ELEMENTI DI Geometria Algebrica

MARCO FRANCIOSI

Libri di riferimento:

M. Reid "Undergraduate Algebraic Geometry"

I.R. Shafarevich "Basic Algebraic Geometry"

Fortuna - Frigerio - Pardini
"Geometria proiettiva, problemi risolti e richiami di Teoria"

Modalità d'esame: prova orale

Oggetto di studio:

VARIETA' Algebriche

$\mathbb{K}$ campo

$I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$

IDEALE

Varietà AFFINI

$$I \mapsto V(I) = \{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n : f(x) = 0 \ \forall f \in I \}$$

$$V(I) \subseteq \mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$$

varietà affine

$I \subset \mathbb{K}[x_0, \_\_, x_n]$ VARIETA' PROIETTIVE

IDEALE OMOGENEO

(vedremo la def.
"I generato da pol. omogenei")

$$\downarrow$$

$$V(I) = \{X = (x_0 : \_\_ : x_n) \in \mathbb{P}^n : f(X) = 0 \ \forall f \in I\}$$

$$V(I) \subseteq \mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$$

vedremo:

proprietà varietà algebriche
locali e globali
topologia

morfismi & mappe razionali

Esempi

Interludio: curve piane

DOMANDA:

Geometria proiettiva?

POLINOMI

$\mathbb{K}$ campo

$\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] = \{$ polinomi a coeff. in $\mathbb{K}$ nelle variabili $x_1, \ldots, x_n \}$

Teorema BASE di Hilbert

A Noetheriano $\Rightarrow A[x]$ Noetheriano

$\forall$ catena ascendente di ideali
$I_1 \subset \ldots \subset I_n \subset \ldots$
$\exists N : \quad I_N = I_{N+1} = \ldots$

$\Leftrightarrow \forall I$ ideale $\exists f_1, \ldots, f_k$ t.c.
$I = (f_1, \ldots, f_k)$

COR. $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ è Noetheriano

LEMMA di Gauss

Pb. fattorizzazione di polinomi

PROP. A dominio a fattorizzazione UNICA (notazione: UFD)

$\Rightarrow$ $A[x]$ UFD

COR. $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ è UFD

$$\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n) \overset{def.}{=} \mathrm{Quot}\left(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]\right)$$

campo dei quozienti

<u>DEF.</u> A UFD

$$p(x) = \sum a_i x^i \quad \in A[x]$$

primitivo se $\quad$ M.C.D. $(a_i) = 1$

Lemma di Gauss:

$p \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y]$ irriducibile

$$\Updownarrow$$

p irriducibile in $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)[y]$

p primitivo in $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n][y]$

Esempio:

$$p(x,y) = xy + y - x^5$$

- $\deg_y p = 1 \Rightarrow p$ irriducibile in $\mathbb{K}(x)[y]$

- p primitivo in $\mathbb{K}[x][y]$

$$p = (x+1)\,y \;\; - x^5$$

$\Rightarrow p$ irriducibile in $\mathbb{K}[x,y]$

LA CORRISPONDENZA V

$\mathbb{K}$ campo

$R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$

$\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ spazio affine con coordinate $x_1, \dots, x_n$

$$R \ni f \longmapsto V(f) = \{x \in \mathbb{A}^n : f(x) = 0\}$$

In generale

$I \subset R$ ideale

$$I \downarrow$$

$$V(I) = \{x \in \mathbb{A}^n : f(x) = 0 \ \forall f \in I\}$$

oss: I è f.g. $\Rightarrow I = (f_1, \dots, f_\ell)$

$\Rightarrow V(I) = \{X : f_i(X) = 0 \quad i = 1, \dots, \ell\}$

PROP. La corrispondenza V soddisfa:

