im } \bar{\psi}$.

$\bar{\psi}$ è iniettiva Sia $\alpha = \frac{a}{f^m}$ con $a \in \mathbb{K}[X]$ un elemento generico di $\mathbb{K}[X]_f$: vale

$$\bar{\psi}(\alpha) = \psi^*(a)\psi^*(f)^{-m} = ay^m|_Y.$$

Se fosse $\bar{\psi}(\alpha) = 0$, dato che $y \neq 0$ su Y si avrebbe $a|_Y = 0$, da cui $a|_X = 0$. D'altra parte $\alpha = 0$ se e solo se $f^k a|_X = 0$ per qualche k , che è soddisfatto per $k \geq 1$.

Ad un esame più attento, si può verificare che vale proprio $\mathcal{O}_{X_f}(X_f) = \mathbb{K}[X]_f$ (nel senso che l'isomorfismo che li lega non cambia la forma delle funzioni regolari). \square

Corollario 4.2.23. Ogni varietà quasi-proiettiva $X \subseteq \mathbb{P}^n$ ha una base di aperti affini².

Dimostrazione. Lo facciamo in tre punti, aumentando la generalità.

- Se X è un chiuso affine, applichiamo la proposizione precedente.
- Se X è localmente chiuso in \mathbb{A}^n , si verifica che X è aperto in $\bar{X} \subseteq \mathbb{A}^n$. Dato che \bar{X} è un chiuso affine, ammette una base di aperti affini \mathcal{B} ; scegliendo $\mathcal{B}' := \{B \in \mathcal{B} : B \subseteq X\}$, otteniamo una base di aperti affini per X (gli aperti di X sono anche aperti di \bar{X}).
- In generale, consideriamo il ricoprimento aperto $X = \bigcup_{i=0}^n (X \cap U_i)$, dato dalle carte affini: ciascun $X \cap U_i$ è un insieme localmente chiuso in $U_i \cong \mathbb{A}^n$, quindi ammette una base di aperti affini \mathcal{B}_i . Combinando tali basi in $\mathcal{B} := \bigcup_{i=0}^n \mathcal{B}_i$, ne otteniamo una per X . \square

Esempio 4.2.24. $X = \mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$ è una varietà quasi-proiettiva (è un aperto di \mathbb{A}^2) ma, come dimostreremo, non è una varietà affine. Scriviamo $X = U \cup V$, dove $U := \{x \neq 0\}$ e $V := \{y \neq 0\}$ sono due aperti principali di \mathbb{A}^2 : in particolare abbiamo $\mathbb{K}[U] = \mathbb{K}[\mathbb{A}^2]_x$ e $\mathbb{K}[V] = \mathbb{K}[\mathbb{A}^2]_y$.

Supponiamo per assurdo che X sia una varietà affine: in particolare l'inclusione $i : X \hookrightarrow \mathbb{A}^2$ sarà un morfismo con pullback $i^* : \mathbb{K}[\mathbb{A}^2] \rightarrow \mathbb{K}[X]$. Il nostro scopo è mostrare che i^* è un

²Nel senso delle varietà.

isomorfismo: in questo modo si può osservare che $\mathfrak{m} = (x, y)$ è un ideale massimale di $\mathbb{K}[\mathbb{A}^2]$, quindi di $\mathbb{K}[X]$, tuttavia $V_X(\mathfrak{m}) = \emptyset$, in contraddizione con il Nullstellensatz relativo.

Verificare che i^* è iniettiva è immediato; dimostriamo che è surgettiva. Se $f \in \mathbb{K}[X]$, allora $f|_U \in \mathbb{K}[U]$ e $f|_V \in \mathbb{K}[V]$, da cui

$$f|_U = \frac{a(x, y)}{x^\alpha}, \quad f|_V = \frac{b(x, y)}{y^\beta}, \quad (x, a) = (y, b) = 1.$$

Se $\alpha \leq 0$, allora $f|_U \in \mathbb{K}[\mathbb{A}^2]$ e passando alla chiusura $f \in \mathbb{K}[\mathbb{A}^2]$; lo stesso vale se $\beta \leq 0$. Se $\alpha, \beta \geq 1$, allora $y^\beta a(x, y) = x^\alpha b(x, y)$ su $U \cap V$, quindi su \mathbb{A}^2 (passando alla chiusura). Dunque $y^\beta a = x^\alpha b$ in $\mathbb{K}[x, y]$, da cui $y \mid b$, che è assurdo.

4.2.3 Equivalenza con \mathbb{K} -algre ridotte finitamente generate

Definizione 4.2.25. Un morfismo di varietà quasi-proiettive $f : X \rightarrow Y$ si dice *dominante* se soddisfa $\overline{\text{Im } f} = Y$.

Lemma 4.2.26. Siano $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ due chiusi affini e sia $f : X \rightarrow Y$ un morfismo: allora $\text{Ker}(f^*) = I_Y(\text{Im } f)$ e $\overline{\text{Im } f} = V_Y(\text{Ker}(f^*))$.

Dimostrazione. Si verifica facilmente che

$$\text{Ker}(f^*) = \{g \in \mathbb{K}[Y] : g \circ f|_X = 0\} = \{g \in \mathbb{K}[Y] : g|_{f(X)} = 0\} = I_Y(\text{Im } f),$$

da cui $\overline{\text{Im } f} = V_Y(I_Y(\text{Im } f)) = V_Y(\text{Ker}(f^*))$. □

Una conseguenza immediata di questo lemma è il seguente corollario:

Corollario 4.2.27. Se X, Y sono varietà affini e $f : X \rightarrow Y$ è un morfismo, allora f è dominante se e solo se f^* è iniettiva.

Esempio 4.2.28. In generale i morfismi non sono né aperti né chiusi. Si consideri per esempio $f : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ tale che $f(x, y) \mapsto (x, xy)$: si verifica che $\text{Im } f = \{x \neq 0\} \cup \{0, 0\}$, che non è un chiuso, né un aperto, né una varietà quasi-proiettiva, tuttavia è un *costruibile* (cioè unione finita di localmente chiusi). Quello che si può dire (ma non dimostreremo) è che l'immagine di un morfismo dominante è una varietà costruibile.

Definizione 4.2.29. Siano X e Y varietà quasi-proiettive, sia $f : X \rightarrow Y$ un morfismo: diciamo che f è un'*immersione chiusa* se $\text{Im } f$ è un chiuso di Y e $f : X \rightarrow \text{Im } f$ è un isomorfismo.

Osserviamo che una varietà affine è una varietà quasi-proiettiva che ammette un'immersione chiusa in uno spazio affine.

Lemma 4.2.30. Sia X una varietà quasi-proiettiva, Y una varietà affine e $j : X \hookrightarrow Y$ un'immersione chiusa: allora X è una varietà affine e $j^* : \mathbb{K}[Y] \rightarrow \mathbb{K}[X]$ è surgettiva.

Dimostrazione. X è una varietà affine in quanto è isomorfa ad un chiuso di Y . Senza perdita di generalità, possiamo considerare il caso in cui $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{A}^m$ e j è la mappa di inclusione. È sufficiente osservare che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} R & & \\ p_Y \downarrow & \searrow p_X & \\ \mathbb{K}[Y] & \xrightarrow{j^*} & \mathbb{K}[X] \end{array}$$

Dato che p_X è surgettivo, banalmente anche j^* deve esserlo. \square

Vale anche un viceversa, ma non siamo ancora pronti per dimostrarlo.

Proposizione 4.2.31. Siano X, Y varietà affini, sia $\varphi : \mathbb{K}[Y] \rightarrow \mathbb{K}[X]$ un omomorfismo di \mathbb{K} -algebre. Allora $\exists! f : X \rightarrow Y$ morfismo tale che $f^* = \varphi$.

Dimostrazione. Separiamo due casi.

- Se $X = \mathbb{A}^n$ e $Y = \mathbb{A}^m$, possiamo identificare $\mathbb{K}[Y] = \mathbb{K}[y_1, \dots, y_m]$ e $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Sia $F = (F_1, \dots, F_m) : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$ un morfismo: poiché $\mathbb{K}[Y]$ è generato da y_1, \dots, y_m , varrà $F^* = \varphi$ se e solo se $F_i = y_i \circ F = F^*(y_i) = \varphi(y_i)$ per ogni i ; è chiaro che tale F è ben definito ed è univoco.
- In generale, siano $i_X : X \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ e $i_Y : Y \hookrightarrow \mathbb{A}^m$ le immersioni chiuse che rendono X, Y varietà affini, sia $\tilde{\varphi} := \varphi \circ i_Y^* : \mathbb{K}[\mathbb{A}^m] \rightarrow \mathbb{K}[X]$.

Passando alle \mathbb{K} -algebre, i_X^* e i_Y^* sono surgettive; in particolare possiamo prendere $F_i \in \mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$ che solleva $\tilde{\varphi}(y_i)$ per ogni i , quindi costruire la mappa $\varphi_0 : \mathbb{K}[\mathbb{A}^m] \rightarrow \mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$ che fa commutare il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \xleftarrow{i_X^*} & \mathbb{K}[\mathbb{A}^n] \\ \uparrow \varphi & \swarrow \tilde{\varphi} & \uparrow \varphi_0 \\ \mathbb{K}[Y] & \xleftarrow{i_Y^*} & \mathbb{K}[\mathbb{A}^m] \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{i_X} & \mathbb{A}^n \\ \downarrow f & \searrow \tilde{f} & \downarrow F \\ Y & \xleftarrow{i_Y} & \mathbb{A}^m \end{array}$$

Per il primo punto, esiste un unico morfismo $F : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$ tale che $F^* = \varphi_0$. Sia $\tilde{f} := F|_X = F \circ i_X$: osservando che $\tilde{f}^* = i_X^* \circ \varphi_0 = \varphi \circ i_Y^*$ e applicando due volte il Lemma 4.2.26, si verifica che

$$\text{Im } \tilde{f} \subseteq V_{\mathbb{A}}(\text{Ker}(\tilde{f}^*)) \subseteq V_{\mathbb{A}}(\text{Ker}(i_Y^*)) = V_{\mathbb{A}}(I_{\mathbb{A}}(\text{Im } i_Y)) = V_{\mathbb{A}}(I_{\mathbb{A}}(Y)) = Y,$$

dunque $f := \tilde{f} : X \rightarrow Y$ è il nostro candidato morfismo. Per verificare che $f^* = \varphi$, dato che i_Y^* è surgettiva basta verificare $f^* \circ i_Y^* = \varphi \circ i_Y^*$, ma questo è immediato. Lasciamo la verifica dell'unicità per esercizio. \square

Corollario 4.2.32. Siano X, Y varietà affini, sia $f : X \rightarrow Y$ un morfismo: allora f è un isomorfismo se e solo se f^* è un isomorfismo di \mathbb{K} -algebre. In particolare, $X \cong Y$ se e solo se $\mathbb{K}[X] \cong \mathbb{K}[Y]$.

Dimostrazione. La freccia (\Rightarrow) l'abbiamo già verificata. Supponiamo quindi che f^* sia un isomorfismo, e sia $\varphi = f^{*-1} : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[Y]$: dato $g : Y \rightarrow X$ morfismo tale che $g^* = \varphi$, si osserva facilmente che $(f \circ g)^* = \text{Id}_Y^*$, da cui $f \circ g = \text{Id}_Y$ per l'unicità (e analogamente $g \circ f = \text{Id}_X$). \square

Osservazione 4.2.33. Il corollario precedente offre un'argomentazione alternativa per concludere la discussione dell'Esempio 4.2.24: abbiamo visto che, se $X := \mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$ fosse una varietà affine e $j : X \hookrightarrow \mathbb{A}^2$ la mappa di inclusione, allora j^* sarebbe un isomorfismo, ma questo è assurdo perché j non è iniettiva.

Adesso siamo pronti per dimostrare l'altra freccia del lemma:

Proposizione 4.2.34. Siano X e Y varietà affini, sia $f : X \rightarrow Y$ un morfismo: allora f è un'immersione chiusa se e solo se f^* è surgettiva.

Dimostrazione. Costruiamo i seguenti diagrammi commutativi:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & \overline{\text{Im } f} \\ f \downarrow & \nearrow j & \\ Y & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \xleftarrow{g^*} & \mathbb{K}[\overline{\text{Im } f}] \\ f^* \uparrow & \nwarrow j^* & \\ \mathbb{K}[Y] & & \end{array}$$

Osserviamo che j^* è suriettiva per il lemma, e g^* è iniettiva perché g è dominante. Dunque g^* è un isomorfismo se e solo se g^* è surgettiva, se e solo se f^* è surgettiva. Dato che g^* è un isomorfismo se e solo se g è un isomorfismo, basta verificare che g è un isomorfismo se e solo se f è un'immersione chiusa, ma questo è immediato. \square

Concludiamo questa sezione dimostrando che il pullback induce un'equivalenza di categorie:

Proposizione 4.2.35. Sia \mathbb{K} un campo algebricamente chiuso, sia $\underline{\text{Aff}}_{\mathbb{K}}$ la categoria delle varietà affini e $\underline{\text{RAlg}}_{\mathbb{K}}$ quella delle \mathbb{K} -algebre ridotte finitamente generate. Sia $F : \underline{\text{Aff}}_{\mathbb{K}} \rightarrow \underline{\text{RAlg}}_{\mathbb{K}}$ il funtore controvariante tale che $F(X) = \mathbb{K}[X]$ e $F(\alpha) = \alpha^*$: allora F è un'equivalenza di categorie.

Dimostrazione. Vogliamo applicare il Lemma 1.3.9. Osserviamo che, grazie alle Proposizioni 4.2.31, F è pienamente fedele, quindi basta dimostrare l'essenziale suriettività.

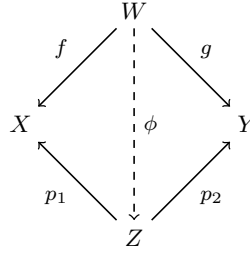
Se R è una \mathbb{K} -algebra ridotta e finitamente generata, sarà generata da un opportuno omomorfismo suriettivo di \mathbb{K} -algebre $p : \mathbb{K}[\mathbb{A}^n] \twoheadrightarrow R$. Posto $J := \text{Ker}(p)$, si ha $R \cong \mathbb{K}[\mathbb{A}^n]/J$, da cui $J = \sqrt{J}$ perché R è ridotta. Dunque per il Nullstellensatz di Hilbert $J = I(X)$ per qualche chiuso $X \subseteq \mathbb{A}^n$, da cui $R \cong \mathbb{K}[X]$. \square

In particolare, qualunque informazione sulle varietà affini possono essere ricavate dagli anelli coordinati associati, e viceversa.

4.3 Prodotto di varietà quasi-proiettive

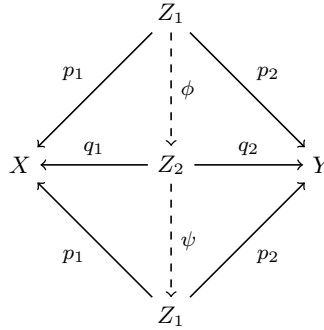
Introduciamo il concetto di prodotto di varietà quasi-proiettive. La definizione che segue, basata sulla proprietà universale del prodotto, risulterà familiare specialmente a chi ha già avuto un'infarinatura di teoria delle categorie.

Definizione 4.3.1. Siano X, Y due varietà quasi-proiettive. Una terna (Z, p_1, p_2) , dove Z è una varietà quasi-proiettiva e $p_1 : Z \rightarrow X$, $p_2 : Z \rightarrow Y$ sono due morfismi, si dice *prodotto* delle varietà quasi-proiettive X e Y se, per ogni varietà quasi-proiettiva W e morfismi $f : W \rightarrow X$, $g : W \rightarrow Y$, esiste un'unico morfismo $\phi : W \rightarrow Z$ che fa commutare il diagramma:



Proposizione 4.3.2. Il prodotto di varietà è unico a meno di isomorfismo.

Dimostrazione. Supponiamo di avere due prodotti (Z_1, p_1, p_2) e (Z_2, q_1, q_2) . Applicando la proprietà universale a (Z_2, q_1, q_2) rispetto a Z_1 , e a (Z_1, p_1, p_2) rispetto a Z_2 , otteniamo due morfismi ϕ, ψ che fanno commutare il seguente diagramma:



Banalmente $\psi \circ \phi : Z_1 \rightarrow Z_1$ fa commutare il sottomodulo Z_1, X, Z_1, Y , così come lo fa commutare Id_{Z_1} , dunque $\psi \circ \phi = \text{Id}_{Z_1}$ per unicità. Analogamente $\phi \circ \psi = \text{Id}_{Z_2}$. \square

4.3.1 Prodotto di varietà affini

Vediamo prima cos'è il prodotto di spazi affini:

Proposizione 4.3.3. Il prodotto delle varietà affini \mathbb{A}^n e \mathbb{A}^m è $(\mathbb{A}^{n+m}, p_1, p_2)$, dove $p_1 : \mathbb{A}^{n+m} \rightarrow \mathbb{A}^n$ e $p_2 : \mathbb{A}^{n+m} \rightarrow \mathbb{A}^m$ sono le proiezioni usuali.

Dimostrazione. Verifichiamo che $(\mathbb{A}^{n+m}, p_1, p_2)$ soddisfa la proprietà universale. Sia W una varietà quasi-proiettiva, siano $f : W \rightarrow \mathbb{A}^n$ e $g : W \rightarrow \mathbb{A}^m$ due morfismi: avremo

$$f = (f_1, \dots, f_n), \quad g = (g_1, \dots, g_m),$$

dove gli f_i e i g_j sono funzioni regolari. Un terzo morfismo

$$h = (h_1, \dots, h_n, h'_1, \dots, h'_m) : W \rightarrow \mathbb{A}^{n+m}$$

fa commutare il diagramma

4.3.2 Costruzione di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

Vediamo come costruire il prodotto di spazi proiettivi $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. L'idea è identificarlo con una varietà quasi-proiettiva in dimensione più alta tramite una bigezione, quindi verificare che questa costruzione soddisfa la proprietà universale.

Definizione 4.3.7. Definiamo la *mappa di Segre*

$$s_{1,1} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3 \sim \mathbb{P}(\mathbb{A}^{2 \times 2}) \quad | \quad s_{1,1}([x_0, x_1], [y_0, y_1]) = \begin{bmatrix} x_0 y_0 & x_0 y_1 \\ x_1 y_0 & x_1 y_1 \end{bmatrix}$$

e la *varietà di Segre* $\Sigma_{1,1} := \{Z = (z_{ij}) \in \mathbb{P}^3 : \text{Rk}(Z) \leq 1\}$. Si osserva facilmente che la mappa di Segre è ben definita, e che $\text{Im}(s_{1,1}) \subseteq \Sigma_{1,1}$.

Osservazione 4.3.8. La varietà di Segre è un chiuso proiettivo: infatti, denotando un generico elemento di \mathbb{P}^3 come

$$Z = \begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

osserviamo che $\Sigma_{1,1} = V_{\mathbb{P}}(\det(Z)) = V_{\mathbb{P}}(z_0 z_3 - z_1 z_2)$.

In particolare $\Sigma_{1,1}$ è un'iperboloide iperbolico, che è una quadrica doppiamente rigata³. Ci aspettiamo quindi che esistano due famiglie di rette \mathcal{A}, \mathcal{B} , tali che

- Le rette in \mathcal{A} (risp. in \mathcal{B}) sono tutte disgiunte tra loro;
- Le rette in \mathcal{A} (risp. in \mathcal{B}) sono contenute interamente in $\Sigma_{1,1}$;
- Per ogni $P \in \Sigma_{1,1}$, esiste un'unica $r \in \mathcal{A}$ (risp. $s \in \mathcal{B}$) tale che $P \in r$ (risp. $P \in s$);
- Per ogni $r \in \mathcal{A}$ e $s \in \mathcal{B}$ si ha $\#(r \cap s) = 1$.

Effettivamente, fissato $[c, d] \in \mathbb{P}^1$, osserviamo che

$$s_{1,1}|_{\mathbb{P}^1 \times \{[c, d]\}} : [x_0, x_1] \mapsto \begin{bmatrix} cx_0 & dx_0 \\ cx_1 & dx_1 \end{bmatrix}$$

è una trasformazione proiettiva, quindi l'immagine rispetto a $s_{1,1}$ di sottoinsiemi della forma $\mathbb{P}^1 \times \{\text{pt}\}$ (risp. $\{\text{pt}\} \times \mathbb{P}^1$) sono delle rette proiettive. Possiamo osservare che questo ci dà due famiglie di rette, che rispettano i punti precedenti.

Osservazione 4.3.9. Osserviamo che $s_{1,1}$ si può ottenere a partire dalla mappa affine

$$\tilde{s}_{1,1} : \mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^{2 \times 2} \quad | \quad \tilde{s}_{1,1}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v}\mathbf{w}^t.$$

Da questa interpretazione risulta evidente che $\text{Im}(s_{1,1}) = \Sigma_{1,1}$, e che tale mappa si può invertire: dato $Z \in \Sigma_{1,1}$, tutte le colonne sono proporzionali a \mathbf{v} , e almeno una è non nulla; in particolare possiamo sempre ricavare $\bar{\mathbf{v}}$ a partire da Z (e analogamente $\bar{\mathbf{w}}$). Dunque $\Sigma_{1,1}$ sarà la varietà candidata ad essere identificata con $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, tramite la biiezione $s_{1,1}$.

Denotiamo quindi con $p_1 : \Sigma_{1,1} \rightarrow \mathbb{P}^1$ la mappa che associa $\bar{\mathbf{v}}$ a Z , con $p_2 : \Sigma_{1,1} \rightarrow \mathbb{P}^1$ quella che associa $\bar{\mathbf{w}}$ a Z e infine $p_1 \times p_2 := (p_1, p_2) : \Sigma_{1,1} \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, che è l'inversa di $s_{1,1}$.

Proposizione 4.3.10. Le mappe $p_1, p_2 : \Sigma_{1,1} \rightarrow \mathbb{P}^1$ sono morfismi. Inoltre, identificando $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ con $\Sigma_{1,1}$ tramite la mappa di Segre, p_1 e p_2 sono le mappe di proiezione usuali.

³Fatti che qualcuno potrebbe ricordarsi da Geometria 2.

Dimostrazione. Le carte affini U_0, U_1, U_2, U_3 forniscono un ricoprimento aperto di \mathbb{P}^3 , e quindi di $\Sigma_{1,1}$. Dato che essere morfismi è una proprietà locale (vedi Osservazione 4.1.6), basta testare che $p_i|_{U_j \cap \Sigma_{1,1}}$ lo sia per ogni i, j . Per esempio, denotando $Z \in \Sigma_{1,1}$ come in (4.1), si osserva che $p_1|_{U_0 \cap \Sigma_{1,1}} = [z_0, z_2]$, che è un morfismo per il Lemma 4.1.7; gli altri casi sono del tutto analoghi.

Identificando $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ con $\Sigma_{1,1}$, il morfismo p_1 si identifica con la mappa $\tilde{p}_1 := p_1 \circ s_{1,1} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, che soddisfa $\tilde{p}_1(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{w}}) = p_1(\overline{\mathbf{v}\mathbf{w}^t}) = \bar{\mathbf{v}}$, dunque è la mappa di proiezione nella prima coordinata; analogamente $\tilde{p}_2 := p_2 \circ s_{1,1}$ sarà l'altra proiezione. \square

Resta da verificare che $\Sigma_{1,1}$ è effettivamente il prodotto di varietà di \mathbb{P}^1 e \mathbb{P}^1 , e scegliere opportunamente le proiezioni che, senza sorprese, saranno le sopracitate mappe p_1 e p_2 .

Proposizione 4.3.11. $(\Sigma_{1,1}, p_1, p_2)$ è il prodotto di \mathbb{P}^1 per \mathbb{P}^1 .

Dimostrazione. Bisogna verificare la proprietà universale. Siano quindi X, f, g come nel seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
 & X & \\
 f \swarrow & & \searrow g \\
 \mathbb{P}^1 & & \mathbb{P}^1 \\
 p_1 \swarrow & \phi \downarrow & \searrow p_2 \\
 & \Sigma_{1,1} &
 \end{array}$$

Vogliamo mostrare che esiste un'unico morfismo ϕ che fa commutare il diagramma. Osserviamo che un tale morfismo dev'essere necessariamente della forma $\phi = s_{1,1} \circ (f \times g)$: infatti

$$\begin{cases} p_1 \circ \phi = f \\ p_2 \circ \phi = g \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (p_1 \times p_2) \circ \phi = f \times g \quad \Rightarrow \quad \phi = s_{1,1} \circ (f \times g),$$

ricordando che $s_{1,1}$ è l'inversa di $(p_1 \times p_2)$.

È chiaro che una tale mappa fa commutare il diagramma, ma dobbiamo verificare che è un morfismo. Siano U_0, U_1 le carte affini standard su \mathbb{P}^1 , siano $\hat{U}_i := f^{-1}(U_i)$, $\hat{V}_j := g^{-1}(U_j)$ e $X_{i,j} := U_i \cap V_j$ per $i, j = 0, 1$. Osserviamo che gli $X_{i,j}$ formano un ricoprimento aperto di X , dunque è sufficiente verificare che i $\phi|_{X_{i,j}}$ sono morfismi.