(i) $V(0) = \mathbb{A}^n$; $V((1)) = V(R) = \emptyset$

(ii) $I \subset J$ ideali $\Rightarrow V(I) \supset V(J)$

(iii) $V(I_1 \cap I_2) = V(I_1) \cup V(I_2)$

(iv) $V(I_1 + I_2) = V(I_1) \cap V(I_2)$

<u>dim</u> (i), (ii) ovvi

(iii) Per assurdo

$\exists$ punto $P \notin V(I_1) \cup V(I_2)$

ma $P \in V(I_1 \cap I_2)$

$\Rightarrow \exists\, f \in I_1$ t.c. $f(P) \neq 0$

$\exists\, g \in I_2$ t.c. $g(P) \neq 0$

Ma $f \cdot g \in I_1 \cdot I_2 \subseteq I_1 \cap I_2$

CIOE' $f \cdot g\,(P) \neq 0$

$\Rightarrow$ $P \notin V(I_1 \cap I_2)$

assurdo $\square$

(iv) $\begin{matrix} I_1 & \subset \\ I_2 & \subset \end{matrix} I_1 + I_2$

$$\Downarrow$$

$$V(I_1+I_2) \subseteq V(I_1) \cap V(I_2)$$

D'altra parte

se $x \in V(I_1) \Rightarrow f(x)=0 \ \forall f \in I_1$

$x \in V(I_2) \Rightarrow g(x)=0 \ \forall g \in I_2$

$$\Rightarrow \underline{(f+g)(x) = 0}$$

$$\Rightarrow \quad x \in V(I_1+I_2)$$

$\square$

IN PARTICOLARE:

$$X_1 = V(f_i : i=1 \ldots r)$$

$$X_2 = V(g_j : j=1 \ldots s)$$

allora

$$X_1 \cup X_2 = V(f_i \cdot g_j) : \begin{array}{l} i=1 \ldots r \\ j=1 \ldots s \end{array}$$

$$X_1 \cap X_2 = V(f_i, g_j) : \begin{array}{l} i=1 \ldots r \\ j=1 \ldots s \end{array}$$

LA CORRISPONDENZA $\mathcal{I}$

$$X \subseteq \mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$$ $\mathbb{K}$ fissato

$$\downarrow \mathcal{I}$$

$$\mathcal{I}(X) = \{ f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] : f(P) = 0 \ \forall P \in X \}$$

n.b. $\mathcal{I}(X)$ è un IDEALE

PROP. La corrispondenza $\mathcal{I}$ verifica:

(i) $X \subseteq Y \Rightarrow \mathcal{I}(X) \supseteq \mathcal{I}(Y)$

(ii) $X \subseteq V(\mathcal{I}(X))$

(iii) J ideale $\Rightarrow J \subseteq \mathcal{I}(V(J))$

OSS. Può accadere che

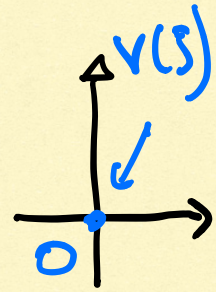
$$J \subsetneq \mathcal{I}(V(J))$$

Esempi

1. $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ non alg. chiuso

$$J = (x^2+y^2) \subset \mathbb{R}[x,y]$$

$$V(J) = \{0\} \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$$



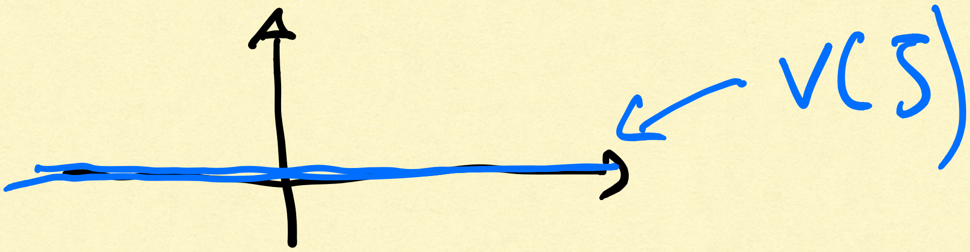
Ma $\mathcal{I}(\{0\}) = (x,y) \supsetneq (x^2+y^2)$

2. $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ alg. chiuso

ma $J \neq \sqrt{J}$ dopo

$$J = (x^2) \subset \mathbb{C}[x,y]$$

$$V(J) = \{x=0\} \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$$



$$\mathcal{I}(V(J)) = (x) \supsetneq (x^2)$$

NULLSTELLENSATZ

<u>def.</u> I IDEALE $\subset R = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$

radicale di I = $\underline{\sqrt{I}} \overset{\text{def.}}{=}$

$\{ f \in R : f^n \in I$ per qualche $n \in \mathbb{N} \}$

OSS. $\sqrt{I}$ è ancora IDEALE in R

poiché $f, g \in \sqrt{I}$

$$\Rightarrow (f+g)^r = \sum_i \binom{r}{i} f^i g^{r-i}$$

per $r \gg 0$ si ha $f^i \in I$

oppure $g^{r-i} \in I$

OSS. $I = (f)$

$f = \prod f_i^{n_i}$ $\qquad$ f_i irriducibili

$\Rightarrow \sqrt{I} = (f_{red})$ $\qquad$ $f_{red} = \prod f_i$

Teorema (NULLSTELLENSATZ di Hilbert)