Ci limitiamo considerare il caso $i = j = 0$: gli altri sono analoghi. Osserviamo che per il Corollario 4.2.8 si ha $f|_{\hat{U}_0} = [1, f_1]$ e $g|_{\hat{V}_0} = [1, g_1]$, con f_1, g_1 funzioni regolari; in particolare possiamo scrivere

$$\phi|_{X_{0,0}} = s_{1,1}([1, f_1], [1, g_1]) = \begin{bmatrix} 1 & g_1 \\ f_1 & g_1 f_1 \end{bmatrix}.$$

da cui $\phi : X_{0,0} \rightarrow \{z_{0,0} \neq 0\} \cong \mathbb{A}^3$ è ben definita e si può scrivere in coordinate affini come $(g_1, f_1, f_1 g_1)$; in particolare $\phi : X_{0,0} \rightarrow \{z_{0,0} \neq 0\}$ è un morfismo grazie alla Proposizione 4.2.6, dunque lo sarà anche $\phi : X_{0,0} \rightarrow \Sigma_{1,1}$ (vedi Osservazione 4.2.7). \square

D'ora in poi identificheremo dunque $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ con $\Sigma_{1,1}$ tramite la mappa di Segre.

Topologia di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

Dato che i chiusi di \mathbb{P}^1 sono comodamente identificati con le intersezioni di ipersuperfici proiettive, vorremmo dare una caratterizzazione simile anche a quelli di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Sarà necessaria la seguente definizione:

Definizione 4.3.12. Un polinomio $H \in \mathbb{K}[\mathbf{x}; \mathbf{y}]$ si dice *biomogeneo* di *bigrado* (a, b) se è omogeneo di grado a nelle x_i e omogeneo di grado b nelle y_j .

Osservazione 4.3.13. Osserviamo che, se $H \in \mathbb{K}[\mathbf{x}; \mathbf{y}]$ è un polinomio biomogeneo di bigrado (a, b) , allora $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}^*$ si ha $H(\lambda \mathbf{x}; \mu \mathbf{y}) = \lambda^a \mu^b H(\mathbf{x}; \mathbf{y})$. Questo ci permette di dare una buona definizione degli zeri di H in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$, similmente al caso degli zeri di polinomi omogenei in \mathbb{P}^k .

Definizione 4.3.14. Se $H \in \mathbb{K}[\mathbf{x}; \mathbf{y}]$ è un polinomio biomogeneo di bigrado (a, b) , indichiamo con $V_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m}(H) := \{(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m : H(\bar{\mathbf{x}}; \bar{\mathbf{y}}) = 0\}$ il luogo dei suoi zeri in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. Analogamente alle notazioni precedenti, se $S \subseteq \mathbb{K}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ è un insieme di polinomi biomogenei, indichiamo con $V_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m}(S)$ l'intersezione dei loro luoghi di zeri.

Proposizione 4.3.15. La famiglia di insiemi $\{V_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(H) : H \in \mathbb{K}[\mathbf{x}; \mathbf{y}] \text{ biomogeneo}\}$ forma una base di chiusi di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Dimostrazione. Osserviamo che $\{V_{\mathbb{P}^3}(F) : F \in \mathbb{K}[\mathbf{z}] \text{ omogeneo}\}$ è una base di chiusi di \mathbb{P}^3 , dunque $\{s_{1,1}^{-1}(V_{\mathbb{P}^3}(F)) : F \in \mathbb{K}[\mathbf{z}] \text{ omogeneo}\}$ è una base di chiusi di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. D'altra parte vale

$$s_{1,1}^{-1}(V_{\mathbb{P}^3}(F)) = \{(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 : F \circ s_{1,1}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = 0\} = \{(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 : F \circ \tilde{s}_{1,1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\}$$

e si verifica che $F \circ \tilde{s}_{1,1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F(x_i y_j)$ è un polinomio biomogeneo di bigrado $(\deg F, \deg F)$.

Per concludere basta osservare che, se $H \in \mathbb{K}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ è un polinomio biomogeneo di bigrado (a, b) , allora $V_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(H)$ è un chiuso di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Se $a = b$ lo abbiamo già visto, supponiamo dunque wlog $a < b$: dato che x_0 e x_1 non possono annullarsi contemporaneamente, osserviamo che $V_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(H) = V_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(x_0^{b-a} H, x_1^{b-a} H)$, e che i polinomi $x_0^{b-a} H$ e $x_1^{b-a} H$ hanno bigrado (b, b) . \square

Possiamo quindi definire i chiusi di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ tramite gli insiemi della forma $V_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(H)$, al variare di H tra i polinomi biomogenei. In questo modo abbiamo liberato le definizioni dalla mappa di Segre.

Esempio 4.3.16. Consideriamo l'insieme $\{x_1 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$: è definito da un polinomio biomogeneo di bigrado $(1, 0)$. Ci chiediamo se sia un chiuso; la risposta è affermativa: basta scriverlo come

$$\{x_1 = 0\} = \{x_1 y_0 = 0\} \cap \{x_1 y_1 = 0\}.$$

Infatti non si può avere contemporaneamente $y_0 = 0$ e $y_1 = 0$.

Lemma 4.3.17. La topologia indotta dalla mappa di Segre su $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ è più fine della topologia prodotto usuale su $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Dimostrazione. Consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}^1 & \xleftarrow{p_1} & \Sigma_{1,1} & \xrightarrow{p_2} & \mathbb{P}^1 \\ & \nwarrow \pi_1 & \downarrow s_{1,1} & \nearrow \pi_2 & \\ & & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & & \end{array}$$

Abbiamo già visto che π_1, π_2 sono le proiezioni usuali, e che sono morfismi. In particolare, se U, V sono aperti di \mathbb{P}^1 , allora $\pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V) = U \times V$ è un aperto di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. \square

Funzioni regolari su $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

Per vedere le funzioni regolari su $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, dobbiamo prendere le funzioni regolari su $\Sigma_{1,1}$ e spostarle su $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ tramite $s_{1,1}$.

Proposizione 4.3.18. $\varphi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{K}$ è regolare se e solo se $\forall P \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ esiste $U \ni P$ aperto di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ tale che $\varphi|_U = \frac{H}{K}$, dove $H, K \in \mathbb{K}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ sono polinomi biomogenei con lo stesso bigrado e $K \neq 0$ su U .

Dimostrazione. φ è regolare se e solo se $s_{1,1}(\varphi) = \varphi \circ s_{1,1}^{-1}$ è regolare. Se $P \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, sia $Q := s_{1,1}(P)$: esiste $V \ni Q$ aperto di $\Sigma_{1,1}$ tale che $s_{1,1}(\varphi)|_V = \frac{A}{B}$, con A, B polinomi omogenei di grado d e $B \neq 0$ su V . Di conseguenza, posto $U := s^{-1}(V)$, $\varphi|_U = \frac{A}{B} \circ s_{1,1} = \frac{A \circ \tilde{s}_{1,1}}{B \circ \tilde{s}_{1,1}} = \frac{H}{K}$; come già visto H e K sono polinomi biomogenei di bigrado (d, d) , e si avrà $K \neq 0$ su U .

Supponiamo ora che φ sia localmente della forma $\frac{H}{K}$ con H, K polinomi biomogenei di bigrado (a, b) . Sia $Q \in \Sigma_{1,1}$: wlog $Q \in \{z_0 \neq 0\}$ (non possono annullarsi tutte le coordinate), dunque riusciamo a scrivere $s_{1,1}(\varphi) = \frac{H}{K}(z_0, z_2; z_1, z_3) = \frac{A}{B}$ in un opportuno intorno aperto di Q . È chiaro che A, B sono polinomi omogenei di grado $a + b$, e che $B \neq 0$ su tale intorno. \square

Osservazione 4.3.19. Volendo potevamo applicare il trucco della Proposizione 4.3.15 anche alla dimostrazione precedente: una volta affermato che le funzioni regolari su $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ sono quelle che si possono scrivere localmente come rapporto di polinomi biomogenei di bigrado (d, d) , basta mostrare che i rapporti di polinomi biomogenei di bigrado (a, b) possono essere riportati al caso (d, d) . Infatti, se $\varphi : V \rightarrow \mathbb{K}$ con $V \subseteq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ aperto è rapporto di polinomi biomogenei A, B di bigrado (a, b) con $a < b$, possiamo spezzare $V = (V \cap \{x_0 \neq 0\}) \cup (V \cap \{x_1 \neq 0\}) =: V_0 \cup V_1$ e scrivere

$$\varphi(\mathbf{x}; \mathbf{y})|_{V_i} = \frac{x_i^{b-a} A}{x_i^{b-a} B}.$$

Osserviamo che $x_i^{b-a} A$ e $x_i^{b-a} B$ sono biomogenei di bigrado (b, b) , e che $x_i^{b-a} B \neq 0$ in V_i .

4.3.3 Caso generale

La costruzione fatta per $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ si estende facilmente al caso di $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$, tramite le seguenti definizioni:

Definizione 4.3.20. Definiamo per $n, m \geq 1$ la *mappa di Segre*

$$s_{n,m} : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^{nm+n+m} \sim \mathbb{P}(\mathbb{A}^{(n+1) \times (m+1)}) \quad | \quad (\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) \mapsto \overline{\mathbf{x}\mathbf{y}^t},$$

e definiamo analogamente la *varietà di Segre* $\Sigma_{n,n} := \{Z = (z_{ij}) \in \mathbb{P}^{nm+n+m} : \text{Rk}(Z) \leq 1\}$.

Definiamo ancora $p_1 : \Sigma_{n,m} \rightarrow \mathbb{P}^n$ e $p_2 : \Sigma_{n,m} \rightarrow \mathbb{P}^m$ come i morfismi dati rispettivamente dalle colonne e dalle righe, e come prima si verifica che $p_1 \times p_2$ e $s_{n,m}$ sono l'una l'inversa dell'altra. A questo punto è immediato verificare il seguente:

Proposizione 4.3.21. $(\Sigma_{n,m}, p_1, p_2)$ è il prodotto $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$.

Analogamente a prima, i chiusi di $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ saranno intersezione arbitraria di insiemi della forma $V_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m}(H)$, al variare di H tra i polinomi biomogenei di bigrado arbitrario, e la topologia indotta dalla mappa di Segre su $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ sarà più fine della topologia prodotto. Infine, anche la caratterizzazione delle funzioni regolari è del tutto analoga.

Osservazione 4.3.22. Siano $X \subseteq \mathbb{P}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ due varietà quasi-proiettive: in particolare $X = U \cap Z$ e $Y = V \cap W$ con U, V aperti e Z, W chiusi nei rispettivi spazi. Osserviamo che $X \times Y = (U \times V) \cap (Z \times W)$, e che $U \times V$ e $Z \times W$ sono un aperto e un chiuso di $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ (lo sarebbero nella topologia prodotto, che è meno fine). In particolare, $X \times Y$ ha struttura di varietà quasi-proiettiva ereditata da $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$.

Questo è il candidato naturale per essere il prodotto di varietà di X e Y , con le usuali mappe di proiezione.

Proposizione 4.3.23. Siano $X, Y \subseteq \mathbb{P}^m$ due varietà quasi-proiettive, siano $p_1 : X \times Y \rightarrow X$ e $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$ le mappe di proiezione. Allora $(X \times Y, p_1, p_2)$ è il prodotto di varietà di X e Y .

Dimostrazione. La proprietà universale si verifica facilmente, allo stesso modo di come si era fatto nella Proposizione 4.3.5. \square

Osservazione 4.3.24. Poiché $X \times Y$ può sempre essere immerso in un prodotto $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$, possiamo dedurre la forma dei suoi chiusi e delle sue funzioni regolari da quella che possiedono in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$.

È interessante osservare che, se per esempio X è una varietà affine, potremmo scrivere X in coordinate affini e Y in coordinate proiettive; in questo modo i chiusi della base corrisponderanno a polinomi omogenei in \mathbf{y} , e le funzioni regolari saranno localmente rapporto di polinomi omogenei in \mathbf{y} dello stesso grado (con la usuale condizione sul denominatore).

Il Lemma 4.1.7 si estende facilmente al contesto del prodotto di varietà:

Lemma 4.3.25. Siano $X \subseteq \mathbb{P}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{P}^k$ varietà quasi-proiettive, siano F_0, \dots, F_m polinomi biomogenei in $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_k]$ con lo stesso bigrado, tali da non annullarsi contemporaneamente su $X \times Y$: allora la mappa $F : X \times Y \rightarrow \mathbb{P}^m$ tale che $F(\bar{\mathbf{x}}; \bar{\mathbf{y}}) = [F_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \dots, F_m(\mathbf{x}, \mathbf{y})]$ è ben definita ed è un morfismo.

Dimostrazione. Del tutto analoga a quella del Lemma 4.1.7. \square

Esercizio 4.3.26. Siano X, Y, Z varietà quasi-proiettive, siano $f : Z \rightarrow X$ e $g : Z \rightarrow Y$ morfismi: allora anche la mappa $f \times g : Z \rightarrow X \times Y$, tale che $(f \times g)(z) = (f(z), g(z))$, è un morfismo.

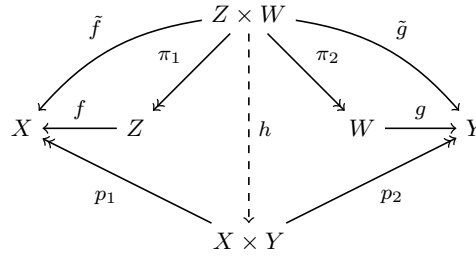
Soluzione. Consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & Z & \\
 f \swarrow & & \searrow g \\
 X & & Y \\
 p_1 \swarrow & \downarrow h & \searrow p_2 \\
 & X \times Y &
 \end{array}$$

dove h è il morfismo dato dalla proprietà universale: si verifica facilmente che $h = (f, g)$. \square

Esercizio 4.3.27. Siano X, Y, Z, W varietà quasi-proiettive, siano $f : Z \rightarrow X$ e $g : W \rightarrow Y$ morfismi: allora anche la mappa $(f, g) : Z \times W \rightarrow X \times Y$, tale che $(f, g)(z, w) = (f(z), g(w))$, è un morfismo.

Soluzione. Consideriamo il diagramma commutativo



dove $\tilde{f} := f \circ \pi_1$, $\tilde{g} := g \circ \pi_2$ e h è il morfismo dato dalla proprietà universale di $X \times Y$: si verifica facilmente che $h = f \times g$. \square

Proposizione 4.3.28. Sia X una varietà quasi-proiettiva, sia $\Delta_X = \{(x, y) \in X \times X : x = y\}$ la sua *diagonale*: allora Δ_X è chiuso in $X \times X$.

Dimostrazione. Banalmente $\Delta_X = (X \times X) \cap \Delta_{\mathbb{P}^n}$, dunque è sufficiente dimostrare la tesi per $X = \Delta_{\mathbb{P}^n}$. D'altra parte, vale

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbb{P}^n} &= \{(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n : \bar{x} = \bar{y}\} = \\ &= \{(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n : \text{Rk}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \leq 1\}, \end{aligned}$$

cioè $\Delta_{\mathbb{P}^n}$ è l'intersezione del luogo di zeri di opportuni determinanti, che risultano essere polinomi omogenei di bigrado $(1, 1)$ in \mathbf{x} e \mathbf{y} . \square

Osservazione 4.3.29. Ricordiamo che uno spazio topologico è T2 se e solo se la diagonale è chiusa nella topologia prodotto. Non siamo davvero in questo caso, dato che la topologia considerata su $X \times X$ non è quella prodotto nel senso usuale, ma dalla chiusura della diagonale conseguono altri risultati, di cui in genere sono dotate le topologie T2.

Proposizione 4.3.30. Siano X, Y due varietà quasi-proiettive, sia $f : X \rightarrow Y$ un morfismo e sia $\Gamma_f := \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$ il suo *grafico*: allora Γ_f è chiuso in $X \times Y$, ed è isomorfo a X .

Dimostrazione. Sia $F := (f, \text{Id}_Y) : X \times Y \rightarrow Y \times Y$: si può osservare che $\Gamma_f = F^{-1}(\Delta_Y)$, dunque il grafico è chiuso perché la diagonale lo è.

Per l'isomorfismo, è sufficiente osservare che $(\text{Id}_X \times f) : X \rightarrow \Gamma_f$ è un morfismo bigettivo, e la sua mappa inversa è il morfismo di proiezione $p_1 : \Gamma_f \rightarrow X$. \square

Proposizione 4.3.31. Siano X, Y due varietà quasi-proiettive, siano $f, g : X \rightarrow Y$ due morfismi: allora $Z = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ è un chiuso di X .

Dimostrazione. La mappa $f \times g : X \rightarrow Y \times Y$ è un morfismo (vedi Esercizio 4.3.26), dunque $Z = (f \times g)^{-1}(\Delta_Y)$ è un chiuso. \square

Segue immediatamente il seguente corollario.

Corollario 4.3.32. Siano X, Y due varietà quasi-proiettive, siano $f, g : X \rightarrow Y$ due morfismi, supponiamo che valga $f = g$ su un denso di X : allora $f = g$ su tutto X .

Esempio 4.3.33. Siano X, Y due varietà quasi-proiettive, sia $y_0 \in Y$, sia $i_{y_0} : X \rightarrow X \times Y$ tale che $i_{y_0}(x) = (x, y_0)$: questa mappa è un morfismo perché può essere scritta come prodotto di morfismi ($i_{y_0} = \text{Id}_X \times \text{cost}_{y_0}$). Inoltre, si verifica facilmente che i_{y_0} è un isomorfismo con la sua immagine, con inversa $p_1|_{X \times \{y_0\}}$.

Proposizione 4.3.34. Siano X, Y due varietà quasi-proiettive irriducibili: allora anche $X \times Y$ è irriducibile.

Dimostrazione. Sia $X \times Y = Z \cup W$ con Z, W chiusi di $X \times Y$. Osserviamo che $\forall x \in X$ vale

$$\{x\} \times Y = ((\{x\} \times Y) \cap Z) \cup ((\{x\} \times Y) \cap W) =: Z_x \cup Y_x.$$

Dato che $\{x\} \times Y \cong Y$ è irriducibile, e Z_x, Y_x sono due chiusi, si deve avere $\{x\} \times Y \subseteq Z$ oppure $\{x\} \times Y \subseteq W$. Definendo $X_1 := \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq Z\}$ e $X_2 := \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq W\}$, dovrà dunque valere $X = X_1 \cup X_2$.

Osserviamo che, se X_1 e X_2 fossero due chiusi, avremmo finito: si avrebbe wlog $X_1 = X$, da cui $Z = X \times Y$ per definizione di X_1 . Se $p_1 : X \times Y \rightarrow X$ è la proiezione usuale, vale

$$\begin{aligned} X_1 &= \{x \in X : \forall y \in Y \ (x, y) \in Z\} = \\ &= \{x \in X : \forall y \in Y \ x \in p_1((X \times \{y\}) \cap Z)\} = \\ &= \bigcap_{y \in Y} p_1((X \times \{y\}) \cap Z). \end{aligned}$$

Dato che $p_1 : X \times \{y\} \rightarrow X$ è un isomorfismo, e che $X \times \{y\}$ e Z sono chiusi di $X \times Y$, ne deduciamo che $p_1((X \times \{y\}) \cap Z)$ sono chiusi di X , e quindi lo è anche X_1 (e X_2 , scrivendolo in modo analogo). \square

4.4 Varietà proiettive

Definizione 4.4.1. Una varietà quasi-proiettiva X si dice *proiettiva* se è isomorfa ad un chiuso proiettivo.

Osservazione 4.4.2. Si verifica facilmente che, se X, Y sono varietà proiettive, allora anche $X \times Y$ lo è. Infatti abbiamo già visto che questo è verificato se X e Y sono dei chiusi proiettivi, e ci si riconduce facilmente a tale situazione, a meno di isomorfismo.

Definizione 4.4.3. Una varietà quasi-proiettiva X si dice *universalmente chiusa* se, per ogni altra varietà quasi-proiettiva Y , la proiezione $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$ è una mappa chiusa.

Teorema 4.4.4. Le varietà proiettive sono universalmente chiuse.

Dimostrazione. Sia X una varietà proiettiva, Y una varietà quasi-proiettiva e $Z \subseteq X \times Y$ un chiuso: vogliamo dimostrare che $p_2(Z)$ è un chiuso di Y . Come prima cosa mostreremo che possiamo sempre ricondurci a $X = \mathbb{P}^n$ e $Y = \mathbb{A}^m$, quindi dimostreremo la tesi in quel caso.

- Possiamo scrivere Y come unione di aperti affini V_i (vedi Corollario 4.2.23). Indichiamo con $\pi_i : X \times V_i \rightarrow V_i$ la proiezione, e poniamo $Z_i := Z \cap (X \times V_i)$. Osserviamo che $p(Z)$ è chiuso se e solo se $\forall i \ p(Z) \cap V_i = \pi_i(Z_i)$ è chiuso, dunque è sufficiente dimostrare l'enunciato per gli V_i , che sono varietà affini.

Se Y è una varietà affine, possiamo supporre wlog $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ chiuso affine. In particolare Z sarà un chiuso di $X \times \mathbb{A}^m$, e $p_2(Z)$ sarà chiuso in Y se e solo se è chiuso in \mathbb{A}^m ; dunque basta dimostrare l'enunciato per il caso $Y = \mathbb{A}^m$.

Poiché X è una varietà proiettiva, possiamo supporre wlog $X \subseteq \mathbb{P}^n$ chiuso proiettivo. Analogamente al punto precedente, possiamo ricondurci a dimostrare solo il caso $X = \mathbb{P}^n$.

- Siano $\mathbf{x} = x_0, \dots, x_n$ (risp. $\mathbf{y} = y_1, \dots, y_m$) coordinate omogenee (risp. affini) su X (risp. Y). I chiusi di $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$ sono intersezioni finite di luoghi di zeri di polinomi in $\mathbb{K}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, omogenei nelle sole \mathbf{x} (vedi Osservazione 4.3.24); dunque $Z = \bigcap_{i=1}^r V_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m}(f_i(\mathbf{x}; \mathbf{y}))$, dove gli f_i sono opportuni polinomi omogenei in \mathbf{x} .

Osserviamo che, fissato $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{A}^m$ e posti $g_i^{(\mathbf{y}_0)} := f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]$, si ha $(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}_0) \in V_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m}(f_i)$ se e solo se $\bar{\mathbf{x}} \in V_{\mathbb{P}^n}(g_i^{(\mathbf{y}_0)})$; in particolare si avrà

$$p(Z) = \left\{ \mathbf{y}_0 \in \mathbb{A}^m : \bigcap_{i=1}^r V_{\mathbb{P}^n}(g_i^{(\mathbf{y}_0)}) \neq \emptyset \right\} = \{ \mathbf{y}_0 \in \mathbb{A}^m : V_{\mathbb{P}^n}(I_{\mathbf{y}_0}) \neq \emptyset \},$$

dove $I_{\mathbf{y}_0} := (g_i^{(\mathbf{y}_0)} : i \leq r) \subseteq \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ è un ideale omogeneo. Per il Nullstellensatz proiettivo $V_{\mathbb{P}^n}(I_{\mathbf{y}_0}) = \emptyset$ se e solo se $\sqrt{I_{\mathbf{y}_0}} \supseteq (x_0, \dots, x_n)$, se e solo se $\exists N : \forall i \ x_i^N \in I_{\mathbf{y}_0}$, se e solo se $\exists M : \mathbb{K}[\mathbf{x}]_M \subseteq I_{\mathbf{y}_0}$, cioè se la parte omogenea di grado M di $I_{\mathbf{y}_0}$ coincide con $\mathbb{K}[\mathbf{x}]_M$; quindi $p(Z) = \bigcap_{M \geq 0} \{ \mathbf{y}_0 \in \mathbb{A}^m : \mathbb{K}[\mathbf{x}]_M \neq (I_{\mathbf{y}_0})_M \}$.

Osserviamo che sia $\mathbb{K}[\mathbf{x}]_M$ sia $(I_{\mathbf{y}_0})_M$ sono dotati di struttura di spazio vettoriale. Una base di $\mathbb{K}[\mathbf{x}]_M$ è data dai monomi di grado M in \mathbf{x} , mentre un insieme di generatori di $(I_{\mathbf{y}_0})_M$ è dato dai polinomi della forma $\mathbf{x}^J g_i^{(\mathbf{y}_0)}$, al variare di $J \in \mathbb{N}^{n+1}$ tali che $|J| + \deg(g_i^{(\mathbf{y}_0)}) = M$. Sia $A(\mathbf{y})$ la matrice le cui colonne sono le coordinate dei polinomi $\mathbf{x}^J f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ rispetto alla base dei monomi di $\mathbb{K}[\mathbf{x}]_M$ (cioè dei polinomi in $\mathbb{K}[\mathbf{y}]$): per ogni $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{A}^m$ si ha $\mathbb{K}[\mathbf{x}]_M = (I_{\mathbf{y}_0})_M$ se e solo se $A(\mathbf{y}_0)$ ha rango massimo $\rho_M := \binom{M+n}{n}$. Dunque $p(Z)$ è intersezione dei luoghi di zeri dei minori di ordine massimo⁴ di $A(\mathbf{y})$; tali minori sono polinomi nella variabile \mathbf{y} , quindi danno luogo a un chiuso di \mathbb{A}^m , come richiesto. \square

Si verifica che gli spazi topologici quasi-compatti sono universalmente chiusi⁵. Dunque questo teorema restituirà alle varietà proiettive alcune proprietà proprie degli spazi topologici compatti.

Corollario 4.4.5. Sia X una varietà proiettiva, Y una varietà quasi-proiettiva e $f : X \rightarrow Y$ un morfismo: allora f è una mappa chiusa.

Dimostrazione. Se $Z \subseteq X$ è un chiuso, osserviamo che è una varietà proiettiva e $f|_Z : Z \rightarrow X$ è ancora un morfismo; in particolare, è sufficiente dimostrare il risultato nel caso $Z = X$.

Osserviamo che $f(X) = p_2(\Gamma_f)$, dove Γ_f è il grafico di f , che è chiuso (vedi Proposizione 4.3.30); in particolare anche $f(X)$ sarà chiuso. \square

Osservazione 4.4.6. Una conseguenza del corollario precedente è che le varietà proiettive sono sempre chiusi proiettivi. Infatti, se $X \subseteq \mathbb{P}^n$ è una varietà proiettiva, esisterà un chiuso proiettivo $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ isomorfo a X tramite una mappa $f : Y \rightarrow X$. Componendo f con l'inclusione, otteniamo un morfismo $\tilde{f} : Y \rightarrow \mathbb{P}^n$ tale che $\tilde{f}(Y) = X$, che sarà dunque un chiuso di \mathbb{P}^n .

Questa è una differenza importante che distingue le varietà proiettive da quelle affini: queste ultime infatti non sono necessariamente chiuse nello spazio proiettivo che le contiene (si pensi banalmente alle carte affini).

Corollario 4.4.7. Sia X una varietà proiettiva e connessa: allora $\mathcal{O}_X(X)$ sono solo le costanti.

Dimostrazione. Sia $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ una funzione regolare: in particolare è un morfismo, e possiamo estenderlo ad un morfismo $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{P}^1$, componendolo con un'opportuno morfismo di immersione. Essendo \tilde{f} una mappa continua, $\tilde{f}(X)$ è un chiuso proprio e connesso di \mathbb{P}^1 , cioè un singoletto $\{\text{pt}\}$. Concludiamo osservando che $\tilde{f}(X) \cong f(X)$. \square

⁴Qui per "minore" si intende il determinante di una sottomatrice; alcuni autori intendono invece la sottomatrice stessa.

⁵Anzi, dovrebbe proprio essere una caratterizzazione.

4.5 Miscellanea

4.5.1 Topologia di Zariski sullo spettro di un anello

Il senso di questa sottosezione in questo contesto potrebbe non sembrare molto chiaro; ci dovrebbero essere delle relazioni con la teoria degli schemi, che è un approccio moderno alla geometria algebrica. In questa sottosezione lavoreremo con gli anelli, che saranno sempre intesi commutativi e con identità.

Se $f : X \rightarrow Y$ è un omomorfismo di anelli, I è un ideale di X e J è un ideale di Y , denotiamo con $J^c := f^{-1}(J)$ l'ideale *contratto* tramite f di J in X , e con $I^e := (f(x) : x \in I)$ l'ideale *esteso* tramite f di I in Y .

Si può verificare che $\forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } Y$ si ha $\mathfrak{p}^c \in \text{Spec } X$; tuttavia $\mathfrak{m} \in \text{SpecMax } Y$ in generale non implica $\mathfrak{m}^c \in \text{SpecMax } X$.

Esercizio 4.5.1. Dimostrare che, se X, Y sono \mathbb{K} -algebre, di cui Y è finitamente generata⁶, e $f : X \rightarrow Y$ è un omomorfismo di \mathbb{K} -algebre, allora i contratti dei massimali sono ancora massimali.

Soluzione. Sia $p : Y \rightarrow Y/\mathfrak{m} \cong F$ con F campo, sia $\pi := p \circ f : X \rightarrow Y/\mathfrak{m}$. Si osserva che $\mathfrak{m}^c = f^{-1}(\mathfrak{m}) = f^{-1} \circ p^{-1}(0) = \text{Ker}(\pi)$, da cui $X/\mathfrak{m}^c = X/\text{Ker}(\pi) \cong R \subseteq F$. Dato che f, p, π sono tutti omomorfismi di \mathbb{K} -algebre, si ha $\mathbb{K} \subseteq R \subseteq F$.

Osserviamo che F , essendo quoziente di una \mathbb{K} -algebra finitamente generata, lo è a sua volta. In particolare, possiamo scrivere $F = \mathbb{K}[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ per opportuni α_i algebrici. Se $\beta \in R \setminus \mathbb{K}$, in particolare $\beta \in F$ e dunque β è algebrico su \mathbb{K} . Tramite il polinomio minimo di β a coefficienti in \mathbb{K} , si può dedurre che β è invertibile in $\mathbb{K}[\beta] \subseteq R$. Possiamo concludere che anche R è un campo. \square

Osservazione 4.5.2. Sia $f : X \rightarrow Y$ un morfismo di varietà affini e $f^* : \mathbb{K}[Y] \rightarrow \mathbb{K}[X]$ il suo pullback. Definiamo

$$\begin{aligned} \forall Q \in X \quad M_Q &:= I_X(Q) \in \text{SpecMax}(\mathbb{K}[X]), \\ \forall P \in Y \quad M_P &:= I_Y(P) \in \text{SpecMax}(\mathbb{K}[Y]). \end{aligned}$$

Si verifica facilmente che $M_{f(Q)} = f^{-*}(M_Q)$.

Osservazione 4.5.3. Supponiamo ancora una volta $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$. Ricordiamoci che in generale gli ideali primi sono in corrispondenza con le varietà irriducibili. Ci chiediamo cosa sia $\text{Spec}(\mathbb{K}[x])$: dato che i chiusi di \mathbb{A} sono unioni finite di punti, gli unici irriducibili sono \emptyset e $\{c\}$ per $c \in \mathbb{K}$, che corrispondono agli ideali (0) e $(x-c)$ in $\text{Spec}(\mathbb{K}[x])$ (in un certo senso rappresentabili come $0 \cup \mathbb{K}$). Analogamente, ricordando che i chiusi di \mathbb{A}^2 sono le unioni finite di punti e ipersuperfici, i suoi unici irriducibili sono \emptyset , $\{c\}$ per $c \in \mathbb{K}^2$ e $V(f)$ per $f \in \mathbb{K}[x, y]$ irriducibile. Questi corrispondono agli ideali (0) , M_c e (f) per $f \in \mathbb{K}[x, y]$ irriducibile.

Definizione 4.5.4. Dato un anello A , definiamo la *topologia di Zariski* su $\text{Spec } A$, tale che i suoi chiusi sono gli insiemi di ideali della forma $V_A(I) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A : \mathfrak{p} \supseteq I\}$, al variare di I tra gli ideali di A .

Esercizio 4.5.5. Verificare che si tratta effettivamente di una topologia.

Soluzione. Chiaramente $V_A(0) = \text{Spec } A$, $V_A(A) = \emptyset$ e $\bigcap_{I \in \mathcal{I}} V_A(I) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A : \mathfrak{p} \supseteq \sum I\}$. Si verifica inoltre che $V_A(I) \cup V_A(J) = V_A(IJ)$:

⁶Ipotesi non detta a lezione, ma senza non sembra tornare...

(\subseteq) Se wlog $\mathfrak{p} \in V_A(I)$, dato che $IJ \subseteq I$, in particolare $\mathfrak{p} \in V_A(IJ)$.

(\supseteq) Sia $\mathfrak{p} \in V_A(IJ)$, supponiamo $\mathfrak{p} \notin V_A(I)$: allora $\mathfrak{p} \not\supseteq I$, cioè $\exists a \in I \setminus \mathfrak{p}$. Dunque $\forall b \in J$ si avrà $ab \in IJ \subseteq \mathfrak{p}$, da cui $b \in \mathfrak{p}$ per primalità. Questo significa che $J \subseteq \mathfrak{p}$, dunque $\mathfrak{p} \in V_A(J)$. \square

Definizione 4.5.6. Sia $\varphi : A \rightarrow B$ un omomorfismo di anelli. Allora definiamo il *morfismo* $\varphi^\# : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ che contrae gli ideali.

Esercizio 4.5.7. Dimostrare che $\varphi^\#$ è una funzione continua.

Soluzione. Osservare che $\varphi^{-\#}(V_A(J)) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } B : \mathfrak{p}^c \supseteq J\}$ e $V_B(J^e) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } B : \mathfrak{p} \supseteq J^e\}$. Dato che in generale $\mathfrak{p}^{ce} \subseteq \mathfrak{p}$ e $J^{ec} \supseteq J$, si verifica che i due insiemi sopracitati coincidono. \square

Proposizione 4.5.8. Se $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, allora $\{\mathfrak{p}\}$ è chiuso se e solo se $\mathfrak{p} \in \text{SpecMax } A$.

Dimostrazione. $\{\mathfrak{p}\}$ è chiuso se e solo se $\{\mathfrak{p}\} = V_A(\mathfrak{p})$, cioè se \mathfrak{p} è massimale. \square

In particolare, questa topologia in generale non è neanche T1 (lo è se e solo se $\text{Spec } A = \text{SpecMax } A$).

Osservazione 4.5.9. Se A è un dominio, allora $(0) \in \text{Spec } A$. Banalmente, l'unico chiuso che contiene (0) è $V_A(0)$ stesso; questo implica che $\overline{(0)} = \text{Spec } A$, cioè $\{(0)\}$ è denso. In questo caso (0) è noto come *punto generico*.

Esempio 4.5.10. Osserviamo che

$$\text{Spec}(\mathbb{R}[x]) = \{(0)\} \cup \{(x - c) \mid c \in \mathbb{R}\} \cup \{((x - z)(x - \bar{z})) \mid z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\}.$$

In particolare, per la Proposizione 4.5.8 deduciamo che il punto generico è l'unico non chiuso.

Esempio 4.5.11. Nel caso degli interi $\text{Spec } \mathbb{Z} = \{(0)\} \cup \{(p) \mid p \text{ è primo}\}$.

Esempio 4.5.12. Banalmente $\text{Spec } \mathbb{C}$ è costituito dal solo punto generico. Anche $\text{Spec}(\mathbb{C}[t]/t^2)$ è costituito da un solo punto: è a ideali principali perché è quoziente di un PID, e un suo elemento generico $a + bt$ è invertibile se e solo se $a \neq 0$. Ne consegue che i suoi ideali sono soltanto (0) , (t) e (1) , tra i quali solo (t) è primo.

Osserviamo che \mathbb{C} rappresenta le funzioni costanti, mentre $\mathbb{C}[t]/t^2$ rappresenta le equazioni polinomiali fino al II ordine. In qualche senso $\text{Spec } \mathbb{C}$ e $\text{Spec}(\mathbb{C}[t]/t^2)$ non sono la stessa cosa, e questo si può dedurre più facilmente dal seguente esempio.

Esempio 4.5.13. Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid f(x) = x^2$: è banalmente un morfismo e il suo pullback è $f^* : \mathbb{C}[y] \rightarrow \mathbb{C}[x] \mid f(p(y)) = p(x^2)$. Dato $c \in \mathbb{C}$, possiamo identificare $f^{-1}(c)$ con $V_{\mathbb{A}}(x^2 - c) = 0$. In senso schemistico⁷, possiamo scrivere $f^{-1}(c) = \text{Spec}(\mathbb{C}[x]/(x^2 - c))$. Se $c \neq 0$ si osserva facilmente che $\mathbb{C}[x]/(x^2 - c) \cong \mathbb{C}[x]/(x - b) \oplus \mathbb{C}[x]/(x + b) \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ (dove $b \in \mathbb{C} : b^2 = c$). In particolare $\mathbb{C}[x]/(x^2 - c)$ ha solo due ideali primi. D'altra parte, se $c = 0$, abbiamo $\mathbb{C}[x]/x^2$ (come nell'esempio precedente): abbiamo un solo ideale primo, ma in qualche senso possiamo considerarlo un punto doppio.

⁷Qualunque cosa voglia dire.

4.5.2 Mappe di Veronese

Definizione 4.5.14. Dati due interi $k, n \geq 1$, definiamo la *mappa di Veronese*

$$v_{k,n} : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^N \quad | \quad [x_0, \dots, x_k] \mapsto [\mathbf{x}^J : J \in \mathbb{N}^{k+1}, |J| = n],$$

che associa ad ogni $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{P}^k$ le valutazioni in $\bar{\mathbf{x}}$ di tutti i monomi omogenei di grado n in $k+1$ variabili (in particolare, si avrà $N = \binom{n+k}{k} - 1$). Si verifica facilmente che la mappa di Veronese è ben definita, e che è un morfismo (vedi Lemma 4.1.7).

Prima di studiare la mappa di Veronese nel caso generale, vediamo nel dettaglio due casi particolari.

Il caso di $v_{1,n}$

La mappa di Veronese $v_{1,n} : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$ è della forma $v_{1,n}([x_0, x_1]) = [x_0^n, x_0^{n-1}x_1, \dots, x_1^n]$.

Definizione 4.5.15. Definiamo su \mathbb{P}^n l'insieme

$$C_n := \left\{ [y_0, \dots, y_n] \in \mathbb{P}^n \mid \text{Rk} \begin{pmatrix} y_0 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ y_{n-1} & y_n \end{pmatrix} \leq 1 \right\},$$

detto *curva razionale* di grado n . Si verifica facilmente che C_n è un chiuso proiettivo (è luogo di zeri di determinanti, che sono polinomi omogenei nelle y). La curva razionale di grado 3 è effettivamente la chiusura proiettiva della cubica gobba.

Teorema 4.5.16. La mappa di Veronese $v_{1,n}$ induce un isomorfismo tra \mathbb{P}^1 e C_n .

Dimostrazione. Siano U_0, U_1 le carte affini standard su \mathbb{P}^1 e V_0, \dots, V_n quelle su C_n , siano $\tilde{V}_i := V_i \cap C_n$. Ci si convince abbastanza facilmente che

$$C_n = \{[1, \lambda, \dots, \lambda^n] \in \mathbb{P}^n : \lambda \in \mathbb{K}\} \cup \{[\mu^n, \dots, \mu, 1] \in \mathbb{P}^n : \mu \in \mathbb{K}\} = \tilde{V}_0 \cup \tilde{V}_n,$$

dato che $\bar{\mathbf{y}} \in C_n$ se e solo se $(y_0, \dots, y_{n-1}) \parallel (y_1, \dots, y_n)$. Si verifica facilmente che $v_{1,n}(U_0) = \tilde{V}_0$ e $v_{1,n}(U_1) = \tilde{V}_n$, quindi $\text{Im}(v_{1,n}) = C_n$.

Esibiamo il morfismo inverso $g : C_n \rightarrow \mathbb{P}^1$, costruendo opportunamente $g_0 : \tilde{V}_0 \rightarrow \mathbb{P}^1$ e $g_n : \tilde{V}_n \rightarrow \mathbb{P}^1$ in modo tale che ne siano le restrizioni. Definiamo $g_0([y_0, \dots, y_n]) = [y_0, y_1]$ e $g_n([y_0, \dots, y_n]) = [y_{n-1}, y_n]$: sono morfismi ben definiti per il solito lemma. Dalla caratterizzazione data a C_n tramite \tilde{V}_0 e \tilde{V}_n si verifica facilmente che g_i e $v_{1,n}|_{\tilde{V}_i}$ sono una l'inversa dell'altra, e che $g_0 = g_n$ su $\tilde{V}_0 \cap \tilde{V}_n$. \square

Il caso di $v_{2,2}$

Osserviamo che le matrici simmetriche 3×3 hanno 6 gradi di libertà, il che ci consente di identificarle con \mathbb{A}^6 ; passando al proiettivizzato, otteniamo un isomorfismo con \mathbb{P}^5 , che consente di scrivere la mappa di Veronese $v_{2,2} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^5$ in una forma più comoda:

$$v_{2,2} : [x_0, x_1, x_2] \mapsto \begin{bmatrix} x_0^2 & x_0x_1 & x_0x_2 \\ x_1x_0 & x_1^2 & x_1x_2 \\ x_2x_0 & x_2x_1 & x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Definiamo quindi l'insieme

$$\Sigma = \left\{ [z_{ij} : 0 \leq i \leq j \leq 2] \in \mathbb{P}^5 \mid \operatorname{Rk} \begin{pmatrix} z_{00} & z_{01} & z_{02} \\ z_{01} & z_{11} & z_{12} \\ z_{02} & z_{12} & z_{22} \end{pmatrix} \leq 1 \right\},$$

che è ancora un chiuso proiettivo per ragioni analoghe a quelle delle curve razionali.

Proposizione 4.5.17. La mappa di Veronese $v_{2,2}$ induce un isomorfismo tra \mathbb{P}^2 e Σ .

Dimostrazione. Si osserva facilmente che $\operatorname{Im}(v_{2,2}) \subseteq \Sigma$, e che Σ si identifica con le matrici simmetriche proiettivizzate in cui tutte le colonne (o equivalentemente le righe) sono proporzionali. Siano U_i le carte affini standard di \mathbb{P}^2 , siano $V_i := \{\bar{z} \in \Sigma : z_{ii} \neq 0\}$ aperti di Σ .

Si dimostra che anche in questo caso $\Sigma = V_0 \cup V_1 \cup V_2$. Supponiamo per assurdo che $\exists \bar{z} \in \Sigma$ tale che $z_{00} = z_{11} = z_{22} = 0$: la sua matrice associata dovrà presentare almeno una colonna non nulla, supponiamo wlog che sia la prima colonna. Le altre due colonne dovranno essere proporzionali alla prima, il che porta a concludere che la prima riga è tutta nulla, ma è anche la trasposta della prima colonna, che non lo è:

$$\bar{z} = \begin{pmatrix} 0 & z_{01} & z_{02} \\ z_{01} & 0 & z_{12} \\ z_{02} & z_{12} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ z_{01} & 0 & z_{12} \\ z_{02} & z_{12} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_{12} \\ 0 & z_{12} & 0 \end{pmatrix};$$

siamo quindi arrivati ad un assurdo.

È immediato osservare che $v_{2,2}(U_i) \subseteq V_i$ per $i = 0, 1, 2$. Similmente al caso di $v_{1,n}$, concludiamo esibendo il morfismo inverso di $v_{2,2} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \Sigma$, costruendolo sui V_i e osservando la buona definizione sulle intersezioni. Definiamo $g_i : V_i \rightarrow U_i$ come $g_i(\bar{z}) = [z_{i0}, z_{i1}, z_{i2}]$, che è un morfismo per il solito lemma: non è difficile verificare che g_i e $v_{2,2}|_{U_i}$ sono una l'inversa dell'altra, e che i g_i coincidono nelle opportune intersezioni. \square

Non è difficile estendere questi argomenti al caso più generale di $v_{n,n}$.

Osservazione 4.5.18. A posteriori⁸ potevamo dimostrare che $v_{2,2}$ induce un isomorfismo con Σ tramite i risultati visti sul prodotto di varietà.

È immediato osservare che Σ è un chiuso di $\Sigma_{2,2}$ e che $v_{2,2} = s_{2,2} \circ (\operatorname{Id}_{\mathbb{P}^2} \times \operatorname{Id}_{\mathbb{P}^2})$. Dato che $\operatorname{Id}_{\mathbb{P}^2} \times \operatorname{Id}_{\mathbb{P}^2} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \Delta_{\mathbb{P}^2}$ è banalmente un isomorfismo, è sufficiente dimostrare che $s_{2,2}|_{\Delta_{\mathbb{P}^2}} : \Delta_{\mathbb{P}^2} \rightarrow \Sigma$ è un isomorfismo. È facile osservare che $s_{2,2}(\Delta_{\mathbb{P}^2}) = \Sigma$, e che la restrizione di $p_1 \times p_2$ è necessariamente il morfismo inverso.

Anche questa dimostrazione si può estendere senza problemi al caso di $v_{n,n}$.

Caso generale

Dati $k, n \geq 1$, definiamo l'insieme

$$\Sigma_{k,n} := \{[z_I : I \in \mathbb{N}^{k+1}, |I| = n] \in \mathbb{P}^N : I + J = I' + J' \rightarrow z_I z_J - z_{I'} z_{J'} = 0\},$$

da non confondere con la varietà di Segre, nonostante l'uso della stessa notazione. Dalla definizione si vede subito che $\Sigma_{k,n}$ è un chiuso proiettivo; inoltre se $I + J = I' + J'$ si ha $(z_I z_J - z_{I'} z_{J'}) \circ v_{k,n}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{x}^I \mathbf{x}^J - \mathbf{x}^{I'} \mathbf{x}^{J'} = 0$, dunque $\operatorname{Im}(v_{k,n}) \subseteq \Sigma_{k,n}$.

Teorema 4.5.19. La mappa di Veronese $v_{k,n} : \mathbb{P}^k \rightarrow \Sigma_{k,n} \subseteq \mathbb{P}^N$ è un isomorfismo.

⁸Durante il corso la mappa di Veronese è stata presentata prima della mappa di Segre. Questa osservazione è un "trucco" che non è stato visto a lezione.

Dimostrazione. La dimostrazione è molto simile ai casi precedenti. Denotiamo per semplicità con e_0, \dots, e_n i vettori $(1, 0, 0, \dots), (0, 1, 0, \dots), \dots, (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{N}^{k+1}$, siano ancora U_i le carte affini standard di \mathbb{P}^k . Posto $V_i := \{\bar{z} \in \Sigma_{k,n} : z_{ne_i} \neq 0\}$ per $i = 0, \dots, k$, è sufficiente verificare che $\Sigma_{k,n} = \bigcup_{i=0}^k V_i$, quindi costruire $g_i : V_i \rightarrow U_i$ tale che $g_i(\bar{z}) = [z_{e_0+(n-1)e_i}, \dots, z_{e_n+(n-1)e_i}]$, infine verificare che i g_i sono i morfismi inversi di $v_{k,n}|_{U_i}$, e che coincidono sulle intersezioni.

Per dimostrare che $\Sigma_{k,n} = \bigcup_{i=0}^k V_i$, supponiamo per assurdo che $\exists \bar{z} \in \Sigma_{k,n}$ tale che $z_{ne_i} = 0$ per $i = 0, \dots, k$. Dotiamo \mathbb{N}^{n+1} dell'ordine lessicografico e dimostriamo per induzione che in tal caso si avrebbe $z_I = 0$ per ogni I , che è assurdo: infatti se $I = (i_0, \dots, i_k)$ fosse il minimo multiindice per cui $z_I \neq 0$, allora dovrebbero esistere indici $0 \leq a < b \leq k$ tali che $0 < i_a, i_b < n$ (in caso contrario avremmo $I = ne_r$ per qualche r). Siano $I' := I - e_a + e_b$, $J' := I + e_a - e_b$: sono ben definiti, soddisfano $I' < I < J$ e $I + I = I' + J'$, da cui $z_I^2 = z_{I'} z_{J'} = 0$ e dunque $z_I = 0$, che è assurdo.

Per dimostrare che g_i, g_j coincidono su $V_i \cap V_j$, osserviamo che la condizione che definisce $\Sigma_{k,n}$ implica che i vettori $(z_{e_0+(n-1)e_i}, \dots, z_{e_n+(n-1)e_i})$ e $(z_{e_0+(n-1)e_j}, \dots, z_{e_n+(n-1)e_j})$ sono paralleli, dunque $g_i(\bar{z}) = g_j(\bar{z})$. Dal fatto che le g_i si incollano due a due, si deduce facilmente che si incollano tutte. \square

La mappa di Veronese ci permette di dimostrare il seguente risultato, apparentemente scorrelato.

Proposizione 4.5.20. Il complementare di qualunque ipersuperficie di \mathbb{P}^k è una varietà affine.

Dimostrazione. Sia $F = \sum_I a_I \mathbf{x}^I$ l'equazione di un'ipersuperficie di \mathbb{P}^k : tutti i monomi \mathbf{x}^I hanno lo stesso grado d . Sia $G := \sum_I a_I z_I \in \mathbb{K}[\mathbf{z}]_1$: osserviamo che $F(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ se e solo se $G \circ v_{k,d}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, se e solo se $\bar{\mathbf{x}} \in v_{k,d}^{-1}(V_{\mathbb{P}^N}(G))$, da cui deduciamo $V_{\mathbb{P}^k}(F) = v_{k,d}^{-1}(V_{\mathbb{P}^N}(G)) = v_{k,d}^{-1}(V_{\mathbb{P}^N}(G) \cap \Sigma_{k,n})$.

Osserviamo che $\Sigma_{k,n} \setminus V_{\mathbb{P}^N}(G)$ è una varietà affine, in quanto è un chiuso proiettivo al quale è stato tolto un iperpiano; dato che $v_{k,d} : \mathbb{P}^k \rightarrow \Sigma_{k,n}$ è un isomorfismo, possiamo concludere che anche $\mathbb{P}^k \setminus V_{\mathbb{P}^k}(F) \cong \Sigma_{k,d} \setminus V_{\mathbb{P}^N}(G)$ è una varietà affine. \square

4.5.3 Varietà di ipersuperfici

Fissiamo $n \geq 2$ e $d \geq 1$: vogliamo studiare le ipersuperfici di grado d in \mathbb{P}^n , cioè

$$\mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d) \cong \mathbb{P}^N, \quad \text{dove } N = \binom{n+d}{n} - 1.$$

Definiamo i seguenti insiemi:

$$\begin{aligned} U_{\text{red}} &= \{[h] \in \mathbb{P}^N : h \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]_d, [h] \text{ ridotta}\}; \\ U_{\text{irr}} &= \{[h] \in \mathbb{P}^N : h \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]_d, [h] \text{ irriducibile}\}; \\ U_{\text{sm}} &= \{[h] \in \mathbb{P}^N : h \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]_d, [h] \text{ liscia}\}. \end{aligned}$$

Osserviamo che in generale vale $U_{\text{sm}} \subseteq U_{\text{irr}} \subseteq U_{\text{red}}$.