Sia $\mathbb{K}$ campo, $R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$

SONO EQUIVALENTI:

1. $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ $\quad$ $\mathbb{K}$ è alg. chiuso

2. $\forall$ J ideale

$$\boxed{\mathcal{I}(V(J)) = \sqrt{J}}$$

3. $V(J) = \emptyset \iff 1 \in J$

4. J massimale $\iff$

$$J = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$$

OVVERO

J massimale $\Longleftrightarrow$ $J = \mathcal{I}(\{P\})$

$P = (a_1, \dots, a_n)$ punto $\in \mathbb{A}^n$

<u>Def</u>. I ideale si dice RADICALE se

$$I = \sqrt{I}$$

def. $X \subset \mathbb{A}^n$ si dice CHIUSO ALGEBRICO

SE

$X = V(I)$ I ideale $\subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$

RIASSUMENDO: $(\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}})$

CORRISPONDENZA $V - \mathcal{I}$

$$\mathbb{A}^n \longleftrightarrow \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{sottoinsiemi} \\ \text{di } \mathbb{A}^n \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Ideali} \\ \text{di } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \end{array} \right\}$$

$$X \longmapsto \mathcal{I}(X)$$

chiuso algebrico

$$V(I) \longleftarrow I$$

$$\left\{ \text{chiusi algebrici} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{ideali} \\ \text{radicali} \end{array} \right\}$$

Topologia di Zariski
di $\mathbb{A}^n$

$\Updownarrow$

Chiusi sono i
chiusi algebrici

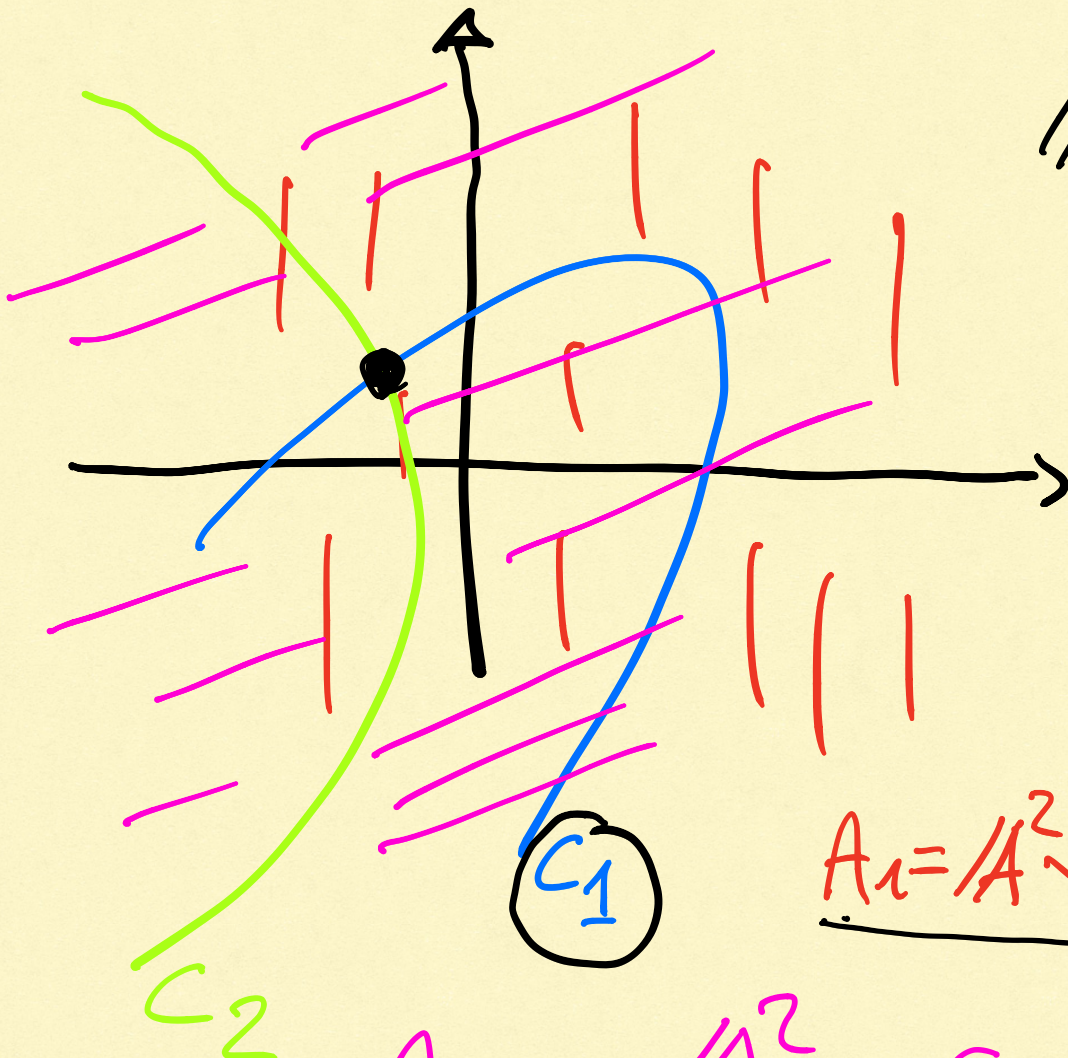
Prop.