Lo scopo di questa sottosezione è dimostrare che questi tre insiemi sono aperti non vuoti di \mathbb{P}^N , in particolare sono insiemi densi.

Ipersuperfici ridotte. Fissati due interi $a \geq 1$ e $b \geq 0$, definiamo la mappa

$$q_{a,b} : \mathbb{P}(\mathbb{K}[\mathbf{x}]_a) \times \mathbb{P}(\mathbb{K}[\mathbf{x}]_b) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{K}[\mathbf{x}]) \mid ([f], [g]) \mapsto [f^2 g].$$

Questo è un morfismo perché i coefficienti di $f^2 g$ sono biomogenei di bigrado $(2, 1)$, nei coefficienti di f e g (vedi Lemma 4.3.25). Osserviamo che

$$\bigcup_{2a+b=d} \text{Im}(q_{a,b}) = \{[h] \mid h \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]_d, h \text{ ha un fattore multiplo}\} = (U_{\text{red}})^C,$$

che per il Teorema 4.4.4 è un chiuso; in particolare U_{red} è un aperto.

Resta da mostrare che U_{red} non è vuoto. Sia $h(\mathbf{x}) = x_0 x_1^{d-1} + x_2^d \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]_d$: questo polinomio è irriducibile per il lemma di Gauss, in particolare è ridotto.

Ipersuperfici irriducibili Ripetendo il procedimento del punto precedente con $a, b \geq 1$, $a+b = d$ e $q_{a,b} : ([f], [g]) \mapsto [fg]$, otteniamo che U_{irr} è un aperto. L'esempio precedente funziona anche in questo caso, dunque U_{irr} non è vuoto.

Ipersuperfici lisce Definiamo l'insieme

$$\begin{aligned} I &:= \{(P, [h]) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^N : h \text{ singolare in } P\} = \\ &= \{(P, [h]) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^N : h(P) = 0, \nabla h(P) = 0\}. \end{aligned}$$

Osserviamo che le condizioni che definiscono I sono date da polinomi biomogenei di bigrading $(d, 1)$ e $(d-1, 1)$ nelle coordinate di P e nei coefficienti di h , quindi è chiuso in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^N$ e

$$p_2(I) = \{[h] \mid \exists P \text{ punto singolare per } h\} = (U_{\text{sm}})^C$$

è un chiuso di $\mathbb{P}(\mathbb{K}[\mathbf{x}]_d)$ per il Teorema 4.4.4; in particolare U_{sm} è aperto.

Presentiamo un elemento di U_{sm} nel caso $\text{char } \mathbb{K} = 0$ (ma in realtà il risultato vale in generale). Consideriamo $h(\mathbf{x}) = x_0^d + \dots + x_n^d$: si verifica facilmente che non possiede punti singolari.

4.5.4 Associatività nelle cubiche lisce

Torniamo a parlare dell'operazione di gruppo che avevamo definito sulle cubiche lisce nella sezione 2.7. Sia dunque $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$ una cubica liscia e $\mu : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ la sua legge di gruppo. Osserviamo che μ è associativa se e solo se il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{(\mu, \text{Id}_{\mathcal{C}})} & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \\ \downarrow (\text{Id}_{\mathcal{C}}, \mu) & & \downarrow \mu \\ \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{C} \end{array}$$

Proposizione 4.5.21. $\mu : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ è un morfismo.

Dimostrazione. Ricordiamo che $\mu(A, B) = \mathcal{R}(O, \mathcal{R}(A, B))$, dove $\mathcal{R} : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ associa a due punti su \mathcal{C} il terzo punto della retta associata (nel caso $A = B$, si prende la tangente). Dunque è sufficiente verificare che \mathcal{R} è un morfismo. Mettiamo \mathcal{C} in forma di Weierstrass rispetto a un flesso P_0 , ottenendo la parte affine $\mathcal{C}_0 := V_{\mathbb{A}^2}(y^2 - x^3 - ax - b) \cong \mathcal{C} \setminus \{P_0\}$ aperto di \mathcal{C} .

Dati $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ in \mathcal{C}_0 , si verifica che la retta $L(A, B)$ sarà verticale se e solo se sollevando A, B ad $\hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{C}$ si ha $P_0 \in L(\hat{A}, \hat{B})$, o equivalentemente se $x_1 = x_2$ e $y_1 + y_2 = 0$; in caso contrario potremo parametrizzarla nella forma $y = y_1 + \lambda(x - x_1)$. Consideriamo dunque

$$V_0 := \{(A, B) \in \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0 : P_0 \notin L(\hat{A}, \hat{B})\} = (\mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0) \setminus V(x_1 - x_2, y_1 + y_2)$$

che è aperto in $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$, e osserviamo che, al variare della scelta di P_0 tra i nove flessi della curva, questi insiemi formano un ricoprimento aperto di $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ (presi $\hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, basta scegliere un flesso che non appartenga a $L(\hat{A}, \hat{B})$). È dunque sufficiente verificare che $\mathcal{R}|_{V_0}$ è un morfismo.

Dati $A, B \in \mathcal{C}_0$, vogliamo determinare $(x_3, y_3) = \mathcal{R}(A, B)$. Osserviamo che, calcolato il coefficiente angolare λ di $L(A, B)$, sostituendo l'equazione della retta in quella della curva, otteniamo $x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2$ e $y_3 = y_1 + \lambda(x_3 - x_1)$; dunque è sufficiente verificare che $\lambda : \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathbb{K}$ sia regolare (vedi Proposizione 4.2.6).

Dati $A, B \in \mathcal{C}_0$, sottraendo tra loro le equazioni $y_i^2 = x_i^3 + ax_i + b$, ricaviamo

$$(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 + a),$$

da cui deduciamo

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 + a}{y_2 + y_1} \quad \text{su } X_1 \cap X_2,$$

dove $X_1 := \{(A, B) \in \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0 : x_1 \neq x_2\}$ e $X_2 := \{(A, B) \in \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0 : y_1 + y_2 \neq 0\}$. Osservando che $V_0 = X_1 \cup X_2$ è un ricoprimento aperto, possiamo limitarci a studiare $\lambda|_{X_1}$ e $\lambda|_{X_2}$.

Ricordiamo che se $A \neq B$, allora $\lambda(A, B) = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$, mentre nel caso $A = B$ si può verificare che il coefficiente angolare della tangente è $\lambda(A, B) = (3x_1^2 + a)/2y_1$. Su X_1 si ha sempre $A \neq B$, quindi $\lambda(A, B) = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$, che è una funzione regolare. Su X_2 consideriamo la funzione regolare $\xi(A, B) := (x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 + a)/(y_2 + y_1)$: abbiamo visto che su $X_1 \cap X_2$ coincide con λ . Osserviamo che $X_2 \setminus X_1 = \Delta_{\mathcal{C}_0} \cap V_0$, dunque

$$\xi(A, B) = \xi(A, A) = \frac{3x_1^2 + a}{2y_1} = \lambda(A, B)$$

anche su $X_2 \setminus X_1$. □

Siamo pronti per completare la dimostrazione dell'associatività:

Teorema 4.5.22. L'operazione di gruppo definita su \mathcal{C} è associativa.

Dimostrazione. Ricordando l'Esercizio 3.2.18, osserviamo che $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ è irriducibile per la Proposizione 4.3.34. Nell'Osservazione 2.7.2 avevamo mostrato che l'operazione di gruppo commutava “quasi ovunque”: effettivamente si può verificare⁹ che le terne di punti che soddisfano tali condizioni sono un aperto non vuoto V di $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}$; in particolare V è denso. Dato che il diagramma commuta su V , cioè $\mu \circ (\mu, \text{Id}_{\mathcal{C}}) = \mu \circ (\text{Id}_{\mathcal{C}}, \mu)$, e tutte le mappe coinvolte sono morfismi, per il Corollario 4.3.32 il diagramma commuterà su tutto $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}$. □

4.5.5 Gruppi algebrici

Definizione 4.5.23. Una varietà quasi-proiettiva G è un *gruppo algebrico* se presenta una struttura di gruppo tale che le operazioni di moltiplicazione e di inversione siano morfismi.

Elenchiamo diversi esempi di gruppi algebrici:

- (1) Una cubica piana liscia è un gruppo algebrico. Infatti abbiamo verificato che l'operazione di gruppo è un morfismo (Proposizione 4.3.34); d'altra parte ricordiamo che $A^{-1} = \mathcal{R}(A, \mathcal{R}(O, O)) = \mathcal{R} \circ (\text{Id}_{\mathcal{C}} \times \text{cost})(A)$, e anche \mathcal{R} era un morfismo.
- (2) Il *gruppo additivo* $\mathbb{G}_a := (\mathbb{K}, +)$ è un gruppo algebrico.

⁹Non riportiamo i conti nel dettaglio, diamo giusto uno sketch di quale può essere l'approccio: ci si può riportare facilmente a lavorare su una carta affine, quindi osservare che le coordinate dei punti interessati sono frazioni di polinomi nei coefficienti di A, B, C , e che le condizioni di uguaglianza corrisponderebbero a luoghi di zeri di polinomi. Non è difficile convincersi che, se il campo \mathbb{K} è infinito, fissato $A \neq O$, si riesca sempre a trovare un B tale che i punti definiti tramite A, B siano tutti distinti, e quindi scegliere C distinto da tutti gli altri.

- (3) Il gruppo moltiplicativo $\mathbb{G}_m := (\mathbb{K}^*, \cdot)$ è un gruppo algebrico.
- (4) Se $(G_1, *_1)$ e $(G_2, *_2)$ sono gruppi algebrici, allora anche $(G_1 \times G_2, (*_1, *_2))$ è un gruppo algebrico (sono facili verifiche). Le somme finite di gruppi moltiplicativi sono dette *tori*.
- (5) Il gruppo lineare $\mathrm{GL}(n)$ è un gruppo algebrico.
- È un aperto principale di \mathbb{A}^{n^2} , dato che si richiede che il determinante (che è un polinomio omogeneo) non si annulli.
 - Dato che $\mathrm{GL}(n) \subseteq \mathbb{A}^{n^2}$, possiamo applicare la solita Proposizione 4.2.6 per verificare che moltiplicazione e inversione siano morfismi. La moltiplicazione rispetta ovviamente tale criterio; per l'inversione basta scriverla tramite la matrice aggiunta.
 - Essendo $\mathrm{GL}(n)$ un aperto principale, le sue funzioni regolari saranno $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(n)] = \mathbb{K}[\mathbb{A}^{n^2}]_f$, dove $f = \det(x_{ij})$ (vedi Proposizione 4.2.22).

Analogamente, saranno gruppi algebrici anche i sottogruppi $\mathrm{SL}(n)$, quello delle matrici diagonali, quello delle matrici triangolari inferiori (risp. superiori), e altri analoghi. Questi sono noti come *gruppi parabolici*.

- (6) Il gruppo lineare proiettivo $\mathbb{P}\mathrm{GL}(n+1) = \mathbb{P}^{(n+1)^2-1} \setminus V(\det(x_{ij}))$ è un gruppo algebrico.
- $\mathbb{P}\mathrm{GL}(n+1)$ è ancora un aperto principale di $\mathbb{P}^{(n+1)^2-1}$.
 - Per verificare che la moltiplicazione è un morfismo, basta verificare che i coefficienti di AB siano polinomi omogenei nei coefficienti di A e B .
 - Per verificare che l'inversione è un morfismo, osserviamo che $[A] = [A^\dagger]$ (matrice aggiunta), e i coefficienti di A^\dagger sono polinomi omogenei nei coefficienti di A .

Definizione 4.5.24. Siano X una varietà quasi-proiettiva e G un gruppo algebrico. Chiameremo *azione* di G su X qualunque azione (di gruppo su un insieme) $G \times X \rightarrow X \mid (g, x) \mapsto gx$ che sia anche un morfismo. In tal caso diremo che G *agisce* su X .

Esempio 4.5.25. Ogni gruppo algebrico agisce su sé stesso tramite moltiplicazione a sinistra.

Esempio 4.5.26. $\mathrm{GL}(n)$ (e i sottogruppi parabolici) agiscono su \mathbb{K}^n , tramite moltiplicazione matrice-vettore, che è un morfismo (è polinomiale coefficiente per coefficiente). Analogamente $\mathbb{P}\mathrm{GL}(n)$ agisce su \mathbb{P}^n (funziona ancora tutto, perché le componenti di Av sono polinomi omogenei di bigrado $(1, 1)$ nei coefficienti di A e v).

Esercizio 4.5.27. Lo *stabilizzatore* di un punto (cioè $\mathrm{St}(P) = \{g \in G \mid gP = P\}$) è un chiuso.

Soluzione. Sia $\varphi : G \rightarrow X$ tale che $\varphi(g) = gP$: allora $\mathrm{St}(P) = \{\varphi = \mathrm{cost}_P\}$, quindi basta verificare che φ sia un morfismo. D'altra parte, se indichiamo con $\psi : G \times X \rightarrow X$ l'azione di gruppo, si ha $\varphi = \psi \circ (\mathrm{Id}_G \times \mathrm{cost}_P)$. \square

Esempio 4.5.28. Consideriamo l'azione di \mathbb{G}_m su \mathbb{A}^2 : $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$. Quali sono le orbite? Il singoletto $\{0\}$ e tutte le rette bucate in $\{0\}$. Osserviamo che tra le orbite solo $\{0\}$ è un chiuso, e che 0 è contenuto nella chiusura di tutte.

Consideriamo ora l'azione di $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ su \mathbb{A}^2 : $(\lambda, \mu) \cdot (x, y) = (\lambda x, \mu y)$. Le orbite in questo caso sono:

- $\mathbb{A}^2 \setminus (\{x=0\} \cup \{y=0\})$,
- $\{x=0\} \setminus \{(0,0)\}$,

- $\{y = 0\} \setminus \{(0, 0)\}$,
- $\{(0, 0)\}$.

Si possono fare considerazioni analoghe sulle chiusure delle orbite.

4.5.6 Scoppimento (o blowup)

Consideriamo il morfismo di proiezione che definisce \mathbb{P}^1 :

$$p : \mathbb{A}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^1 \quad | \quad p(x, y) = [x, y].$$

Ci chiediamo se si possa estendere p ad un morfismo $\tilde{p} : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$: la risposta è negativa. Infatti \tilde{p} dovrebbe essere costante sulle rette bucate in 0, quindi anche sulla loro chiusura (vedi Corollario 4.3.32); in particolare \tilde{p} dovrebbe essere costante su tutto \mathbb{A}^2 , ma in tal caso non sarebbe un'estensione di p .

Se si volesse comunque trovare un'estensione di p che in qualche senso tappi il buco, un modo per farlo è rimpiazzare $0 \in \mathbb{A}^2$ con l'insieme di tutte le direzioni del piano, in modo da poter dare una buona definizione a \tilde{p} .

Definizione 4.5.29. Sia $\Gamma := \{(a, b; [a, b]) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 : (a, b) \neq 0\}$ il grafico di p immerso in $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$: definiamo lo *scoppimento* (o *blowup*) di \mathbb{A}^2 come $\hat{\mathbb{A}}^2 := \overline{\Gamma}$.

Proposizione 4.5.30. Lo scoppimento $\hat{\mathbb{A}}^2$ è $\{(x, y; [z_0, z_1]) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 : xz_1 - yz_0 = 0\}$. Più precisamente, $\hat{\mathbb{A}}^2 = \Gamma \cup E$, dove $E := \{0\} \times \mathbb{P}^1$ è detta *curva eccezionale*.

Dimostrazione. Per semplicità denotiamo $Z := \{(x, y; [z_0, z_1]) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 : xz_1 - yz_0 = 0\}$. Si osservi che Z è chiuso, in quanto luogo di zeri di un polinomio omogeneo in \mathbf{z} . Consideriamo la proiezione $\varepsilon : Z \rightarrow \mathbb{A}^2$: si verifica che

$$\varepsilon^{-1}(x, y) = \begin{cases} \{(x, y; [x, y])\} & \text{se } (x, y) \neq 0, \\ \{0\} \times \mathbb{P}^1 & \text{altrimenti.} \end{cases},$$

da cui si può notare che $Z = \Gamma \cup E$, in particolare $\overline{\Gamma} \subseteq Z$.

Per concludere basta verificare che $E \subseteq \overline{\Gamma}$. Sia $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{P}^1$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$ un suo rappresentante: vogliamo mostrare che $(0; \bar{\mathbf{x}}) \in \overline{\Gamma}$. Sia $\ell := \{t\mathbf{x} \in \mathbb{A}^2 \setminus \{0\} : t \in \mathbb{K}^*\}$ e sia $G := \ell \times \{\bar{\mathbf{x}}\}$: osserviamo che $G \subseteq \Gamma$, dunque $\overline{G} \subseteq \overline{\Gamma}$, e sarà sufficiente verificare che $(0; \bar{\mathbf{x}}) \in \overline{G}$. Osserviamo che $\overline{\ell} \times \{\bar{\mathbf{x}}\} \cong \mathbb{A}^1$ è un chiuso di $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$, e lo stesso isomorfismo associa G alla retta bucata $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$, dunque $\overline{G} = \overline{\ell} \times \{\bar{\mathbf{x}}\} \ni (0; \bar{\mathbf{x}})$, come richiesto. \square

Osservazione 4.5.31. Osserviamo che la proiezione $\varepsilon : \hat{\mathbb{A}}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ induce un isomorfismo tra $\hat{\mathbb{A}}^2 \setminus E$ e $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$. In particolare, poiché $\hat{\mathbb{A}}^2 \setminus E = \Gamma$ e $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$ è irriducibile, possiamo dedurre che anche il blowup $\hat{\mathbb{A}}^2 = \overline{\Gamma}$ è irriducibile.

Analogamente possiamo definire il morfismo di proiezione $q : \hat{\mathbb{A}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$. Si osserva che $p \circ \varepsilon = q$ su $\hat{\mathbb{A}}^2 \setminus E$, quindi in un certo senso q è il morfismo esteso cercato.

Osservazione 4.5.32. Possiamo ricoprire il blowup $\hat{\mathbb{A}}^2$ tramite le carte $U_0 := \{z_0 \neq 0\} \cap \hat{\mathbb{A}}^2$ e $U_1 := \{z_1 \neq 0\} \cap \hat{\mathbb{A}}^2$. Su U_0 possiamo dare la parametrizzazione affine $z := \frac{z_1}{z_0}$; dall'equazione $xz_1 = yz_0$ ricaviamo $y = zx$, dunque $U_0 \cong \{(x, xz, z) \in \mathbb{A}^3\} \cong \mathbb{A}^2$ dato che, a meno di riordinare i coefficienti, è il grafico del morfismo $\mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^1 \mid (x, z) \mapsto xz$.

Consideriamo il morfismo $\varepsilon|_{U_0} : U_0 \rightarrow \mathbb{A}^2$: identificando $U_0 \cong \mathbb{A}^2$ come detto sopra, il morfismo corrispondente sarà $\mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2 \mid (x, z) \mapsto (x, xz)$. Dato che $E = \widehat{\mathbb{A}}^2 \cap \{x = y = 0\}$, identificando $U_0 \cong \mathbb{A}^2$ si avrà $E \cong \{x = 0\}$.

Analogamente, su U_1 possiamo porre $w := \frac{z_0}{z_1}$ e ottenere $U_1 \cong \{(yw, y, w) \in \mathbb{A}^3\} \cong \mathbb{A}^2$. Nell'intersezione $U_0 \cap U_1$ le due parametrizzazioni sono legate dalla relazione $w = 1/z$.

Osservazione 4.5.33. Supponiamo di voler sollevare un'ipersuperficie $\mathcal{I} = [f]$ di \mathbb{A}^2 su U_0 tramite ε . Si verifica che vale $\varepsilon^{-1}(V_{\mathbb{A}^2}(f)) = \widehat{\mathbb{A}}^2 \cap V_{\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1}(f \circ \varepsilon)$. Posto $g(x, z) := f(x, xz)$, mettendo U_0 in coordinate affini tramite l'isomorfismo $U_0 \cong \mathbb{A}^2$ visto nell'osservazione precedente, osserviamo che $\varepsilon^{-1}(\mathcal{I}) \cap U_0 \cong V_{\mathbb{A}^2}(g)$.

Esempio 4.5.34. Sia $f(x, y) = y - \lambda x$ l'equazione di una retta $r = [f]$ di \mathbb{A}^2 : vorremmo studiare il suo sollevamento su U_0 tramite ε , come visto nell'osservazione precedente. Passando alle coordinate affini su U_0 , otteniamo $\varepsilon^{-1}(r) \cap U_0 \cong V_{\mathbb{A}^2}(x(z - \lambda x))$, cioè l'unione della parte affine della retta eccezionale $x = 0$ e della retta $z = \lambda x$. Interpretando $\mathbb{A}^2 \sim (x, z)$ come piano verticale e volendo recuperare la terza dimensione, immergiamo $\varepsilon^{-1}(r) \cap U_0$ in $\mathbb{A}^3 \sim (x, y, z)$ ponendo nuovamente $y = zx$: avremo quindi le due rette $x = y = 0$ e $(z = \lambda, y = \lambda x)$. Osserviamo che, proiettando nuovamente su $\mathbb{A}^2 \sim (x, y)$, otterremmo ancora la retta $y = \lambda x$.

Esempio 4.5.35. Sia $f(x, y) = y^2 - x^2(x + 1)$ l'equazione della cubica annodata $\mathcal{C} = [f]$ in \mathbb{A}^2 . In questo caso $\varepsilon^{-1}(\mathcal{C}) \cap U_0 = V_{\mathbb{A}^2}(x^2(z^2 - x - 1) = 0)$, quindi abbiamo la parte affine della retta eccezionale $x = 0$ con molteplicità doppia, e la quadrica liscia $z^2 = x + 1$. Chiamiamo l'equazione $x^2(z^2 - x - 1)$ *trasformazione totale* e l'equazione $z^2 - x - 1$ *trasformazione stretta*. Osserviamo che la trasformazione stretta interseca la retta eccezionale $x = 0$ in $z = \pm 1$. Cosa succede se immergiamo tutto in $\mathbb{A}^3 \sim (x, y, z)$? In origine, nel piano x, y la curva presentava un nodo in $(0, 0)$; adesso abbiamo sollevato questa curva, "sciogliendo" il nodo nei due punti $(0, 0, \pm 1)$. In particolare, possiamo scomporre la cubica sollevata in due componenti: la retta (doppia) eccezionale $x = y = 0$ e la curva liscia $\{x = z^2 - 1, y = z^3 - z\}$ (si può osservare che tale curva è isomorfa a \mathbb{A}^1).

Esercizio 4.5.36.

- (1) La molteplicità della curva eccezionale è uguale alla molteplicità del punto 0.
- (2) Fare lo stesso ragionamento dell'esempio precedente per la curva $y^2 = x^3$ e osservare che perde la singolarità che ha in 0.
- (3) Cercare punto multiplo ordinario¹⁰.

4.5.7 Grassmanniana

Definizione 4.5.37. Dati due interi $1 \leq k \leq n$, definiamo la *grassmanniana*

$$\begin{aligned} \text{Gr}(k, n) &= \{H \subseteq \mathbb{K}^n : H \text{ sottospazio vettoriale di dimensione } k\} \\ &\sim \{K \subseteq \mathbb{P}^{n-1} : K \text{ sottospazio proiettivo di dimensione } k - 1\}, \end{aligned}$$

dove l'identificazione tra spazi vettoriali e proiettivi è quella solita.

Vorremmo dare a $\text{Gr}(k, n)$ una struttura di varietà proiettiva. Vediamo un paio di casi facili:

- $\text{Gr}(1, n)$ sono le rette di \mathbb{A}^n passanti per 0, che possiamo identificare con $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

¹⁰Qualunque cosa voglia dire...

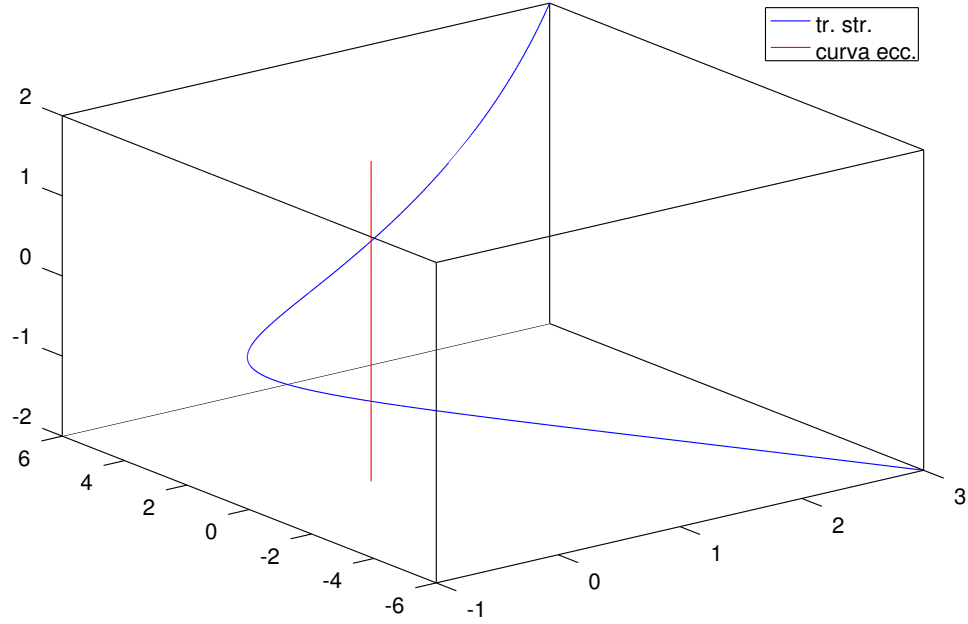


Figura 4.1: Blowup della cubica annodata

- $\text{Gr}(n-1, n)$ può essere visto come il duale di $\text{Gr}(1, n)$, quindi $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})^* \sim \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

In generale, vogliamo identificare $\text{Gr}(k, n)$ con un chiuso proiettivo tramite una biiezione, in modo compatibile con i due esempi precedenti.

Possiamo associare ad ogni $H \in \text{Gr}(k, n)$ una matrice $A \in \mathbb{K}^{n \times k}$, le cui colonne sono una base di H , quindi di rango massimo. Quest'associazione è univoca, a meno di moltiplicare a destra per matrici $M \in \text{GL}(k)$, ed è compatibile con l'identificazione usuale tra spazi vettoriali e proiettivi. Dato che la matrice A ha più righe che colonne, si osserva che i minori di ordine massimo di AM sono gli stessi di A moltiplicati per $\det(M)$, per ogni scelta di $M \in \text{GL}(k)$ (non si può dire lo stesso per l'azione di $\text{GL}(n)$ a sinistra).

Definizione 4.5.38. Associamo ad ogni $H \in \text{Gr}(k, n)$ con matrice associata A le *coordinate di Plücker*:

$$\forall 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \quad p_{i_1, \dots, i_k}(A) = \det(A(i_1, \dots, i_k; 1 : k)),$$

cioè per ogni possibile scelta di k righe associamo il minore corrispondente. Per le osservazioni precedenti, le coordinate di Plücker non dipendono dalla scelta di A , a meno di coefficiente moltiplicativo; inoltre, essendo A di rango massimo, almeno una delle coordinate sarà non nulla. Possiamo dunque definire l'*immersione di Plücker*

$$P : \text{Gr}(k, n) \rightarrow \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1} \quad | \quad H \mapsto [p_{i_1, \dots, i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n],$$

L'immersione di Plücker è la nostra candidata: mostreremo che induce una biiezione con un chiuso proiettivo di $\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$.

Consideriamo il primo caso non banale, cioè $\text{Gr}(2, 4)$, che sarà utile per capire come funziona l'immersione di Plücker.

$$P : \text{Gr}(2, 4) \rightarrow \mathbb{P}^5 \sim [z_{1,2}, z_{1,3}, z_{1,4}, z_{2,3}, z_{2,4}, z_{3,4}]$$

Possiamo ricoprire $\text{Gr}(2, 4)$ con carte della forma $U_{i,j} := \{H \in \text{Gr}(2, 4) : p_{i,j} \neq 0\}$. In particolare, studiamo la restrizione di P in $U_{1,2}$: in questa carta le matrici sono della forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix}, \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0,$$

quindi possiamo sempre ricondurci univocamente a matrici equivalenti della forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} p_{1,2} &= 1, & p_{1,3} &= b, \\ p_{1,4} &= d, & p_{2,3} &= -a, \\ p_{2,4} &= -c, & p_{3,4} &= ad - bc. \end{aligned}$$

In particolare, osserviamo che le coordinate $p_{1,3}, p_{1,4}, p_{2,3}, p_{2,4}$ sono libere, mentre $p_{3,4}$ è legata alle precedenti dalla relazione $p_{1,2}p_{3,4} + p_{1,4}p_{2,3} - p_{1,3}p_{2,4} = 0$. Poniamo dunque

$$V_{1,2} := \{z_{1,2} \neq 0\} \cap V_{\mathbb{P}^5}(z_{1,2}z_{3,4} + z_{1,4}z_{2,3} - z_{1,3}z_{2,4}).$$

Si verifica facilmente che $P|_{U_{1,2}}$ è iniettiva e $P(U_{1,2}) \subseteq V_{1,2}$. Dimostriamo che vale proprio $P(U_{1,2}) = V_{1,2}$, esibendo la mappa inversa. Dato che $V_{1,2} \subseteq \{z_{1,2} \neq 0\}$, possiamo dotarla di coordinate affini \mathbf{y} e definire la mappa inversa come

$$\varphi : V_{1,2} \rightarrow P(U_{1,2}) \quad | \quad \varphi(y_{1,3}, y_{1,4}, y_{2,3}, y_{2,4}, y_{3,4}) = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -y_{2,3} & y_{1,3} \\ -y_{2,4} & y_{1,4} \end{pmatrix}.$$

Si verifica facilmente che $P|_{U_{1,2}}$ e φ sono una l'inversa dell'altra.

Osserviamo che $V := \text{Im } P = \bigcup_{i < j} V_{i,j}$ è un chiuso, in quanto $\{z_{i,j} \neq 0\}$ formano un ricoprimento aperto di \mathbb{P}^5 e ciascun $V_{i,j}$ è chiuso in $\{z_{i,j} \neq 0\}$. Alternativamente, si può verificare che vale effettivamente $V = V_{\mathbb{P}^5}(z_{1,2}z_{3,4} + z_{1,4}z_{2,3} - z_{1,3}z_{2,4})$; tale chiuso è noto come *quadrica di Klein*, e si verifica essere una curva non singolare in \mathbb{P}^5 .

Si può verificare ragionando sulle carte che anche P è iniettiva: se $P(H_1) = P(H_2)$, in particolare si avrebbe $P(H_1), P(H_2) \in V_{i,j}$ per qualche i, j ; dunque $p_{i,j}(H_1), p_{i,j}(H_2) \neq 0$, da cui $H_1, H_2 \in U_{i,j}$, dove sappiamo già che la mappa è iniettiva.

Dunque $P : \text{Gr}(k, n) \rightarrow V$ è una biiezione, e possiamo quindi dare a $\text{Gr}(2, 4)$ la struttura di varietà quasi-proiettiva ereditata dalla quadrica di Klein. Questo procedimento si generalizza per $\text{Gr}(k, n)$.

Proposizione 4.5.39. Sia $V := P(\text{Gr}(k, n))$: allora V è un chiuso proiettivo e $P : \text{Gr}(k, n) \rightarrow V$ è una biiezione.

Dimostrazione. Sia $N := \binom{n}{k} - 1$. Definiamo $\forall 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ gli insiemi

$$V_{i_1, \dots, i_k} := V \cap \{z_{i_1, \dots, i_k} \neq 0\}, \quad U_{i_1, \dots, i_k} := P^{-1}(V_{i_1, \dots, i_k}).$$

Vogliamo studiare la restrizione di P agli insiemi U_{i_1, \dots, i_k} : per semplicità di notazione, ci limitiamo a considerare il caso di $U_{1, \dots, k}$. Per definizione si ha

$$P|_{U_{1, \dots, k}} : U_{1, \dots, k} \rightarrow V_{1, \dots, k} \subseteq \{z_1, \dots, k \neq 0\}.$$

Come prima possiamo rappresentare univocamente $H \in U_{1, \dots, k}$ con una matrice della forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \hline a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k} \end{bmatrix}$$

Vogliamo calcolare le coordinate di Plücker:

- Banalmente $p_{1, \dots, k} = 1$. Da un altro punto di vista, questa coordinata, essendo non nulla per definizione di $U_{1, \dots, k}$, può essere sempre fissata a 1.
- Se $i_1, \dots, i_{k-1} \leq k$ e $i_k > k$, calcolando il determinante otteniamo $p_{i_1, \dots, i_k} = \pm a_{i_k, \hat{i}_j}$, dove \hat{i}_j è l'indice mancante tra $1, \dots, k$. D'altra parte, si può semplicemente scrivere $a_{i,j} = \pm p_{1, \dots, \hat{j}, \dots, k, i}$ per $i > k$.
- Se $i_1, \dots, i_{k-h} \leq k$ e $i_{k-h+1}, \dots, i_k > k$, allora p_{i_1, \dots, i_k} è un minore di ordine h della sottomatrice $(a_{i,j})$ (a meno del segno). In particolare, calcolando il minore con la formula di Laplace, p_{i_1, \dots, i_k} sarà combinazione lineare di minori di ordine $h-1$ con coefficienti $\pm a_{i,j}$; in altri termini, sarà un polinomio omogeneo di secondo grado q_{i_1, \dots, i_k} , valutato nelle coordinate di Plücker derivanti dai minori di ordine $h-1$ e 1.

Come prima, possiamo osservare che

$$V_{1, \dots, k} = \{z_{1, \dots, k} \neq 0\} \cap \bigcap V_{\mathbb{P}^N}(q_{i_1, \dots, i_k}(\dots)),$$

costruendo in modo opportuno la mappa inversa $V_{1, \dots, k} \rightarrow U_{1, \dots, k}$. A questo punto, si mostra analogamente al caso di $\text{Gr}(2, 4)$ che V è un chiuso e $P : \text{Gr}(k, n) \rightarrow V$ è una biiezione. \square

In particolare, possiamo dotare $\text{Gr}(k, n)$ della struttura di varietà proiettiva che eredita da V . Si verifica facilmente che tale struttura nei casi $k=1, n-1$ coincide con quella data ingenuamente. Osserviamo che le carte U_{i_1, \dots, i_k} utilizzate nella precedente dimostrazione sono ancora aperti isomorfi ad $\mathbb{A}^{n(k-n)}$ (le scelte libere della matrice $(a_{i,j})$).

Si può dare una diversa interpretazione alle argomentazioni precedenti tramite il prodotto esterno, ma non ce ne occuperemo in questo corso.

Proposizione 4.5.40. Le grassmaniane sono varietà proiettive irriducibili.

Dimostrazione. Consideriamo l'azione di $\text{GL}(n)$ su $\text{Gr}(k, n)$ data dalla moltiplicazione a sinistra, denotata con $\mu : \text{GL}(n) \times \text{Gr}(k, n) \rightarrow \text{Gr}(k, n)$. Si può dimostrare¹¹ che, data una matrice A che rappresenta $H \in \text{Gr}(k, n)$, le coordinate di Plücker di MA sono polinomi biomogenei di bigrado $(k, 1)$ nei coefficienti di M e nelle coordinate di Plücker di A . In particolare, l'azione sopracitata è un morfismo, e quindi si tratta di un'azione algebrica.

¹¹A lezione non è stata fornita una dimostrazione; in seguito ne propongo una come esercizio.

Si osserva che $\mathrm{GL}(n)$ agisce transitivamente¹² su $\mathrm{Gr}(k, n)$, cioè $\forall H_0 \in \mathrm{Gr}(k, n)$ la mappa $\varphi_{H_0} : \mathrm{GL}(n) \rightarrow \mathrm{Gr}(k, n)$, tale che $\varphi_{H_0}(g) = g(H_0)$, è surgettiva. Dato che $\varphi_{H_0} = \mu \circ (\mathrm{Id} \times \mathrm{cost}_{H_0})$, anche φ_{H_0} è un morfismo. Osserviamo che $\mathrm{GL}(n)$ è irriducibile, in quanto è un aperto non vuoto di $\mathbb{A}^{n \times n}$; dunque anche $\mathrm{Im}(\varphi_{H_0}) = \mathrm{Gr}(k, n)$ sarà irriducibile (vedi Proposizione 3.2.26). \square

Esercizio 4.5.41. Se $A \in \mathbb{K}^{n \times k}$ e $M \in \mathrm{GL}(n)$, allora le coordinate di Plücker di MA sono polinomi biomogenei di bigrado $(k, 1)$ nei coefficienti di M e nelle coordinate di Plücker di A .

Soluzione. Tralasciamo il caso $n = k$, che è banale: supponiamo dunque $n > k$. Mostriamo che questo è vero per $p_{1, \dots, k}$: gli altri casi sono del tutto analoghi. Osserviamo che vale

$$p_{1, \dots, k} = \det \left(MA \mid Z \right), \quad Z := \left(\begin{array}{c} 0 \\ I_{n-k} \end{array} \right),$$

dove I_{n-k} è la matrice identità di ordine $n - k$. In particolare, scegliendo $N := M^{-1}Z$ si ha $M(A|N) = (MA|Z)$ e dunque $p_{1, \dots, k} = \det(M) \det(A|N)$. Poiché $N = \det(M)^{-1} M^\dagger Z$, si ricava che $\det(A|N) = \det(M)^{-n+k} \sum q_{i_1, \dots, i_k} s_{\hat{i}_1, \dots, \hat{i}_k}$, dove \mathbf{q} sono le coordinate di Plücker di A e s_* sono minori di M^\dagger , da cui

$$\det(M)^{n-k-1} p_{1, \dots, k} = \sum q_{i_1, \dots, i_k} s_{\hat{i}_1, \dots, \hat{i}_k}.$$

Osserviamo che $\det(M)$ è un polinomio omogeneo di grado n e $s_{\hat{i}_1, \dots, \hat{i}_k}$ di grado $(n-1)(n-k)$, nei coefficienti di M , che denoteremo con \mathbf{m} . In particolare, dato che la precedente equazione è polinomiale, si dovrà avere $\det(M)^{n-k-1} \sum q_{i_1, \dots, i_k} s_{\hat{i}_1, \dots, \hat{i}_k}$ e quindi $p_{1, \dots, k} = f(\mathbf{m}, \mathbf{q})$ con f polinomio biomogeneo di bigrado $(k, 1)$ nelle coordinate (\mathbf{m}, \mathbf{q}) . \square

Applicazioni

Concludiamo il capitolo con due esempi di applicazione delle grassmanniane.

Esempio 4.5.42. Siamo interessati a verificare che, per ogni scelta di $P = [a, b, c, d] \in \mathbb{P}^3$, l'insieme $\{\ell \in \mathrm{Gr}(2, 4) \mid P \in \ell\}$ è un chiuso di Zariski.

Per ogni $\ell \in \mathrm{Gr}(2, 4)$ consideriamo la matrice associata $A = (a_{i,j})$: chiedere che $P \in \ell$ è equivalente a imporre

$$\mathrm{Rk} \left(\begin{array}{cc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b \\ a_{3,1} & a_{3,2} & c \\ a_{4,1} & a_{4,2} & d \end{array} \right) \leq 2.$$

Questa condizione è equivalente a imporre quattro condizioni lineari sui minori di A , quindi all'intersezione dei luoghi di zeri di (fino a) quattro polinomi omogenei di grado 1 nei coefficienti di Plücker. Osserviamo che, a seconda della scelta di $P = [a, b, c, d]$, possiamo avere meno di quattro polinomi di grado 1: per esempio, se $P = [1, 0, 0, 0]$, tre dei quattro polinomi risultano essere banali.

Un altro approccio può essere quello di dimostrarlo per ogni carta, ottenendo condizioni della forma

$$\mathrm{Rk} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ a_{3,1} & a_{3,2} & c \\ a_{4,1} & a_{4,2} & d \end{array} \right) \leq 2.$$

¹²Cioè dà luogo ad una sola orbita.

Esempio 4.5.43. Sia $X = \{(\ell, m) \in \text{Gr}(2, 4) \times \text{Gr}(2, 4) \mid \ell \cap m \neq \emptyset\}$: vogliamo mostrare che X è chiuso in $\text{Gr}(2, 4) \times \text{Gr}(2, 4)$.

Un possibile approccio è seguire le righe dell'approccio precedente: se $\ell, m \in \text{Gr}(2, 4)$ e $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ sono le loro matrici associate, chiedere che $\ell \cap m \neq \emptyset$ è equivalente a

$$\det \left(\begin{array}{cc|cc} a_{1,1} & a_{1,2} & b_{1,1} & b_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_{2,1} & b_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_{3,1} & b_{3,2} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & b_{4,1} & b_{4,2} \end{array} \right) = 0.$$

Questa condizione è difficile da tradurre in coordinate di Plücker. Potremmo anche prendere due carte di $\text{Gr}(2, 4)$ e vedere il problema nel loro prodotto, ma questo non migliora di molto la situazione.

Un metodo più elegante è quello di introdurre una varietà ausiliaria

$$Y := \{(P, \ell, m) \in \mathbb{P}^3 \times \text{Gr}(2, 4) \times \text{Gr}(2, 4) : P \in \ell \cap m\} :$$

se $p_2 : \mathbb{P}^3 \times \text{Gr}(2, 4) \times \text{Gr}(2, 4) \rightarrow \text{Gr}(2, 4) \times \text{Gr}(2, 4)$ è la proiezione, si osserva che $X = p_2(Y)$, quindi (per il Teorema 4.4.4) è sufficiente mostrare che Y è chiuso. Questo è facile: basta notare che

$$Y = (\{(P, \ell) : P \in \ell\} \times \text{Gr}(2, 4)) \cap (\text{Gr}(2, 4) \times \{(P, m) : P \in m\}),$$

dunque applicare l'esempio precedente.

Capitolo 5

Bozze lezioni

5.1 Lezione 17 (27 Nov 2015)

5.1.1 Geometria birazionale

Definizione 5.1.1. Sia X una varietà quasi-proiettiva. Una *funzione razionale* $f : X \dashrightarrow \mathbb{K}$ è una classe d'equivalenza di coppie (U, φ) , dove $U \subseteq X$ è un aperto denso e $\varphi : U \rightarrow \mathbb{K}$ è una funzione regolare, tale che

$$(U, \varphi) \sim (V, \psi) \iff \varphi = \psi \text{ su } U \cap V.$$

Osservazione 5.1.2. Bisogna verificare che si tratta effettivamente di una relazione d'equivalenza. La riflessività e la simmetria sono ovvie, la transitività un po' meno.

Osserviamo come prima cosa che, se U e V sono aperti densi, allora anche $U \cap V$ lo è:

- Se X è irriducibile, allora $U \cap V$ è denso in quanto aperto non vuoto di un irriducibile ($U \cap V \neq \emptyset$ per densità).
- Se $X = X_1 \cup \dots \cup X_k$ con X_1, \dots, X_k irriducibili, osserviamo che U è denso in X se e solo se $\forall i \ U \cap X_i \neq \emptyset$; si può concludere in maniera analoga restringendoci ai singoli X_i .

Siano dunque (U, φ) , (V, ψ) e (W, ξ) tali che $(U, \varphi) \sim (V, \psi)$ e $(V, \psi) \sim (W, \xi)$: in particolare $\varphi = \psi = \xi$ su $U \cap V \cap W$ che è denso in $U \cap W$, quindi coincideranno anche su $U \cap W$ (le funzioni regolari sono morfismi).

Osservazione 5.1.3. Le funzioni razionali si possono tranquillamente sommare, moltiplicare tra di loro o per degli scalari; in particolare formano una \mathbb{K} -algebra.

Osserviamo inoltre che, se una funzione razionale f non è costantemente nulla su alcuna componente irriducibile di X , possiamo definire in modo ovvio¹ la sua inversa $\frac{1}{f}$. In particolare, se X è irriducibile, le funzioni razionali formano un campo che denotiamo con $\mathbb{K}(X)$.

Definizione 5.1.4. Siano X, Y due varietà irriducibili. Una *applicazione razionale* $f : X \dashrightarrow Y$ è una classe d'equivalenza di coppie (U, φ) , dove $U \subseteq X$ è un aperto non vuoto e $\varphi : U \rightarrow Y$ è un morfismo, secondo la stessa relazione precedente.

¹Prendere wlog φ che non si annulla in X e passare a $\frac{1}{\varphi}$.

5.2 Lezione 18 (2 Nov 2015)

Salvo diversamente specificato, le varietà studiate saranno sempre quasi-proiettive irriducibili. Osserviamo che in generale $\mathbb{K}(X) \supseteq \mathbb{K}$.

Sia X chiuso irriducibile in \mathbb{A}^n , sia $\mathbb{K}[X]$ il suo anello delle coordinate, che è un dominio. Ha senso parlare del suo campo delle frazioni, che indichiamo con F .

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}(X) \\ \downarrow & \nearrow \varphi & \\ F & & \end{array}$$

Anche $\mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}(X)$ è un'inclusione. Esiste un'unica φ che fa commutare il diagramma (per proprietà universale della localizzazione).

Proposizione 5.2.1. Se X è affine, allora φ è un isomorfismo.

Dimostrazione. Dato che φ esiste unica, basta esibire una mappa che faccia commutare il diagramma per vedere com'è definita. Se $f = \frac{a}{b} \in F$ con $a, b \in \mathbb{K}[X]$ e $b \neq 0$, allora diciamo che $\varphi(\frac{a}{b}) = (X_b, \frac{a}{b})$. Si verifica la buona definizione osservando che $f = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se e solo se $ad - bc = 0$ in $\mathbb{K}[X]$ (e quindi in $\mathbb{K}(X)$).

L'iniettività a questo punto è una verifica banale. Per la surgettività, data $g \in \mathbb{K}(X)$ rappresentata da (U, ψ) , ricordando che gli aperti principali sono una base degli aperti affini, $\exists b \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ tale che $X_b \subseteq U$. In particolare possiamo rappresentare g con $(X_b, \psi|_{X_b})$. Osserviamo che $\psi|_{X_b} \in \mathbb{K}[X_b] = \mathbb{K}[X]_b$ e quindi $\psi|_{X_b} = \frac{a}{b^r}$ per opportuni $a \in \mathbb{K}[X]$ e $r \geq 0$. Dunque $g = \varphi(\frac{a}{b^r})$. \square

Osservazione 5.2.2. Se X è una varietà affine irriducibile, allora $\mathbb{K}(X)$ è un'estensione finitamente generata di \mathbb{K} (infatti $\mathbb{K}[X]$ è generato dalle classi delle coordinate su \mathbb{A}^n , e nel caso affine $\mathbb{K}(X)$ è il suo campo delle frazioni).

Esempio 5.2.3.

- (1) $\mathbb{K}(\mathbb{A}^1) = \mathbb{K}(x)$ (perché $\mathbb{K}[\mathbb{A}^1] = \mathbb{K}[x]$).
- (2) $\mathbb{K}[\mathbb{A}^n] = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \Rightarrow \mathbb{K}(\mathbb{A}^n) = \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$.
- (3) Sia $X \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ un'ipersuperficie irriducibile. Allora $I(X) = (f)$ con f irriducibile. Siano x_1, \dots, x_n, y coordinate su \mathbb{A}^{n+1} : possiamo supporre wlog che f dipenda da y . Allora

$$\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[\mathbf{x}; y]/(f) = \mathbb{K}[\mathbf{x}][y]/(f).$$

Per il Lemma di Gauss, f è irriducibile anche in $\mathbb{K}(\mathbf{x})[y]$. In particolare, consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}(\mathbf{x})[y]/(f) \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathbb{K}(X) & & \end{array}$$

Facciamo le seguenti osservazioni: $\mathbb{K}[X]$ si immerge in $\mathbb{K}(\mathbf{x})[y]/(f)$ (non è scontato, ma si verifica con Gauss), quest'ultimo è un campo e la freccia che fa commutare il diagramma esiste unica (per proprietà universale, ricordando che $\mathbb{K}(X)$ è il campo delle frazioni) ed è bigettiva (l'iniettività come prima, la surgettività perché i generatori x_1, \dots, x_n, y vanno in generatori). In particolare $\mathbb{K}(X) \cong \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)[y]/(f)$.

Esempio 5.2.4. Si consideri $\mathcal{C} := \{y^2 = p(x)\} \subseteq \mathbb{A}^2$: abbiamo

$$\mathbb{K}(\mathcal{C}) = \mathbb{K}(x)[y]/(y^2 - p(x)),$$

che è un'estensione di grado 2 di $\mathbb{K}(x)$. Se per esempio $\mathcal{C}_1 = \{y^2 = x^3\}$ è la cubica cuspidale, allora

$$\mathbb{K}(\mathcal{C}_1) = \mathbb{K}(x)[y]/(y^2 - x^3).$$

Sia $f = \frac{y}{x} \in \mathbb{K}(\mathcal{C}_1)$: osserviamo che $f^2 = x$ in $\mathbb{K}(\mathcal{C}_1)$. In particolare

$$x, y = xf \in \mathbb{K}(f) \Rightarrow \mathbb{K}(x, y) \subseteq \mathbb{K}(f) \subseteq \mathbb{K}(\mathcal{C}_1) \subseteq \mathbb{K}(x, y),$$

da cui $\mathbb{K}(\mathcal{C}_1) = \mathbb{K}(f) \cong \mathbb{K}(t)$.

Esercizio 5.2.5. Fare lo stesso per la cubica annodata $\mathcal{C}_2 = \{y^2 - x^2(x+1) = 0\}$.

Questi esempi sono fuorvianti: si può mostrare che, se p ha 3 radici distinte $\mathbb{K}(\mathcal{C}) \not\cong \mathbb{K}(t)$

Osservazione 5.2.6. Supponiamo di avere tre varietà quasi-proiettive irriducibili X, Y, Z , due mappe razionali $f : X \dashrightarrow Y$ e $g : Y \dashrightarrow Z$ e i rispettivi rappresentanti (U, φ) e (V, ψ) . Cosa è necessario che valga perché la composizione $g \circ f$ abbia senso? Sicuramente se $\varphi^{-1}(V) = \emptyset$ abbiamo problemi; d'altra parte, se $W = \varphi^{-1}(V) \neq \emptyset$, allora W sarà un aperto non vuoto di X , quindi un denso, quindi ha senso cambiare rappresentante e considerare la composizione $\psi \circ \varphi|_W$. Si verifica che questa proprietà non dipende dalla scelta dei rappresentanti (fintanto che soddisfano $\varphi_1^{-1}(V_1) \neq \emptyset$) (per esercizio).