1. $\mathbb{A}^n$ con top. di Zariski è $T1$ (i punti sono chiusi)

2. $\# \mathbb{K} = \infty \Rightarrow$ $\mathbb{A}^n$ con top. di Zariski non è $T2$

$(\forall A_1, A_2$ aperti $\neq \emptyset$ $\Rightarrow A_1 \cap A_2 \neq \emptyset)$

$\mathbb{A}^2$



$A_1 = \mathbb{A}^2 \setminus C_1$

$A_2 = \mathbb{A}^2 \setminus C_2$

dim ①

$P = (a_1, \dots, a_n)$

$= V(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$

dim ②

$\underline{\underline{n=1}}$ $\qquad X \subsetneq \mathbb{A}^1$

$\Rightarrow \quad X = V(I), \{0\} \neq I \subsetneq \mathbb{K}[x]$

Sie $f \in I$, $f \neq 0$

$(f) \subset I \quad \& \quad \#\{x : f(x) = 0\} < \infty$

$\Rightarrow \quad X \subset V((f)) \Rightarrow \# X < \infty$

Quindi se $\underline{A_1 = \mathbb{A}^1 \setminus X_1}$

$\underline{A_2 = \mathbb{A}^1 \setminus X_2}$

allora $\#(X_1 \cup X_2) < \infty$

$\Rightarrow \quad \underline{A_1 \cap A_2 \neq \emptyset}$

$\rotatebox{90}{$=$}$

$\mathbb{A}^1 \setminus (X_1 \cup X_2)$

$\underline{n \geq 2}$

$\exists$ inclusione $\iota : \mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{A}^n$

$x \longmapsto (x, 0, \dots, 0)$

$x_1 = x$

$i(\mathbb{A}^1) \cong \mathbb{A}^1$ OMEO

Se P.A. $\exists$ $A_1, A_2 \subset \mathbb{A}^n$ aperti

t.c. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$\Rightarrow \left(A_1 \cap (i\,\mathbb{A}_1)\right) \cap \left(A_2 \cap (i(\mathbb{A}^1))\right)$

$= \emptyset$

assurdo

$\square$

<u>OSS</u>. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$

I chiusi algebrici di $\mathbb{A}^n$
sono chiusi per la
topologia euclidea
&
$X = V(I)$ chiuso

$A = \mathbb{A}^n \setminus X$ è aperto
denso

SPAZI PROIETTIVI

V sp. vett. su $\mathbb{K}$

$$\mathbb{P}(V) \overset{\text{def.}}{=} V \setminus \{0\} \big/ \sim$$

$\sim$: $v_1 \sim v_2 \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{K}^*$ t.c. $v_1 = \lambda v_2$