Definizione 5.2.7. Se X, Y sono varietà quasi-proiettive irriducibili e $f : X \dashrightarrow Y$ è una mappa razionale con rappresentante (U, φ) , diciamo che f è *dominante* se $\overline{\varphi(U)} = Y$. Questa condizione equivale a chiedere $\varphi^{-1}(V) \neq \emptyset$ per ogni $V \subseteq Y$ aperto non vuoto, e non dipende dalla scelta dei rappresentanti.

Definizione 5.2.8. Una mappa razionale dominante $f : X \dashrightarrow Y$ è un *isomorfismo birazionale*² se $\exists g : Y \dashrightarrow X$ tale che $f \circ g = \text{Id}_Y$ e $g \circ f = \text{Id}_X$. In contrapposizione, gli isomorfismi (relativi ai morfismi) saranno a volte chiamati *isomorfismi biregolari*.

Definizione 5.2.9. Se $f : X \dashrightarrow Y$ è una mappa razionale, il suo *dominio* è

$$\text{dom}(f) = \bigcup \{U \mid (U, \varphi) \text{ rappresentante di } f\}.$$

Si può osservare che f ammette sempre un rappresentante nel suo dominio.

Esempio 5.2.10. Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà quasi-proiettiva irriducibile, siano $F_0, \dots, F_m \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$, tali che $\forall i \ X \not\subseteq V(F_0, \dots, F_m)$. Allora $X \dashrightarrow \mathbb{P}^m \mid x \mapsto [F_0(x), \dots, F_m(x)]$ è una mappa razionale: infatti $X \setminus V(F_0, \dots, F_m)$ è un aperto di X , e questa mappa è ben definita (nonché un morfismo) dove almeno uno dei polinomi non si annulla.

- (1) $\mathbb{A}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1 \mid (x, y) \mapsto [x, y]$ non è un morfismo, però è una mappa razionale.
- (2) Sia $\mathcal{C} = \{y^2 - x^3 = 0\} \subseteq \mathbb{A}^2$ la cubica cuspidale, sia $f : \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathcal{C} \mid t \mapsto (t^2, t^3)$: abbiamo già dimostrato in lezioni precedenti che f è un morfismo bigettivo, ma non è un isomorfismo biregolare. Questo è però un isomorfismo birazionale: infatti per $x \neq 0$ si ha $t = \frac{y}{x}$. In particolare $\text{dom}(f) = \mathcal{C} \setminus \{(0, 0)\}$: infatti è chiaro che vale \supseteq , ma se non valesse l'uguaglianza avremmo $\text{dom}(f) = \mathcal{C}$, da cui f sarebbe un isomorfismo biregolare.

²In pratica abbiamo dotato le varietà quasi-proiettive irriducibili di struttura di categoria, utilizzando le mappe razionali dominanti come morfismi.

- (3) Se $U \subseteq X$ è un aperto non vuoto, chiaramente l'immersione $i : U \hookrightarrow X$ è un isomorfismo birazionale.
- (4) Consideriamo il blowup $\widehat{\mathbb{A}^2} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{A}^2$: ricordando le lezioni precedenti, ε è un morfismo e, nella carta $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ha inversa $\varepsilon^{-1} : \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \widehat{\mathbb{A}^2} \mid (x,y) = \{(x,y,[x,y])\}$. In particolare ε sarà un isomorfismo birazionale. Anche in questo caso osserviamo che $\text{dom}(\varepsilon^{-1}) = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$: in caso contrario si avrebbe che ε è un isomorfismo biregolare, ma non è iniettiva (manda la curva eccezionale E in un punto).
- (5) Definiamo la *trasformazione di Cremona* (o *quadratica standard*) come la mappa razionale

$$c : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2 \quad | \quad [x_0, x_1, x_2] \mapsto [x_1x_2, x_0x_2, x_0x_1].$$

Chiaramente $\text{dom}(c) \supseteq \mathbb{P}^2 \setminus \{[1,0,0], [0,1,0], [0,0,1]\}$. Inoltre si verifica facilmente che $c^2 = \text{Id}_{\mathbb{P}^2}$ (come mappa razionale), nella carta $x_0x_1x_2 \neq 0$; in particolare c è un isomorfismo birazionale, e induce un automorfismo di ordine 2 su $\mathbb{P}^2 \setminus V(x_0x_1x_2)$. Ci chiediamo se si possa estendere anche ai punti $[1,0,0], [0,1,0], [0,0,1]$: ci accorgiamo che c manda ciascuna retta della forma $r_i = \{x_i = 0\}$ nel punto opposto; in particolare, dato che $[1,0,0] \in r_1 \cap r_2$, se per assurdo si potesse estendere c in $[1,0,0]$, dovrebbe mandarlo contemporaneamente in due punti distinti.

Definizione 5.2.11. Siano X, Y varietà quasi-proiettive irriducibili, sia $f : X \dashrightarrow Y$ una mappa razionale dominante. Definiamo (analogamente al caso regolare) $f^* : \mathbb{K}(Y) \rightarrow \mathbb{K}(X) \mid \varphi \mapsto \varphi \circ f$ (ha senso perché f è dominante). Si osserva che f^* è un omomorfismo \mathbb{K} -lineare di campi, o anche un omomorfismo di estensioni di \mathbb{K} .

Osservazione 5.2.12. Anche in questo caso vale la funtorialità, ossia

- $\text{Id} : X \dashrightarrow X \Rightarrow \text{Id}^* = \text{Id}_{\mathbb{K}(X)}$;
- Se $f : X \dashrightarrow Y$, $g : Y \dashrightarrow Z$ sono dominanti, allora $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Corollario 5.2.13. Se X, Y sono varietà quasi-proiettive irriducibili isomorfe birazionalmente, allora $\mathbb{K}(X) \cong \mathbb{K}(Y)$ (tramite isomorfismo \mathbb{K} -lineare).

Dimostrazione. Immediato per funtorialità, come nel caso regolare. \square

Corollario 5.2.14. Se X è una varietà quasi-proiettiva, allora $\mathbb{K}(X)$ è una \mathbb{K} -algebra finitamente generata.

Dimostrazione. Sia $U \subseteq X$ un aperto affine non vuoto (vedi Corollario 4.2.23): abbiamo visto che $U \hookrightarrow X$ è un isomorfismo birazionale, quindi $\mathbb{K}(X) \cong \mathbb{K}(U)$. Quest'ultima è una \mathbb{K} -algebra finitamente generata (lo abbiamo visto all'inizio della lezione). \square

Esempio 5.2.15. Qualche esempio:

- (1) Osserviamo che $\mathbb{A}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, quindi $\mathbb{K}(\mathbb{P}^n) = \mathbb{K}(\mathbb{A}^n) = \mathbb{K}(y_1, \dots, y_n)$. In particolare, ricordando la relazione tra \mathbb{A}^n e \mathbb{P}^n , possiamo scrivere $\mathbb{K}(\mathbb{P}^n) = \mathbb{K}\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$.
- (2) Osserviamo che $\mathbb{A}^{n+m} = \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m \hookrightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ è una varietà affine, quindi

$$\mathbb{K}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \cong \mathbb{K}(\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m) = \mathbb{K}(\mathbb{A}^{n+m}).$$

- (3) Ricordando che abbiamo una carta $\mathbb{A}^{n(n-k)} \hookrightarrow \text{Gr}(k, n)$, abbiamo $\mathbb{K}(\text{Gr}(k, n)) \cong \mathbb{K}(\mathbb{A}^{n(n-k)})$.

Lemma 5.2.16. Siano X, Y varietà irriducibili, sia $\varphi : \mathbb{K}(Y) \rightarrow \mathbb{K}(X)$ un omomorfismo \mathbb{K} -lineare. Allora $\exists ! f : X \dashrightarrow Y$ mappa razionale dominante tale che $\varphi = f^*$.

Dimostrazione. Possiamo supporre wlog X, Y affini: altrimenti posso sostituirli con due aperti affini in essi contenuti, e osservare che ipotesi e tesi non cambiano. In questo modo $\mathbb{K}(X)$ (resp. $\mathbb{K}(Y)$) è proprio il campo delle frazioni di $\mathbb{K}[X]$ (resp. $\mathbb{K}[Y]$).

Siano y_1, \dots, y_m generatori di $\mathbb{K}[Y]$ come \mathbb{K} -algebra: si osserva che

$$\exists b \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\} : \forall 1 \leq i \leq m \quad \varphi(y_i) = \frac{a_i}{b}$$

(passando eventualmente a denominatore comune). In particolare $\text{Im}(\varphi|_{\mathbb{K}[Y]}) \subseteq \mathbb{K}[X]_b = \mathbb{K}[X_b]$. Definiamo quindi $\tilde{\varphi} : \mathbb{K}[Y] \rightarrow \mathbb{K}[X_b]$ come $\tilde{\varphi} = \varphi|_{\mathbb{K}[Y]}$ e consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}(Y) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{K}(X) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{K}[Y] & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \mathbb{K}[X_b] \end{array}$$

Per la Proposizione 4.2.31 sappiamo che $\exists ! \psi : X_b \rightarrow Y$ morfismo tale che $\psi^* = \tilde{\varphi}$. Sia dunque $f : X \dashrightarrow Y$ definita dal rappresentante (X_b, ψ) : osservando che φ è iniettiva in quanto omomorfismo di \mathbb{K} -estensioni, per il Corollario 4.2.27 deduciamo che f è dominante. Verifichiamo che tale f soddisfa le nostre richieste: se $\frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{K}[Y]$ e $q \neq 0$ è un elemento generico di $\mathbb{K}(Y)$, vale

$$f^*\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{f^*(p)}{f^*(q)} = \frac{p \circ \psi}{q \circ \psi} = \frac{\tilde{\varphi}(p)}{\tilde{\varphi}(q)} = \varphi\left(\frac{p}{q}\right).$$

Supponiamo ora che anche $g : X \dashrightarrow Y$ soddisfi $g^* = \varphi$, e verifichiamo che $f = g$. Osserviamo che possiamo prendere due rappresentanti $f \sim (U, \alpha)$, $g \sim (U, \beta)$ con $U \subseteq X_b$ aperto non vuoto, e che $\alpha = f \circ i$, $\beta = g \circ i$ con $i : U \hookrightarrow X$. In particolare $\alpha^* = i^* \circ f^* = i^* \circ g^* = \beta^*$, da cui $\alpha = \beta$ (nel caso regolare l'unicità l'abbiamo già dimostrata) e quindi $f \sim g$. \square

5.3 Lezione 19 (04 Dic 2015)

Proposizione 5.3.1. Siano X, Y due varietà quasi-proiettive irriducibili. Allora le seguenti sono equivalenti:

- (1) $X \sim_{\text{bir}} Y$;
- (2) $\mathbb{K}(X) \cong \mathbb{K}(Y)$ (come estensioni di \mathbb{K});
- (3) $\exists U \subseteq X, V \subseteq Y$ aperti non vuoti tali che $U \cong V$.

Dimostrazione.

(3) \Rightarrow (1) è ovvio per definizione.

(1) \Rightarrow (2) l'abbiamo già dimostrato.

(2) \Rightarrow (3) sia $\varphi : \mathbb{K}(Y) \rightarrow \mathbb{K}(X)$ un isomorfismo \mathbb{K} -lineare: allora $\exists f : X \dashrightarrow Y$ mappa razionale dominante tale che $f^* = \varphi$. A meno di restringere l'insieme di definizione, possiamo supporre wlog che X, Y siano varietà affini e che $f : X \rightarrow Y$ sia un morfismo. Sia $\psi : \mathbb{K}(X) \rightarrow \mathbb{K}(Y)$ l'inversa di φ .

Siano x_1, \dots, x_n le classi delle coordinate date da un'immersione $X \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ (i soliti generatori). Come fatto in precedenza, $\exists b \in \mathbb{K}[Y] \setminus \{0\}$ tale che $\forall i \ \psi(x_i) = \frac{a_i}{b}$, con $a_i \in \mathbb{K}[Y]$. In particolare $\text{Im}(\psi|_{\mathbb{K}[X]}) \subseteq \mathbb{K}[Y]_b = \mathbb{K}[Y_b]$, ma questo è vero anche restringendo ψ a $\mathbb{K}[X]_{\varphi(b)} = \mathbb{K}[X_{\varphi(b)}]$. Possiamo quindi scrivere il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{K}(Y) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{K}(X) & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{K}(Y) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{K}[Y_b] & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \mathbb{K}[X_{\varphi(b)}] & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & \mathbb{K}[Y_b] \end{array}$$

Si osserva che $\tilde{\varphi}$ è un isomorfismo (con inversa $\tilde{\psi}$), in particolare abbiamo un isomorfismo $Y_b \cong X_{\varphi(b)}$. Questo isomorfismo è proprio $f|_{Y_b}$. \square

5.3.1 Teoria dei campi

Definizione 5.3.2. Sia \mathbb{K} un campo, $F \supseteq \mathbb{K}$ un'estensione. Un insieme finito $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq F$ si dice *algebricamente indipendente* (o si dirà che i suoi elementi lo sono) su \mathbb{K} se:

$$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow F \mid p(x) \mapsto p(a_1, \dots, a_n) \text{ è iniettiva.}$$

Un insieme infinito S è algebricamente indipendente se e solo se ogni suo sottoinsieme finito è algebricamente indipendente.

Definizione 5.3.3. Una *base di trascendenza* di F su \mathbb{K} è un insieme algebricamente indipendente massimale.

Teorema 5.3.4. Sia $F \supseteq \mathbb{K}$ un'estensione di campi. Allora esiste sempre una base di trascendenza, e tutte le basi di trascendenza hanno la stessa cardinalità, detta *grado di trascendenza* (che indicheremo con $\text{Trdeg}_{\mathbb{K}}(F)$).

Dimostrazione omessa.

Osservazione 5.3.5. Si osserva che $\text{Trdeg}_{\mathbb{K}} F = 0$ se e solo se F è un'estensione algebrica di \mathbb{K} .

Lemma 5.3.6. Sia $S \subseteq F$. Valgono le seguenti proprietà:

- (1) Se S è algebricamente indipendente, allora $\exists \mathcal{B}$ base di trascendenza che lo contiene;
- (2) Se $F \supseteq \mathbb{K}(S)$ è algebrica, allora S contiene una base di trascendenza \mathcal{B} .

Dimostrazione omessa.

Osservazione 5.3.7. Se X è una varietà quasi-proiettiva irriducibile, abbiamo visto che $\mathbb{K}(X) \supseteq \mathbb{K}$ è un'estensione finitamente generata. In particolare, se $\mathbb{K}(X) = \mathbb{K}(a_1, \dots, a_n)$, si verifica tramite il lemma precedente che $\text{Trdeg}(\mathbb{K}(X)) \leq n$.

Definizione 5.3.8. Se X è una varietà quasi-proiettiva irriducibile, definiamo la sua *dimensione* come $\dim(X) = \text{Trdeg}(\mathbb{K}(X))$ (che abbiamo appena visto essere finita). Se X è una varietà quasi-proiettiva riducibile, e $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$ è una sua decomposizione in irriducibili³, definiamo la sua dimensione come $\dim(X) = \max_{1 \leq i \leq n} \dim(X_i)$.

Osservazione 5.3.9. Ricordando la Proposizione 5.3.1, se X, Y sono varietà quasi-proiettive irriducibili e $X \sim_{\text{bir}} Y$, allora $\mathbb{K}(X) \cong \mathbb{K}(Y)$, quindi $\dim(X) = \dim(Y)$. In altri termini, la dimensione è un invariante birazionale.

Esempio 5.3.10. Ricordiamo che $\mathbb{K}(\mathbb{A}^n) = \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$, quindi $\dim(\mathbb{A}^n) = n$. Dato che \mathbb{A}^n è un aperto non vuoto di \mathbb{P}^n (e quindi $\mathbb{A}^n \sim_{\text{bir}} \mathbb{P}^n$), si ha anche $\dim(\mathbb{P}^n) = \dim(\mathbb{A}^n) = n$. Per la stessa ragione $\dim(\text{Gr}(k, n)) = k(n - k)$ (contiene una carta isomorfa ad $\mathbb{A}^{k(n-k)}$).

Esempio 5.3.11. Sia $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n; y]$ un polinomio irriducibile, supponiamo che f dipenda da y . Sia $X = V(f) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$. Avevamo calcolato (nella lezione precedente)

$$\mathbb{K}(X) = \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)[y]/(f) \supseteq^{\text{alg}} \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n),$$

da cui si verifica immediatamente che $\dim(X) = n$ (vedi Lemma 5.3.6). In particolare, le ipersuperfici irriducibili hanno sempre la dimensione dello spazio in cui vivono, meno uno.

Proposizione 5.3.12. Sia X una varietà quasi-proiettiva irriducibile di dimensione n . Allora $\exists f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n; y] = \mathbb{K}[\mathbf{x}; y]$ polinomio irriducibile tale che $X \sim_{\text{bir}} V(f) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$.

Dimostrazione. Lo dimostriamo in caratteristica 0, anche se il risultato è valido più in generale⁴. Sia $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{K}(X)$ una base di trascendenza: in particolare $\mathbb{K}(X) \supseteq \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$ è un'estensione algebrica finita (perché $\mathbb{K}(X)$ è finitamente generata su \mathbb{K}). Per il teorema dell'elemento primitivo (che possiamo applicare perché siamo in caratteristica 0) $\exists \alpha \in \mathbb{K}(X)$ tale che $\mathbb{K}(X) = \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)[\alpha] \cong \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)[y]/(g)$, dove $g \in \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)[y]$ è il polinomio minimo di α su $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)[y]$, che è monico e irriducibile. Possiamo scrivere

$$g(y) = y^r + a_1(\mathbf{x})y^{r-1} + \dots + a_r(\mathbf{x})$$

e osservare che, a meno di moltiplicare per un opportuno $d(x) \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, si ha che $f(x, y) = g(y)d(x)$ è un polinomio primitivo in $\mathbb{K}[\mathbf{x}; y]$ e irriducibile in $\mathbb{K}(\mathbf{x})[y]$ (g lo è, e d è invertibile). In particolare f è irriducibile per il lemma di Gauss, e si può concludere che $\mathbb{K}(X) \cong \mathbb{K}(\mathbf{x})[y]/(f) = \mathbb{K}(V(f))$. \square

Proposizione 5.3.13. Siano X, Y due varietà quasi-proiettive irriducibili, sia $f : X \dashrightarrow Y$ un morfismo dominante: allora $\dim Y \leq \dim X$.

Dimostrazione. La mappa $f^* : \mathbb{K}(Y) \rightarrow \mathbb{K}(X)$ è iniettiva (è un omomorfismo di campi), e manda ogni base di trascendenza di $\mathbb{K}(Y)$ in un insieme di elementi algebricamente indipendenti di $\mathbb{K}(X)$. \square

Proposizione 5.3.14. Siano X, Y due varietà quasi-proiettive irriducibili: allora $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$.

³Non dovrebbe dipendere dalla scelta fatta.

⁴Si dovrebbe usare il lemma di normalizzazione di Noether.

Dimostrazione. Similmente a quanto fatto in precedenza, possiamo supporre wlog che X, Y siano affini e soddisfino $X \subseteq \mathbb{A}^N$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^M$. In particolare $\mathbb{K}(X)$ (risp. $\mathbb{K}(Y)$) è generato da classi di coordinate x_1, \dots, x_N (risp. y_1, \dots, y_M) e, a meno di riordinare, possiamo supporre che x_1, \dots, x_n (risp. y_1, \dots, y_m) sia una base di trascendenza di $\mathbb{K}(X)$ (risp. $\mathbb{K}(Y)$), con $n \leq N$ (risp. $m \leq M$).

Vogliamo mostrare che $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ è una base di trascendenza di $\mathbb{K}(X \times Y)$. E tutto ben definito: basta considerare le proiezioni $p_1 : X \times Y \rightarrow X$ e $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$ e passare a p_1^* e p_2^* . Osserviamo che

$$\mathbb{K}(X \times Y) = \mathbb{K}(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_M) \stackrel{\text{alg}}{\supseteq} \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) :$$

infatti le relazioni di dipendenza algebrica si spostano da $\mathbb{K}(X)$ e $\mathbb{K}(Y)$ su $\mathbb{K}(X \times Y)$ tramite p_1^* e p_2^* ; in particolare, per il Lemma 5.3.6, l'insieme $\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\}$ contiene una base di trascendenza di $\mathbb{K}(X \times Y)$.

Resta da dimostrare che $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ sono algebricamente indipendenti. Supponiamo per assurdo che soddisfino una relazione di dipendenza algebrica: in tal caso $\exists p \in \mathbb{K}[S_1, \dots, S_n, T_1, \dots, T_m]$ (variabili libere) non nullo, tale che $p(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0$ su $X \times Y$ (possiamo restringerci a lavorare su $\mathbb{K}[X \times Y]$). Scriviamo $p(\mathbf{S}, \mathbf{T}) = \sum_I a_I(\mathbf{S}) \mathbf{T}^I$, dove I varia in un insieme di multiindici: in particolare, fissato $\bar{\mathbf{x}} \in X$, vale $\forall y \in Y \sum_I a_I(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{y}^I = 0$. Interpretando la precedente scrittura come un polinomio in $\mathbb{K}(Y)$, e ricordando che y_1, \dots, y_m ne è una base di trascendenza, deduciamo che $\forall I \ a_I(\bar{\mathbf{x}}) \equiv 0$; in particolare, per arbitrarietà nella scelta di $\bar{\mathbf{x}} \in X$, varrà $\forall I \ a_I(\mathbf{x}) \equiv 0$ su X . Dato che x_1, \dots, x_n era una base di trascendenza per $\mathbb{K}(X)$, questo implica che $\forall I \ a_I(\mathbf{S}) \equiv 0$, da cui concludiamo $p \equiv 0$ (come polinomio), che è assurdo. \square

Proposizione 5.3.15. Siano X, Y due varietà irriducibili tali che $Y \subsetneq X$: allora $\dim Y < \dim X$.

Dimostrazione. Ancora una volta possiamo supporre wlog che X, Y siano varietà affini e valga $Y \subsetneq X \subseteq \mathbb{A}^N$. Sia $n = \dim X$: dato che l'insieme delle classi coordinate $\{x_1, \dots, x_N\}$ contiene necessariamente una base di trascendenza di Y , vogliamo mostrare che non ammette un sottoinsieme di n elementi algebricamente indipendenti in $\mathbb{K}(Y)$.

Supponiamo quindi per assurdo che un tale sottoinsieme sia algebricamente indipendente in $\mathbb{K}(Y)$ (wlog x_1, \dots, x_n). Dalle ipotesi si osserva che $0 \neq I(Y) \subseteq \mathbb{K}[X]$ (per Nullstellensatz relativo), dunque $\exists f \in I(Y) \setminus \{0\}$. Necessariamente $\{x_1, \dots, x_n, f\}$ è algebricamente dipendente in $\mathbb{K}(X)$, quindi esiste un polinomio $P \in \mathbb{K}[T_1, \dots, T_n, Z] \setminus 0$ tale che $P(\mathbf{x}, f) = 0$ su X . Scriviamo $P(\mathbf{T}, Z) = a_0(\mathbf{T})Z^d + \dots + a_d(\mathbf{T})$: possiamo supporre wlog $a_d \neq 0$ (in caso contrario riduciamo: siamo su un dominio). La relazione $P(\mathbf{x}, f) = 0$ su X implica in particolare $a_d(\mathbf{T}) = 0$ su Y ($f \in I(Y)$, dunque $f = 0$ su Y). In particolare abbiamo una relazione di dipendenza algebrica di x_1, \dots, x_n su Y . \square

5.4 Lezione 20 (11 Dic 2015)

Definizione 5.4.1. Sia X una varietà quasi-proiettiva, sia $X = X_1 \cup \dots \cup X_k$ la sua decomposizione irriducibile minimale. Definiamo la *dimensione* di X come $\dim(X) = \max_{1 \leq i \leq k} \dim(X_i)$. Se $\forall i \ \dim(X_i) = n$, diremo che X ha *dimensione pura* n .

Osservazione 5.4.2. Sia $F = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_{n+1}]_d$, sia $X = V(F) \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$: allora F ha dimensione pura n . Infatti basta considerare la sua fattorizzazione in irriducibili $F = \prod F_i^{\alpha_i}$ e osservare che $X = V(F) = \bigcup V(F_i)$ è la sua decomposizione in irriducibili minimale. Lo stesso risultato vale nel caso affine.

Proposizione 5.4.3. Sia $X \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ (risp. \mathbb{A}^{n+1}) un chiuso con dimensione pura n . Allora X è un'ipersuperficie.

Dimostrazione. Se $X = X_1 \cup \dots \cup X_k$ è la decomposizione in irriducibili minimale, basta dimostrare il risultato per gli X_i , quindi possiamo supporre wlog che X sia irriducibile. Ci limitiamo a considerare il caso $X \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$: il caso \mathbb{A}^{n+1} è analogo.