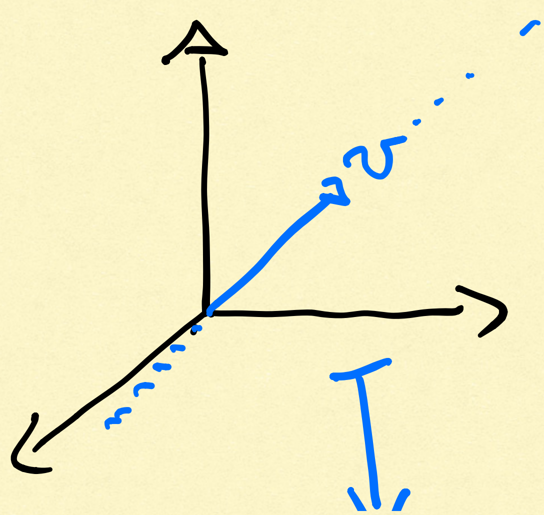
$$\dim\left(\mathbb{P}(V)\right) \doteq \dim(V) - 1$$

$$\pi : V \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}(V)$$
$$v \longmapsto [v]$$

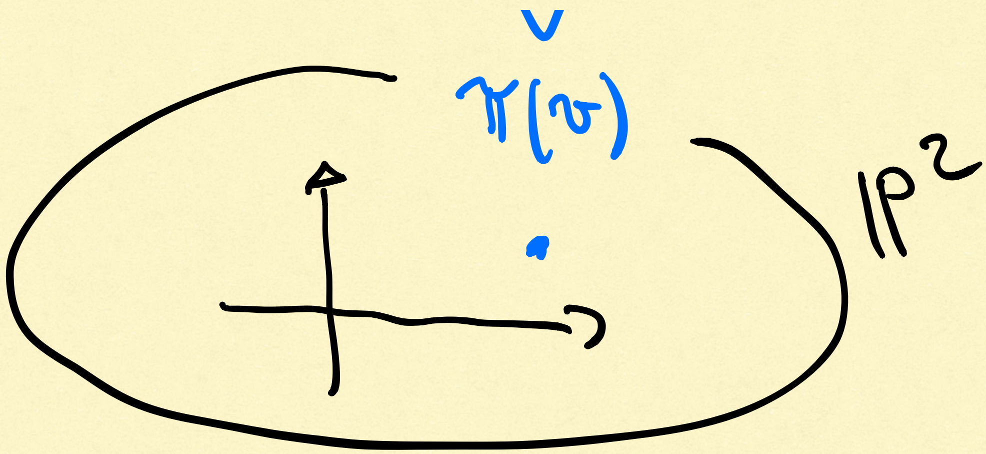
proiezione (naturale) al quoziente

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \overset{def}{=} \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$$

spazio proiettivo standard



$\mathbb{K}^3 = \mathbb{A}^3$



In $\mathbb{P}^n$ coordinate omogenee

$$\doteq (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$$

oppure $[(x_0, x_1, \dots, x_n)]$

$$\updownarrow$$

classe di $[v]$

$[v] \longleftrightarrow P$ punto

$$(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \sim (\lambda x_0 : \lambda x_1 : \ldots : \lambda x_n)$$

POSIZIONE GENERALE & RIFERIMENTI PROIETTIVI

$P_0 = [v_0], \ldots, P_k = [v_k]$

$(k+1)$ punti in $\mathbb{P}(V)$

sono lin. ind.

$\Updownarrow$

$v_0, \ldots, v_k$ sono lin. ind. in V

RIFERIMENTO PROIETTIVO

Un riferimento proiettivo in $\mathbb{P}^n$ è

$S = \{ P_0, \_\_, P_{n+1} \}$ di $n+2$ punti

t.c.

$\forall$ $n+1$ punti $\in S$ sono lin. ind.