Dato che $\dim X = n < n+1$, si avrà $X \subsetneq \mathbb{P}^{n+1}$ e quindi $I(X) \neq 0$. Possiamo dedurre che $\exists F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_{n+1}] \setminus \{0\}$ omogeneo tale che $X \subseteq V(F)$. Decomponendo in irriducibili $V(F) = \bigcup V(F_i)$, osserviamo che $X = \bigcup (X \cap V(F_i))$ è una decomposizione in chiusi. Dato che X è irriducibile, $\exists i$ tale che $X = X \cap V(F_i)$, da cui $X \subseteq V(F_i)$. Per l'osservazione precedente $\dim(V(F_i)) = n$, ma anche $\dim X = n$, sono entrambi irriducibili e quindi si deve avere $X = V(F_i)$ (vedi Proposizione 5.3.15). \square

Esempio 5.4.4. \mathbb{P}^2 e $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ sono birazionali (contengono entrambi un aperto isomorfo a \mathbb{A}^2), ma non sono isomorfi. Si considerino per esempio $D_1 = \{[1, 0]\} \times \mathbb{P}^1$ e $D_2 = \{[0, 1]\} \times \mathbb{P}^1$ in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$: sono due chiusi isomorfi a \mathbb{P}^1 , quindi curve irriducibili, inoltre $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Tuttavia, se si avesse $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \cong \mathbb{P}^2$, allora si dovrebbe avere $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ per Bézout.

Proposizione 5.4.5. Sia $X \subseteq \mathbb{P}^N$ un chiuso irriducibile con $\dim X = n$, sia $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_N]$ omogeneo tale che $V(F) \not\supseteq X$. Allora $X \cap V(F)$ ha dimensione pura $n-1$.

Dimostrazione omissa.

Corollario 5.4.6. Siano F_1, \dots, F_k polinomi omogenei in $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_N]$ con $k \leq N$, sia $X = \bigcap V(F_i)$. Allora $X \neq \emptyset$ e ogni componente irriducibile di X ha codimensione $\leq k$.

Dimostrazione. Per induzione, applicando la proposizione precedente alle singole componenti irriducibili: ad ogni passo la dimensione cala di 1 o resta uguale. \square

Corollario 5.4.7. Sia $X \subseteq \mathbb{P}^N$ un chiuso irriducibile. Allora $\dim X = n$ se e solo se valgono le seguenti:

- (a) $\forall H_1, \dots, H_n \subseteq \mathbb{P}^N$ iperpiani si ha $X \cap \bigcap H_i \neq \emptyset$;
- (b) $\exists K_1, \dots, K_{n+1} \subseteq \mathbb{P}^N$ iperpiani tali che $X \cap \bigcap K_i = \emptyset$.

Dimostrazione.

(\Rightarrow) Supponiamo $\dim X = n$. Applicando la Proposizione 5.4.5 in modo simile al corollario precedente, otteniamo che $\forall H_1, \dots, H_n \quad \dim(X \cap \bigcap H_i) \geq 0$ e quindi (a).

Sia K_1 un iperpiano che non contiene X (basta fissare un punto di X e prendere un iperpiano che non ci passa): per la Proposizione 5.4.5 $X \cap K_1 = Y_1 \cup \dots \cup Y_k$ con $\forall i \quad \dim(Y_i) = n-1$. Sia $\forall i \quad y_i \in Y_i$ e scegliamo un iperpiano K_2 che non passa per alcun y_i : in particolare $\forall i$ le componenti irriducibili di $Y_i \cap K_2$ hanno dimensione $n-2$, quindi le componenti irriducibili di $X \cap K_1 \cap K_2$ hanno dimensione $n-2$. Iterando, otteniamo che le componenti irriducibili di $X \cap \bigcap K_i$ hanno dimensione -1 , cioè sono vuote, e abbiamo (b).

(\Leftarrow) Supponiamo per assurdo che $\dim X < n$: in tal caso, in modo simile al punto precedente, possiamo prendere n iperpiani H_1, \dots, H_n tali che $X \cap \bigcap H_i = \emptyset$, che è in contraddizione con (a). D'altra parte, se $\dim X > n$, per qualunque scelta di K_1, \dots, K_{n+1} la dimensione dell'intersezione $X \cap \bigcap K_i$ non potrebbe calare sotto lo 0, in contraddizione con (b). \square

Corollario 5.4.8. Sia $X \subseteq \mathbb{A}^N$ un chiuso irriducibile di dimensione n , sia $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_N]$. Supponiamo $V(f) \not\supseteq X^5$: allora $X \cap V(f)$ ha dimensione pura $n - 1$, oppure $X \cap V(f) = \emptyset$.

Dimostrazione. Sia \overline{X} (resp. $V(F)$) la chiusura proiettiva di X (resp. $V(f)$), dove $F = H(f)$. Osserviamo che $\overline{X}, V(F)$ soddisfa le ipotesi della Proposizione 5.4.5⁶, quindi $\overline{X} \cap V(F)$ ha dimensione pura $n - 1$. Dato che $X \cap V(f) = \overline{X} \cap V(F) \cap \mathbb{A}^N$, le componenti irriducibili di $X \cap V(f)$ sono quelle di $\overline{X} \cap V(F)$ non contenute interamente nell'iperpiano all'infinito, e avranno dimensione $n - 1$. Se ce n'è almeno una, siamo nel caso in cui $X \cap V(f)$ ha dimensione pura $n - 1$, altrimenti sarà vuoto. \square

Definizione 5.4.9. Sia X uno spazio topologico Noetheriano irriducibile. Una *catena finita di chiusi irriducibili* di lunghezza n è $\emptyset \neq Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_n$, dove gli Z_i sono chiusi irriducibili. Diremo che X ha *dimensione topologica* (denotata con topdim) pari al sup delle lunghezze delle sue catene finite di chiusi irriducibili.

Esempio 5.4.10. Consideriamo $X = \mathbb{A}^1$: i suoi chiusi irriducibili sono soltanto i punti e \mathbb{A}^1 stesso, quindi $\text{topdim } \mathbb{A}^1 = 1$.

Osservazione 5.4.11. Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n$ un chiuso affine irriducibile. C'è una bigezione tra le catene di chiusi irriducibili di X e le catene di ideali primi di \mathbb{A}^n , che lascia invariata la lunghezza. In particolare $\text{topdim } X = \dim_{\text{Krull}} X$.

Teorema 5.4.12. Sia X una varietà quasi-proiettiva irriducibile: allora $\dim X = \text{topdim } X$.

Dimostrazione. Sia $n := \dim X$ e $m := \text{topdim } X$.

($n \geq m$) Sia $Z_0 \subsetneq \dots \subsetneq Z_r$ una catena di chiusi irriducibili: per la Proposizione 5.3.15 abbiamo

$$0 \leq \dim Z_0 < \dim Z_1 < \dots < \dim Z_r \leq n,$$

dunque $r \leq n$. Per arbitrarietà nella scelta della catena, passiamo al sup e deduciamo $m \leq n$.

($n \leq m$) È sufficiente esibire una catena di chiusi irriducibili di lunghezza n . Se X è un chiuso affine, possiamo applicare il Corollario 5.4.8 iterativamente per ottenere una catena di chiusi irriducibili di lunghezza n (scegliendo ad ogni passo un iperpiano opportuno e una componente irriducibile dell'intersezione).

In generale, sia $\emptyset = U \subseteq X$ un aperto affine (quindi denso in X): possiamo⁷ considerare una catena di chiusi irriducibili $Z_0 \subsetneq \dots \subsetneq Z_n$ di U e passare alla chiusura in X , ottenendo una catena di chiusi irriducibili di lunghezza n . \square

In realtà valgono fatti un po' più generali di questo, ma ci accontenteremo.

Teorema 5.4.13 (dimensione delle fibre). Siano X, Y varietà proiettive irriducibili, sia $f : X \rightarrow Y$ un morfismo surgettivo. Allora la funzione $\varphi : Y \rightarrow \mathbb{R} \mid y \mapsto \dim(f^{-1}(y))$ è semicontinua superiormente (cioè gli insiemi della forma $\{\varphi(y) \leq n\}$ sono aperti), e ha minimo $\dim X - \dim Y$. In particolare, $\exists U \subseteq Y$ aperto denso tale che $\dim(f^{-1}(y)) = \dim X - \dim Y$ su U .

Dimostrazione omessa.

Anche in questo caso valgono risultati più generali, che non considereremo.

⁵Questa ipotesi a lezione non è stata detta, ma dovrebbe essere necessaria.

⁶Qui servirebbero alcune verifiche che sono state ignorate: si dimostra che passando alla chiusura proiettiva la dimensione non cambia (ragionare su $\mathbb{K}(X)$).

⁷Non è del tutto chiaro il perché, ma pare che abbia senso passando a $\overline{U}^{\mathbb{A}^N}$ per poi restringere di nuovo a U .

Esempio 5.4.14. Sia $\widehat{\mathbb{A}^2} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{A}^2$ lo scoppimento con la solita mappa di proiezione. Abbiamo visto che $\widehat{\mathbb{A}^2} \sim_{\text{bir}} \mathbb{A}^2$, da cui $\dim(\widehat{\mathbb{A}^2}) = \dim(\mathbb{A}^2) = 2$. Osserviamo che $\forall (x, y) \in \mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$ $\varepsilon^{-1}(x, y) = \{\text{pt}\}$, dunque $\dim(\varepsilon^{-1}(x, y)) = 0$; d'altra parte $\varepsilon^{-1}(0, 0) = E$ (la curva eccezionale), per cui $\dim(\varepsilon^{-1}(0, 0)) = 1$.

Tutto funziona come ci si aspetta nonostante $\widehat{\mathbb{A}^2}$ e \mathbb{A}^2 non siano varietà proiettive: questo perché (come avevamo accennato), il risultato precedente è più generale di quello enunciato.

Possiamo osservare che $X = \widehat{\mathbb{A}^2}$ non è neanche una varietà affine: se lo fosse, in particolare le funzioni regolari separerebbero i punti⁸; tuttavia i punti della curva eccezionale non possono essere separati.

Corollario 5.4.15. Siano X, Y varietà proiettive con Y irriducibile, sia $f : X \rightarrow Y$ un morfismo surgettivo. Supponiamo che $\exists k \in \mathbb{N}$ tale che $\forall y \in Y$ $f^{-1}(y)$ è una varietà irriducibile di dimensione k . Allora X è una varietà irriducibile di dimensione $\dim Y + k$.

Dimostrazione. Sia $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$ la decomposizione in irriducibili minimale di X , siano $f_i : X_i \rightarrow Y$ le restrizioni della mappa f . Per ciascun $1 \leq i \leq r$, separiamo due casi:

1. Se f_i è surgettiva, sia U_i un aperto denso di Y tale che $\dim(f_i^{-1}(y)) = \dim X_i - \dim Y$ su U_i (esiste per il teorema precedente). In questo caso diciamo che “ i è di tipo 1”.
2. Se f_i non è surgettiva, sia $U_i := Y \setminus f(X_i)$: per il Corollario 4.4.5 la mappa f è chiusa, quindi U_i è un aperto denso di Y . In questo caso diciamo che “ i è di tipo 2”.

Sia $U = \bigcap U_i$: è un aperto denso di Y . Sia $\bar{y} \in U$ fissato: si ha $f^{-1}(\bar{y}) = \bigcup f_i^{-1}(\bar{y})$. Osserviamo che se i è di tipo 2, allora $f_i^{-1}(\bar{y}) = \emptyset$. Dato che $f^{-1}(\bar{y})$ è un chiuso irriducibile non vuoto, si deve necessariamente avere $f_{\bar{i}}^{-1}(\bar{y}) = f^{-1}(\bar{y})$ per qualche indice \bar{i} di tipo 1, e avremo $\dim X_{\bar{i}} = \dim Y + k$.

Sia ora $y \in Y$ qualunque: si ha $f_{\bar{i}}^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(y)$. Osserviamo che $f_{\bar{i}}^{-1}(y)$ è un chiuso di dimensione $\geq k$ (infatti $k = \dim X_1 - \dim Y$ è la dimensione minima delle fibre di $f_1 : X_1 \rightarrow Y$), e $f^{-1}(y)$ è un chiuso irriducibile di dimensione k : in particolare avremo $f_{\bar{i}}^{-1}(y) = f^{-1}(y)$. Per arbitrarietà di $y \in Y$, possiamo concludere $X_1 = X$. \square

Proposizione 5.4.16. Sia $d > 1$ un intero, sia $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d)$, sia $\Delta = \{[F] \mid F \text{ è singolare}\} \subseteq \mathbb{P}^N$. Allora Δ è un'ipersuperficie irriducibile.

Dimostrazione. Ci basta dimostrare che Δ è una varietà proiettiva irriducibile di dimensione $N - 1$, e applicare la Proposizione 5.4.3. Sia $I = \{(P, [F]) \mid P \text{ è singolare per } F\} \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^N$: chiaramente $p_2 : I \rightarrow \Delta$. Abbiamo già dimostrato (vedi Lezione 16) che I è una varietà proiettiva, inoltre p_2 è una mappa chiusa: in particolare Δ è un chiuso proiettivo, e sarà irriducibile se lo è I .

Sia $f = p_1|_I : I \rightarrow \mathbb{P}^n$, sia $\bar{P} = [1, 0, \dots, 0] \in \mathbb{P}^n$: ci chiediamo cosa sia $f^{-1}(\bar{P})$. Sicuramente $f^{-1}(\bar{P})$ è isomorfo alla varietà delle ipersuperfici di grado d singolari in \bar{P} : passando alla carta affine $x_0 \neq 0$, queste sono determinate dal porre nulli i coefficienti dei monomi di grado ≤ 1 , che sono $n + 1$, quindi $f^{-1}(\bar{P}) \cong \mathbb{P}^{N-n-1}$.

Sia ora $P \in \mathbb{P}^n$ generico: si osserva che $\mathbb{PGL}(n + 1)$ agisce algebricamente su \mathbb{P}^n , su \mathbb{P}^N e su $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^N$ (quest'ultima si intende come azione diagonale $g(P, [F]) := (gP, [gF])$). L'azione su \mathbb{P}^n è transitiva (sono proiettività): in particolare $\exists g : g\bar{P} = P$. Si verifica che g preserva I ⁹: in particolare si verifica che $f^{-1}(P) \cong f^{-1}(\bar{P}) \cong \mathbb{P}^{N-n-1}$.

⁸Cioè $\forall x, y \in X$ $\exists \varphi \in \mathbb{K}[X] : \varphi(x) \neq \varphi(y)$. Vedere la definizione per convincersi che vale.

⁹Nel senso che $g(P, [F]) \in I \iff (P, [F]) \in I$, se non ho capito male.

Dato che \mathbb{P}^{N-n-1} è irriducibile di dimensione $N - n - 1$, possiamo applicare il corollario precedente a $f : I \rightarrow \mathbb{P}^n$ e dedurre che I è una varietà irriducibile di dimensione $n + (N - n - 1) = N - 1$. In particolare, $\Delta = p_2(I)$ è una varietà irriducibile di dimensione $\leq N - 1$.

Resta solo da dimostrare che $\dim \Delta$ è proprio $N - 1$. Vogliamo applicare il Teorema di dimensione delle fibre al morfismo surgettivo $p_2 : I \rightarrow \Delta$: è sufficiente esibire $G \in \Delta$ tale che $\dim(p_2^{-1}(G)) = 0$, cioè che abbia un numero finito di punti singolari. Sia $G \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_{n-1}]_d$ un'ipersuperficie liscia, e considero F come G interpretata in $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$: si verifica facilmente che $[0, \dots, 0, 1]$ è l'unico punto singolare di F . \square

5.5 Lezione 21 (16 Dic 2015)

Ricordiamo che, preso $X = V(f)$ chiuso di \mathbb{A}^n ed un punto $P \in X$, abbiamo definito lo *spazio tangente a X in P* come

$$T_{X,P} = \{v \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) v_i = 0\}$$

Generalizziamo questo concetto ai chiusi di \mathbb{A}^n

Definizione 5.5.1. Dato X chiuso di \mathbb{A}^n , ed un punto $P \in X$, si definisce lo *spazio tangente a X in P* come

$$T_{X,P} = \bigcap_{f \in I(X)} T_{V(f),P}$$

Le due definizioni sopra NON coincidono nel caso in cui X sia un'ipersuperficie.

Esempio 5.5.2. $X = V(x^2)$ in \mathbb{A}^2 è singolare in ogni punto, dunque il suo spazio tangente è tutto \mathbb{A}^2 , ma $I(X) = (x)$, dunque preso $P = (0, 0)$ l'origine,

$$T_{X,P} \subseteq T_{V(x),P} = \{x = 0\} \neq \mathbb{A}^2$$

In un certo senso, lo spazio tangente non tiene conto delle molteplicità dei fattori, ma solo del luogo di zeri. Infatti, come vedremo con la Proposizione 5.5.3, le due definizioni coincidono nel caso f sia square-free.

Proposizione 5.5.3. Dato X chiuso di \mathbb{A}^n , ed un punto $P \in X$, siano g_1, \dots, g_n generatori di $I(X)$. Allora

$$T_{X,P} = \{v \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(P) v_i = 0 \quad \forall j\}$$

Dimostrazione. Chiamiamo S l'insieme

$$S = \{v \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(P) v_i = 0 \quad \forall j\}$$

Avremo che

$$S = \bigcap_j T_{V(g_j),P} \supseteq T_{X,P}$$

Dato $f \in I(X)$ questo è una combinazione dei generatori $f = \sum_j h_j g_j$, dunque preso un v in S ,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) v_i = g_j(P) \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(P) v_i + h_j(P) \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(P) v_i = 0$$

$$\implies S \subseteq T_{V(f),P} \quad \forall f \in I(X) \implies S \subseteq T_{X,P}$$

□

Fissato X come sopra, studiamo ora la mappa $\psi : X \rightarrow \mathbb{N}$ definita da

$$P \mapsto \dim T_{X,P}$$

Proposizione 5.5.4. La mappa

$$P \mapsto \dim T_{X,P}$$

é semicontinua superiore

Dimostrazione. Ricordiamo che una funzione é *semicontinua superiore* se la controimmagine delle semirette chiuse $[r, +\infty]$ é chiusa.

Notiamo che $T_{X,P}$ é intersezione di iperpiani ortogonali ai gradienti delle g_i , dunque la sua codimensione é il massimo numero di gradienti linearmente indipendenti. In altre parole, chiamata A la matrice che ha per righe i gradienti dei g_i , allora

$$\dim T_{X,P} = n - rk(A)$$

da ciò possiamo descrivere la controimmagine di $[r, +\infty]$ come

$$\dim T_{X,P} \geq r \iff n - r \geq rk(A)$$

ossia tramite le condizione che ogni minore di stazza maggiore di $n - r$ sia zero¹⁰, che é una condizione chiusa. □

Corollario 5.5.5. Sia $m = \min_{P \in X} \psi(P)$. Allora $U = \{P \in X | \psi(P) = m\}$ é aperto.

Dimostrazione.

$$U = \psi^{-1}(-\infty, m] = (\psi^{-1}[m + 1, +\infty))^C$$

□

Definizione 5.5.6. Dato X chiuso di \mathbb{A}^n , con $m = \min_{P \in X} \psi(P)$, allora P é un punto liscio se $\psi(P) = m$, e si indicano con

$$X_{sm} = \{P \in X | \psi(P) = m\}$$

Nel caso di un'ipersuperficie $X = V(f)$, con f square-free non costante, allora chiaramente $rk(A)$ può essere solo 1 o 0 in quanto A ha una sola riga, ed é zero solo quando il gradiente é nullo, ossia quando la curva é singolare nel punto. Se escludiamo il caso in cui tutti i punti sono singolari, otteniamo che le nostre definizioni di punti lisci coincidono, e $\min_{P \in X} \psi(P) = n - 1$. Però questo caso é impossibile da ottenere per il seguente risultato

Proposizione 5.5.7. Se in un'ipersuperficie affine $X = V(f)$ tutti i punti sono singolari, allora f non é square-free oppure é una costante.

Dimostrazione. Poniamo che f sia square-free. Abbiamo che, per Nullstellensatz

$$V(f) \subseteq V\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \implies f \mid \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \forall i$$

¹⁰Dove con "minore" intendiamo il determinante della sottomatrice quadrata

ma le derivate parziali hanno tutte grado minore di f in almeno una coordinata, dunque sono identicamente zero. Se la caratteristica del campo \mathbb{K} è zero, allora f è una costante. Se la caratteristica è positiva, e f non è una costante, allora

$$f(x) = g(x_1^p, \dots, x_n^p) = \sum a_I x^{pI} = \sum b_I^p x^{pI} = \left(\sum b_I x^I \right)^p$$

e pertanto non è square-free. \square

Definizione 5.5.8. Dato X chiuso di \mathbb{A}^n , ed un punto $P \in X$, una *derivazione di $\mathbb{K}[X]$ in P* è una funzione \mathbb{K} -lineare $\delta : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}$ per cui vale la *regola di Leibniz*

$$\delta(fg) = \delta(f)g(P) + f(P)\delta(g)$$

Indichiamo tali derivazioni con $D_{X,P}$

Osservazione 5.5.9. $D_{X,P}$ è un \mathbb{K} -spazio vettoriale. Inoltre

$$\delta(1) = 2\delta(1) \implies \delta(1) = 0 \implies \delta(\mathbb{K}) = 0 \quad \forall \delta \in D_{X,P}$$

Osservazione 5.5.10. Se $X = \mathbb{A}^n$, allora le derivazioni parziali nel punto $\frac{\partial}{\partial x_i}|_P$ sono effettivamente delle derivazioni.

Teorema 5.5.11.

$$T_{\mathbb{A}^n,P} \cong D_{\mathbb{A}^n,P}$$

Dimostrazione. Prendiamo la funzione

$$\varphi : T_{\mathbb{A}^n,P} \rightarrow D_{\mathbb{A}^n,P} \quad \Big| \quad v \mapsto \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i} |_P$$

Questo è un omomorfismo di \mathbb{K} -spazi vettoriali, dove le immagini sono derivazioni poiché combinazioni lineari di derivate parziali nel punto. È iniettivo poiché

$$\varphi(v) = 0 \implies \varphi(v)(x_i) = v_i = 0 \quad \forall i \implies v = 0$$

Se chiamiamo $M = (\{x_i - a_i\}_i)$, dove $P = (a_i)_i$, allora una qualsiasi derivazione in P soddisfa $\delta(M^2) = 0$, in quanto

$$\delta((x_i - a_i)(x_j - a_j)) = \delta((x_i - a_i))(a_j - a_j) + (a_i - a_i)\delta((x_j - a_j)) = 0$$

Se chiamiamo $w_i = \delta(x_i - a_i)$, allora

$$\begin{aligned} f \in \mathbb{K}[x] &\implies f(x) = f(P) + \sum_i (x_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) + z \quad z \in M^2 \\ &\implies \delta(f) = \sum_i w_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = \varphi(w)(f) \end{aligned}$$

e dato che¹¹ $T_{\mathbb{A}^n,P} = T_{V(0),P} = \mathbb{K}^n$, allora φ è anche suriettiva. \square

¹¹sotto l'ipotesi di campo algebricamente chiuso - è bene ricordarlo qualche volta

Prendiamo ora un chiuso affine X e δ una derivazione di $\mathbb{K}[X]$ in P . La mappa suriettiva da $\mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$ a $\mathbb{K}[X]$ produce una derivazione $\tilde{\delta}$ di $\mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$ in P , dunque del tipo

$$\tilde{\delta} = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i} |_P$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\mathbb{A}^n] & & \\ \downarrow & \searrow \tilde{\delta} & \\ \mathbb{K}[X] & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{K} \end{array}$$

Da questo ricaviamo che

Teorema 5.5.12.

$$T_{X,P} \cong D_{X,P}$$

Dimostrazione. Dal diagramma sopra abbiamo che $D_{X,P}$ sono le derivazioni di $\mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$ che si annullano su $I(X)$, il che é equivalente ad imporre che δ si annulli su g_i generatori di $I(X)$, in quanto

$$f \in I(X) \implies f = \sum_i h_i g_i \implies \delta(f) = \sum_i \delta(h_i) g_i(P) + \sum_i h_i(P) \delta(g_i) = 0$$

dunque avremo

$$\begin{aligned} D_{X,P} &\cong \{\delta \in D_{\mathbb{A}^n,P} \mid \delta(I(X)) = 0\} = \{v \in T_{\mathbb{A}^n,P} \mid \varphi(v)(g_j) = 0 \ \forall j\} = \\ &= \{v \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(P) v_i = 0 \ \forall j\} = T_{X,P} \end{aligned}$$

□

Teorema 5.5.13. Dato $P \in X$ chiuso affine, e $M = I(\{P\})$ l'ideale massimale relativo al punto P in $\mathbb{K}[X]$, allora

$$T_{X,P} \cong \left(\frac{M}{M^2} \right)^*$$

Dimostrazione. Usiamo che $T_{X,P} \cong D_{X,P}$. Abbiamo già visto che le derivazioni in P si annullano su M^2 , e che sono univocamente determinate dalle immagini su $(x_i - a_i)$. Dato che M/M^2 é uno spazio vettoriale generato dalle classi di $x_i - a_i$ su $K[X]$, allora possiamo restringere le derivazioni su questo spazio tramite h , che le manda in funzioni \mathbb{K} -lineari, ossia nel duale di M/M^2 .

$$h : D_{X,P} \rightarrow \left(\frac{M}{M^2} \right)^*$$

Questa é iniettiva poiché

$$\begin{aligned} h(\delta)[x_i - a_i] = 0 \ \forall i &\implies \delta[x_i - a_i] = 0 \ \forall i \\ \implies \delta[f(x)] &= \delta \left[f(P) + \sum_i (x_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) + z \right] = 0 \ \forall f(x) \end{aligned}$$

É anche suriettiva perché possiamo scrivere la mappa inversa

$$h^{-1} : \left(\frac{M}{M^2} \right)^* \rightarrow D_{X,P} \mid \phi \mapsto \sum_i \phi[x_i - a_i] \frac{\partial}{\partial x_i} |_P$$

dove l'immagine é una derivazione su X poiché preso $f \in I(X)$, avremo

$$\begin{aligned} h^{-1}(\phi)(f(x)) &= \sum_i \phi[x_i - a_i] \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = \\ &= \phi \left[f(P) + \sum_i (x_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) + z \right] = \phi[f(x)] = \phi(0) = 0 \end{aligned}$$

□

Per semplicitá, d'ora in poi poniamo X irriducibile.

Definizione 5.5.14. Preso $P \in X$, allora indichiamo le funzionali razionali di X definite su P come

$$\mathcal{O}_{X,P} = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f(x), g(x) \in \mathbb{K}[X] \quad g(P) \neq 0 \right\}$$

Osservazione 5.5.15. $\mathcal{O}_{X,P}$ é locale con ideale massimale

$$\mathcal{M} = \{h(x) \in \mathcal{O}_{X,P} \mid h(P) = 0\}$$

Infatti tutti gli altri elementi sono invertibili. In realtà vale anche che

$$M = \{h(x) \in \mathbb{K}[X] \mid h(P) = 0\} \implies \mathcal{O}_{X,P} = \mathbb{K}[X]_M, \quad \mathcal{M} = M\mathcal{O}_{X,P}$$

Proposizione 5.5.16. Con le notazioni sopra,

$$\frac{M}{M^2} \cong \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}^2}$$

Dimostrazione. ovviamente, avremo $M \subseteq \mathcal{M}$, dunque possiamo definire la mappa tra spazi vettoriali

$$\psi : M \rightarrow \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}^2}$$

il suo kernel é

$$\ker \psi = \{f(x) \in M \mid f(x) \in \mathcal{M}^2\} = \mathcal{M}^2 \cap \mathbb{K}[X] = M^2$$

dove l'ultima eguaglianza é vera poiché

$$\begin{aligned} p(x) \in \mathcal{M}^2 \cap \mathbb{K}[X] &\implies p(x)q(x) = \sum_i a_i(x)b_i(x) \quad a_i(x), b_i(x) \in M \quad q(x) \notin M \\ &\implies p(x) = \frac{p(x)q(x) - p(x)[q(x) - q(P)]}{q(P)} \in M^2 \end{aligned}$$

preso ora un elemento $f/g \in \mathcal{M}/\mathcal{M}^2$, avremo

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \left[\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{(g(x) - g(P))f(x)}{g(P)g(x)} \right] = [f(x)]$$

dove $(g(x) - g(P))f(x) \in \mathcal{M}^2$. Quindi ψ é suriettiva, e questo dimostra la tesi. □

Estendendo tutte le definizioni a varietà X quasi-proiettive, e definendo

$$T_{X,P} \cong \left(\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}^2} \right)^*$$

allora scopriamo che

Proposizione 5.5.17.

1. Se $P \in U \subseteq X$ è un aperto affine, allora $T_{U,P} \cong T_{X,P}$
2. $\psi : P \mapsto \dim T_{X,P}$ è semicontinua superiore

Dunque possiamo estendere la definizione di punti lisci come

$$X_{sm} = \{P \in X \mid \psi(P) = \min_{Q \in X} \psi(Q)\}$$

e risulterà come prima che X_{sm} è aperto. Se però X non è irriducibile (come abbiamo supposto finora) c'è bisogno di qualcosa di più preciso.

Prese X, Y varietà q.p., e $f : X \rightarrow Y$ un morfismo, questo induce il pullback $f^* : \mathbb{K}(Y) \rightarrow \mathbb{K}(X)$. Se $P \in X$ e $Q = f(P)$, allora f^* ristretta a $\mathcal{M}_Q \subseteq \mathbb{K}(Y)$ ha immagine in $\mathcal{M}_P \subseteq \mathbb{K}(X)$.

Definizione 5.5.18. passando ai quozienti, il pullback induce una mappa che chiamiamo *codifferenziale*

$$(df)_P^t : \frac{\mathcal{M}_Q}{\mathcal{M}_Q^2} \rightarrow \frac{\mathcal{M}_P}{\mathcal{M}_P^2}$$

Questa mappa gode delle proprietà functoriali, quali

- $(d(Id))_P^t = Id$
- Data $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, e $P \in X$, $Q = f(P)$, $R = g(Q)$, allora

$$(d(g \circ f))_P^t = (df)_P^t \circ (dg)_Q^t$$

- Se f è un isomorfismo, allora lo è anche $(df)_P^t$

Teorema 5.5.19. Se X è una varietà q.p. irriducibile, allora

$$\dim T_{X,P} = \dim X \iff P \in X_{sm}$$

Dimostrazione. È equivalente a chiedere che

$$\dim X = \min_{P \in X} \psi(P)$$

Se $n = \dim X$, allora esiste un aperto U di X isomorfo ad un aperto di un'ipersuperficie affine in \mathbb{A}^{n+1} , ed in particolare, dato che gli spazi tangenti si corrispondono, la dimensione minima di questi sarà n su U . Dato che X_{sm} è aperto e X irriducibile, allora U contiene almeno un punto liscio, il che conclude. \square

5.6 Lezione 22 (17 Dic 2015)

Esercizio 5.6.1. Provare che tutti i punti di \mathbb{A}^n sono lisci

Fatto questo, è facile vedere che anche tutti i punti di \mathbb{P}^n sono lisci, in quanto è una proprietà locale, e dunque basta testarlo sulle carte. Allo stesso modo si trattano $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ e $\text{Gr}(k, n)$. Tutti questi sono esempi di

Definizione 5.6.2. Se esiste G gruppo algebrico che agisce transitivamente su X varietà, allora si dice che X è uno *spazio omogeneo*.

In un tale spazio, abbiamo che ogni $g \in G$ elemento del gruppo algebrico è un isomorfismo dello spazio, ed essendo un isomorfismo tra gli spazi tangenti, manda punti lisci in punti lisci.

Fatto 5.6.3. Per ogni coppia di punti lisci (P, Q) in X spazio omogeneo, esiste $g \in G$ tale che $g(P) = Q$ ¹²

Mettiamoci a caratteristica zero. Se $X \subseteq \mathbb{P}^n$ è un chiuso, una maniera per testare se i punti sono lisci è passare agli affini e calcolare $\dim T_{X,P}$ su di essi. In realtà questo si può fare direttamente sul proiettivo, poiché, se per esempio $Y = X \cap U_0$, allora

$$T_{Y,P} = \{v \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)v_i = 0 \quad \forall f \in I(Y)\}$$

$$T_{X,P} = \{v \in P^n \mid \sum_{i=0}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(P)v_i = 0 \quad \forall F \in I(X)_{\mathbb{P}^n}\}$$

dove $I(X)_{\mathbb{P}^n}$ è il generato dei polinomi omogeneizzati di $I(Y)$, dunque i due spazi vettoriali hanno la stessa dimensione.

Cambiamo discorso, e incominciamo a studiare il numero di rette distinte dentro un'ipersuperficie X di grado d in \mathbb{P}^3 , ponendoci a caratteristica zero.

- se $d = 1$, l'ipersuperficie è un iperpiano, e contiene infinite(al quadrato) rette distinte.
- se $d = 2$ abbiamo una quadrica, che si può rappresentare come una matrice 4 per 4.
 - se X ha rango massimo, allora si può ridurre nella forma $x_0x_3 - x_1x_2$, che sappiamo essere isomorfo, tramite la mappa di Segre, a $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, e contiene due famiglie infinite di rette
 - Se X ha rango 3, allora si riduce nella forma $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$. Preso un punto P su $x_3 = 0$, la quadrica contiene la retta che passa per P e il punto $[0, 0, 0, 1]$, dunque contiene infinite rette.
 - Se X ha rango 2, si riduce a x_0x_1 , che contiene tutti i punti della forma $[0, a, b, c]$, dunque un intero \mathbb{P}^2 con infinite rette
 - Se X ha rango 1, si riduce a x_0^2 che coincide con l'iperpiano $x_0 = 0$, e si ritorna al caso $d = 1$

Se $d \geq 3$, la questione diventa più interessante. Prendiamo

$$\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]_d) \quad N = \binom{d+3}{3} - 1$$

e consideriamo

$$I = \{(l, [F]) \mid l \subseteq V(F)\} \subseteq \text{Gr}(2, 4) \times \mathbb{P}^N$$

ossia le coppie retta-ipersuperficie con la retta inclusa nell'ipersuperficie. La sua proiezione sul proiettivo dà le ipersuperfici di grado d che contengono almeno una retta.

Proposizione 5.6.4. I è chiuso

¹²non so se sia vero..

Dimostrazione. sia $U = \{p_{01} \neq 0\} \subseteq \text{Gr}(2, 4)$ una carta, e mostriamo che $I \cap (U \times \mathbb{P}^N)$ è chiuso. presa $l \in \text{Gr}(2, 4)$ retta generata da $v_1, v_2 \in \mathbb{P}^3$, allora

$$l \subseteq V(F) \iff G(s, t) = F(sv_1 + tv_2) = 0 \quad \forall s, t \in \mathbb{K}$$

Sappiamo che $G(s, t)$ è omogeneo in s, t di grado d , ma deve essere identicamente nulla, dunque tutti i coefficienti devono essere zero, e questi sono polinomiali nelle variabili $v_1 = [1, 0, a, b]$, $v_2 = [0, 1, c, d]$ e nei coefficienti di F , dunque impongono condizioni chiuse. \square

Corollario 5.6.5. $p_2 : I \rightarrow \mathbb{P}^N$ è chiusa

Studiamo l'altra proiezione $p_1 : I \rightarrow \text{Gr}(2, 4)$.
Se $l_0 = \{x_2 = x_3 = 0\}$ allora

$$p_1^{-1}(l_0) \cong \{[F] \in \mathbb{P}^N \mid l_0 \subseteq V(F)\} = \{[F] \in \mathbb{P}^N \mid F(x_0, x_1, 0, 0) \equiv 0\}$$

che è definito dall'annullarsi dei coefficienti del tipo $x_0^k x_1^{d-k}$ ossia da $d+1$ condizioni lineari indipendenti, pertanto $p_1^{-1}(l_0) \cong \mathbb{P}^{N-d-1}$.

Il gruppo $\mathbb{P}GL(4)$ agisce su $\text{Gr}(2, 4) \times \mathbb{P}^N$, o meglio, agisce sulle variabili x_0, \dots, x_3 , preservando I , e le proiezioni commutano con l'azione. Dato che $p_1 \circ g = g$, allora l'azione porta fibre in fibre, ed in particolare, dato che è transitiva su $\text{Gr}(2, 4)$, allora per tutte le rette l si ha $p_1^{-1}(l) \cong \mathbb{P}^{N-d-1}$. Abbiamo concluso che tutte le fibre sono irriducibili, hanno la stessa dimensione, e anche $\text{Gr}(2, 4)$ è irriducibile, pertanto anche I è irriducibile di dimensione

$$\dim \text{Gr}(2, 4) + N - d - 1 = N - d + 3$$

e di conseguenza, anche $p_2(I)$ è irriducibile, di dimensione $\leq N - d + 3$. Se $d \geq 4$, allora $\dim p_2(I) < N$, e pertanto è un chiuso proprio, dunque c'è un aperto denso di polinomi di grado $d \geq 4$ che non contiene rette.

Poniamoci dunque nel caso $d = 3$, e dimostriamo che

Proposizione 5.6.6. $p_2|_I$ è suriettiva

Dimostrazione. Sappiamo dal teorema della fibra¹³ che esiste $V \subseteq p_2(I)$ aperto tale che tutte le fibre su di esso hanno la stessa dimensione, pari a $N - \dim p_2(I)$, e questa è la minima dimensione di una fibra. Se troviamo dunque $[F] \in p_2(I)$ con fibra di dimensione zero, allora $N = \dim p_2(I) = \dim \mathbb{P}^N$, e pertanto p_2 è suriettiva.

La cubica in questione è $F = x_1 x_2 x_3 - x_0^3$, infatti nella carta affine $x_0 = 1$ diviene $f = x_1 x_2 x_3 - 1$, e intersecato con un qualsiasi piano $x_1 - ax_2 - bx_3$ si ottiene la cubica piana $(ax_2 + bx_3)x_2 x_3 - 1$ irriducibile per ogni scelta di a, b , e dunque non contiene nessuna retta affine. Nell'iperpiano $x_0 = 0$ invece contiene esattamente le 3 rette $\{x_0 = x_i = 0\} \quad i = 1, 2, 3$. \square

Ciò ci dice che ogni cubica in \mathbb{P}^3 contiene almeno una retta. In realtà in seguito vedremo un teorema che ci dirà esattamente il numero di rette contenuto in una cubica liscia. Prima di arrivarci, abbiamo bisogno ancora di un paio di lemmi

Proposizione 5.6.7. Date tre rette concorrenti in una cubica liscia di \mathbb{P}^3 , allora queste sono coplanari.

Dimostrazione. Dato che le tre rette sono contenute nella cubica, allora appartengono tutte al tangente alla cubica nel punto di concorrenza, e questo è un iperpiano poiché la cubica è liscia. \square

¹³perché I è una varietà proiettiva? perché è chiuso in $\text{Gr}(2, 4) \times \mathbb{P}^N$?

Proposizione 5.6.8. Dato H un iperpiano, e F l'equazione di una cubica liscia di \mathbb{P}^3 , allora $F|_H$ non contiene una retta doppia.

Dimostrazione. Poniamo con un cambio di coordinate che $H = \{t = 0\}$, dove stiamo prendendo le coordinate omogenee x, y, z, t . Avremo che $F|_H = F(x, y, z, 0)$ sarà una cubica piana, a meno che $t|F$, ma in questo caso F non sarebbe irriducibile né liscia. Se supponiamo per assurdo che contenga una retta doppia, allora, a meno di cambio di coordinate, possiamo imporre la retta $\{x = 0\}$, e dunque $F|_H = x^2 L(x, y, z)$ dove L è lineare. Espandendo F otteniamo

$$F = x^2 L(x, y, z) + t Q_2(x, y, z) + t^2(\dots)$$

dove Q_2 è zero o una quadrica. Avremo in ogni caso che $Q_2|_H \cap \{x = 0\}|_H$ è non vuoto per Bezout, dunque esiste $P = [0, a, b, 0]$ su cui Q_2 si annulla. Avremo

$$\partial_x F(P) = \partial_y F(P) = \partial_z F(P) = 0 \quad \partial_t F(P) = Q_2(P) = 0$$

dunque P è un punto non liscio di F , assurdo. □

Proposizione 5.6.9. Presa X una cubica liscia di \mathbb{P}^3 , e l_0 una retta contenuta in X , allora esistono esattamente cinque iperpiani H_i che passano per l_0 e per cui $F|_{H_i}$ sia l'unione di tre rette distinte

Dimostrazione. Rimandata alla lezione dopo □

Con questi risultati, siamo pronti a dimostrare

Teorema 5.6.10 (delle 27 rette). Una cubica liscia di \mathbb{P}^3 contiene esattamente 27 rette, e sono tutte distinte

Dimostrazione. Chiamiamo F l'equazione della cubica. Dalla proposizione 5.6.8 sappiamo che non può contenere rette doppie. Inoltre, data l_0 retta appartenente alla cubica, che esiste per proposizione 5.6.6, e un qualsiasi iperpiano H passante per essa, avremo che $F|_H$ è una cubica piana contenente una retta, dunque può essere solo

- 3 rette non concorrenti
- 3 rette concorrenti
- una retta e una conica irriducibile

Dalla proposizione 5.6.9, sappiamo che i primi due casi si realizzano esattamente con 5 iperpiani, dunque l_0 interseca esattamente altre 10 rette distinte contenute nella cubica. Fissato H uno dei 5 iperpiani, con $F|_H = l_0 + l_1 + l_2$, e r una qualsiasi retta contenuta nella conica diversa da l_0, l_1, l_2 , abbiamo che

$$r \cap H \neq \emptyset \quad r \not\subseteq H \implies r \cap H = \{P\} \in F|_H = l_0 + l_1 + l_2$$

dunque r interseca una delle tre rette l_0, l_1, l_2 , e ne interseca solo una, poiché altrimenti, per proposizione 5.6.7, r sarebbe complanare alle l_i , ossia sarebbe contenuta in H .

Dato che ognuna delle l_i interseca 8 rette distinte tra loro e diverse dalle altre due, allora in tutto ci sono $3 + 8 \cdot 3 = 27$ rette contenute nella cubica. □

5.7 Lezione 23 (18 Dic 2015)

Dimostriamo la proposizione della volta scorsa

Proposizione 5.7.1. Presa X una cubica liscia di \mathbb{P}^3 , e l_0 una retta contenuta in X , allora esistono esattamente cinque iperpiani H_i che passano per l_0 e per cui $F|_{H_i}$ sia l'unione di tre rette distinte

Dimostrazione. Fissiamo $l_0 = \{x_2 = x_3 = 0\}$, così, presa F l'equazione della cubica, ogni suo monomio deve contenere x_2 o x_3 , ossia possiamo riscriverla come

$$F = A(x_2, x_3)x_0^2 + B(x_2, x_3)x_1^2 + 2C(x_2, x_3)x_0x_1 + \\ + 2D(x_2, x_3)x_0 + 2E(x_2, x_3)x_1 + G(x_2, x_3)$$

Un iperpiano passante per l_0 ha come equazione $H = ax_2 - bx_3$, con $[a, b] \in \mathbb{P}^1$, e la funzione $F(x_0, x_1, b, a)$ è esattamente uguale a $F|_{H \setminus l_0}$, ed è una conica irriducibile o due rette distinte. Se identifichiamo $H \setminus l_0$ con \mathbb{A}^2 , allora otteniamo una conica affine, e vogliamo trovare a, b per cui la conica è riducibile, ma questo è vero se e solo se la matrice della conica è singolare, ossia

$$\det \begin{pmatrix} A(x_2, x_3) & C(x_2, x_3) & D(x_2, x_3) \\ C(x_2, x_3) & B(x_2, x_3) & E(x_2, x_3) \\ D(x_2, x_3) & E(x_2, x_3) & G(x_2, x_3) \end{pmatrix} = R(x_2, x_3) = 0$$

R è zero oppure un polinomio omogeneo di grado 5, ma se fosse zero, allora F sarebbe riducibile, assurdo. Dunque esistono cinque radici, ma possono essere ripetute. Riparametrizziamo in modo che $[1, 0]$ sia una radice di R , ossia $x_3 | R$. Ricordando che una conica di rango 1 è una retta doppia, e che una cubica liscia non contiene rette doppie, ricaviamo che la conica in $[1, 0]$ ha rango 2, dunque si può mettere in forma $x_0^2 + x_1^2$, ossia in modo che

$$\begin{pmatrix} A(1, 0) & C(1, 0) & D(1, 0) \\ C(1, 0) & B(1, 0) & E(1, 0) \\ D(1, 0) & E(1, 0) & G(1, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questo implica che $P = [0, 0, 1, 0] \in X$ e X è liscia in P se e solo se $\nabla G(1, 0) \neq 0$. Dato che inoltre $G(1, 0) = 0$ otteniamo che $G = x_2^2 x_3 + x_3^2(\dots)$, e unendo con le altre relazioni abbiamo

$$x_3 \nmid A, B \quad x_3 | C, D, E, G \quad x_3^2 \nmid G$$

$$R = ABG + 2CDE - BE^2 - AD^2 - GC^2 \equiv ABG \not\equiv 0 \pmod{x_3^2}$$

dunque $[1, 0]$ è una radice semplice di R , e di conseguenza tutte le radici sono semplici.

Con questo si conclude che esistono 5 iperpiani distinti che passano per l_0 sui quali F si scompone in 3 rette. \square

Corollario 5.7.2. Data X cubica liscia di \mathbb{P}^3 , esistono r, s rette sghembe che appartengono a X

Date due rette sghembe r, s di \mathbb{P}^3 , possiamo definire una proiezione di \mathbb{P}^3 su s di centro r

$$\pi_r : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow s$$

definita su $\mathbb{P}^3 - r$. Infatti, preso un punto $P \in \mathbb{P}^3 - (r + s)$, esiste un unico iperpiano H che contenga P e s , e r interseca H in esattamente un punto Q . L'immagine della proiezione sarà dunque $L(Q, P) \cap s$. Se invece $P \in s$, allora l'immagine è se stesso.

Con un cambio di coordinate, possiamo porre $r = \{x_0 = x_1 = 0\}$ e $s = \{x_2 = x_3 = 0\}$, così se $P = [a, b, c, d]$, allora $Q = [0, 0, c, d]$ e $\pi_r(P) = [a, b, 0, 0]$. Questa proiezione non si può estendere ai punti di r , ma se prendiamo X una cubica liscia che contiene r , ossia del tipo

$$F = x_0 A(x) + x_1 B(x)$$

con A, B coniche, allora definiamo la mappa

$$f : X \rightarrow s : [x, y, z, t] \mapsto \begin{cases} [x, y, 0, 0] & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ [B(x, y, z, t), -A(x, y, z, t), 0, 0] & \text{se } (A, B) \neq (0, 0) \end{cases}$$

Notiamo che $x = y = A = B = 0$ vorrebbe dire che X non è liscia, dunque le due carte ricoprono tutto X e si incollano bene sull'intersezione. Inoltre, sulla prima carta f coincide con la proiezione, dunque π_r si estende a r su tutte le cubiche lisce che la contengono. Prendiamo ora X cubica liscia che contiene sia r che s , e chiamiamo ora $g : X \rightarrow r$ il morfismo indotto dalla proiezione di centro s su r . Inoltre definiamo

$$\psi : X \rightarrow r \times s \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 : P \mapsto (f(P), g(P))$$

Questo è un morfismo birazionale che contrae tutte le rette che intersecano r ed s . Cerchiamone l'inversa.

Dato $P \in X$ e $\psi(P) = (A, B)$, allora

$$P, A, B \in L(A, B) \cap X = \psi^{-1}(A, B)$$

dunque la fibra di un punto può essere solo una retta o tre punti. Le rette contenute in X sono finite, dunque possiamo definire l'inversa di ψ come

$$\psi^{-1} : r \times s \dashrightarrow X : (A, B) \mapsto P$$

Esercizio 5.7.3. ψ^{-1} è razionale

Definizione 5.7.4. Una varietà irriducibile X di dimensione n è *razionale* se $X \sim_{bir} \mathbb{P}^n$ ($\sim_{bir} \mathbb{A}^n$)

Osservazione 5.7.5. È equivalente a dire che $\mathbb{K}(X) \cong \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$

Definizione 5.7.6. Una varietà irriducibile X di dimensione n è *unirazionale* se esiste una mappa razionale dominante $\mathbb{P}^n \dashrightarrow X$

Osservazione 5.7.7. È equivalente a dire che $\mathbb{K}(X) \hookrightarrow \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$

Ovviamente una varietà razionale è anche unirazionale, ma la maggior parte delle varietà non sono unirazionali, infatti un'ipersuperficie liscia in \mathbb{P}^n di grado $d > n$ non è unirazionale.

Teorema 5.7.8 (Luroth). Dati \mathbb{K} e \mathbb{F} campi per cui $\mathbb{K} \subsetneq \mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}(t)$, allora esiste un elemento $u \in \mathbb{K}(t) - \mathbb{K}$ per cui $\mathbb{F} = \mathbb{K}(u) \cong \mathbb{K}(t)$

Corollario 5.7.9. Una curva unirazionale è razionale

Questo vale in dimensione 1, e se il campo è algebricamente chiuso di caratteristica zero, vale anche in dimensione 2. In dimensioni più alte, invece, non è vero.

Fatto 5.7.10 (Fano). Ogni una cubica liscia in \mathbb{P}^4 è unirazionale, ma non è razionale

Se X é una cubica liscia in \mathbb{A}^4 , con coordinate x, y, z, t , poniamo $0 \in X$, e che $T_{X,0} = \{t = 0\}$, cosí, chiamata f l'equazione della cubica,

$$f = t + Q_2(x, y, z, t) + C_3(x, y, z, t)$$

Q_2 e C_3 sono omogenee, dunque si possono vedere in \mathbb{P}^3 , e intersecando con $\{t = 0\}$, otteniamo che si intersecano in almeno un punto per Bezout. Chiamiamolo $P = (a, b, c, 0)$, e sappiamo che f si annulla sulla retta λP , $\lambda \in \mathbb{K}$. Bezout ci dice che in generale ci sono 6 di tali punti P distinti, dunque in generale X contiene 6 rette distinte passanti per P .

Nota: questo é un abbozzo della dimostrazione dell'unirazionalit . Sistemarla e provare la non razionalit  é un delirio.

Fatto 5.7.11 (Problema Aperto). Le cubiche generiche lisce di \mathbb{P}^5 sono unirazionali. Quali di queste sono razionali?