Rif. proiettivo STANDARD

$P_0 = (1 : 0 \_\_ : 0)$

$P_1 = (0 : 1 : 0 \_\_ : 0)$

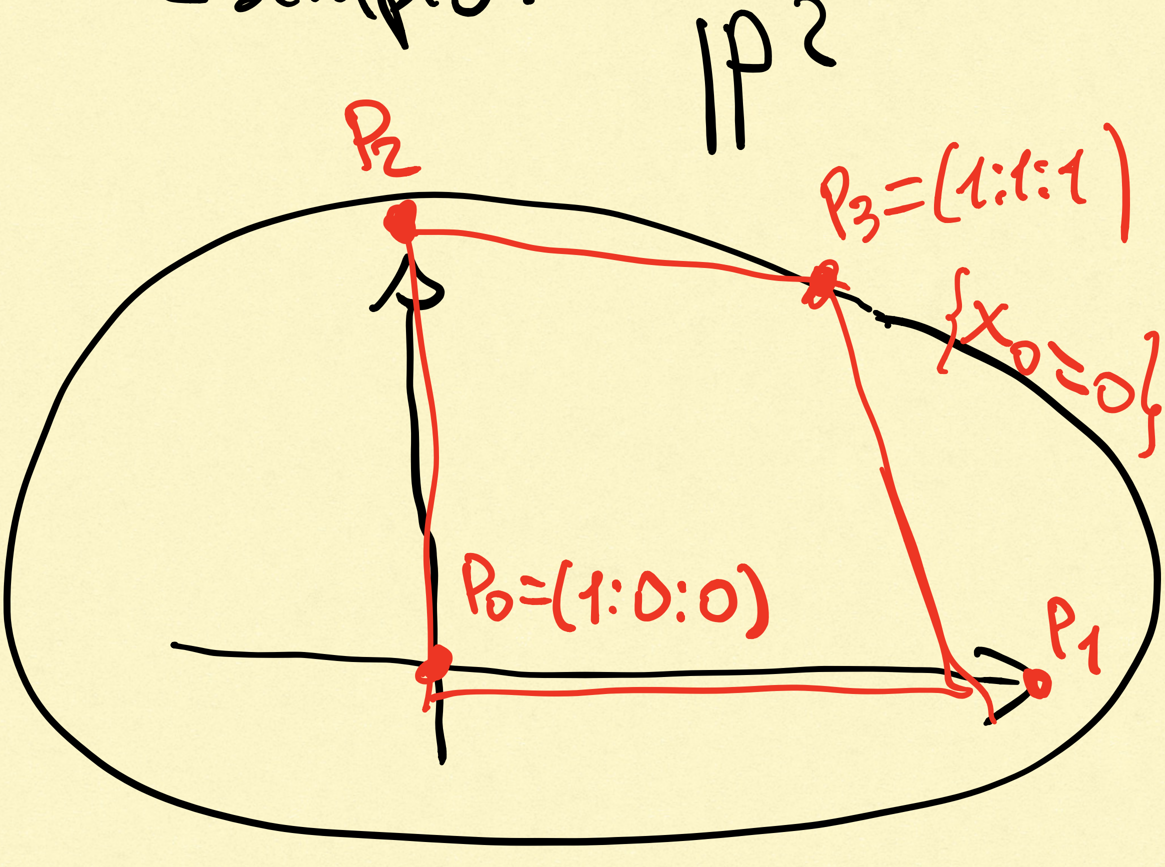
$\vdots$

$P_n = (0 : \_\_ : 1)$

&

$P_{n+1} = (1 : 1 : \ldots : 1)$

Esempio:



Teorema fondamentale delle proiettività:

$$f: \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(W)$$

si dice trasformazione proiettiva

$$\Updownarrow$$

$$\exists\ \varphi: V \longrightarrow W \quad \text{lineare INIETTIVA}$$

$$\text{t.c. } f([v]) = [\varphi(v)]$$

f PROIETTIVITA' $\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\Longleftrightarrow}}$ φ è isomorfismo

$$\{ f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V) \text{ proiettività} \}$$

$$\Updownarrow$$

$$PGL(V) \doteq GL(V) / \mathbb{K}^*$$

$$\{ f: \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n \text{ proiettività} \}$$

$$\Updownarrow$$

$$PGL(n+1, \mathbb{K}) = GL(n+1, \mathbb{K}) / \mathbb{K}^*$$

A_1 matrice $\sim$ A_2 matrice

$\iff A_1 = \lambda \cdot A_2$

Teo. fondamentale delle proiettività

Dato $\mathbb{P}(V)$

siano $\{P_0, \ldots, P_{n+1}\}$

$\{Q_0, \ldots, Q_{n+1}\}$

due riferimenti proiettivi.

ALLORA $\exists!$ proiettività

$f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ t.c.

$f(P_i) = Q_i \quad \forall\, i = 0, \ldots, n+1$

COORDINATE OMOGENEE:

$\mathbb{P}(V)$

$\{P_0, \dots, P_{n+1}\}$ riferimento proiettivo

ALLORA $\exists\,!$ BASE $\mathcal{B}$ di V

$$\mathcal{B} = \{v_0, \dots, v_n\}$$

&

vettore $v_{n+1} \in V$

t.c.
$$\begin{cases} \underline{[v_i] = P_i} \quad i=0,\dots,n+1 \\ \& \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n+1} v_i = v_{n+1} \end{cases}$$

coordinate di $P = [v]$

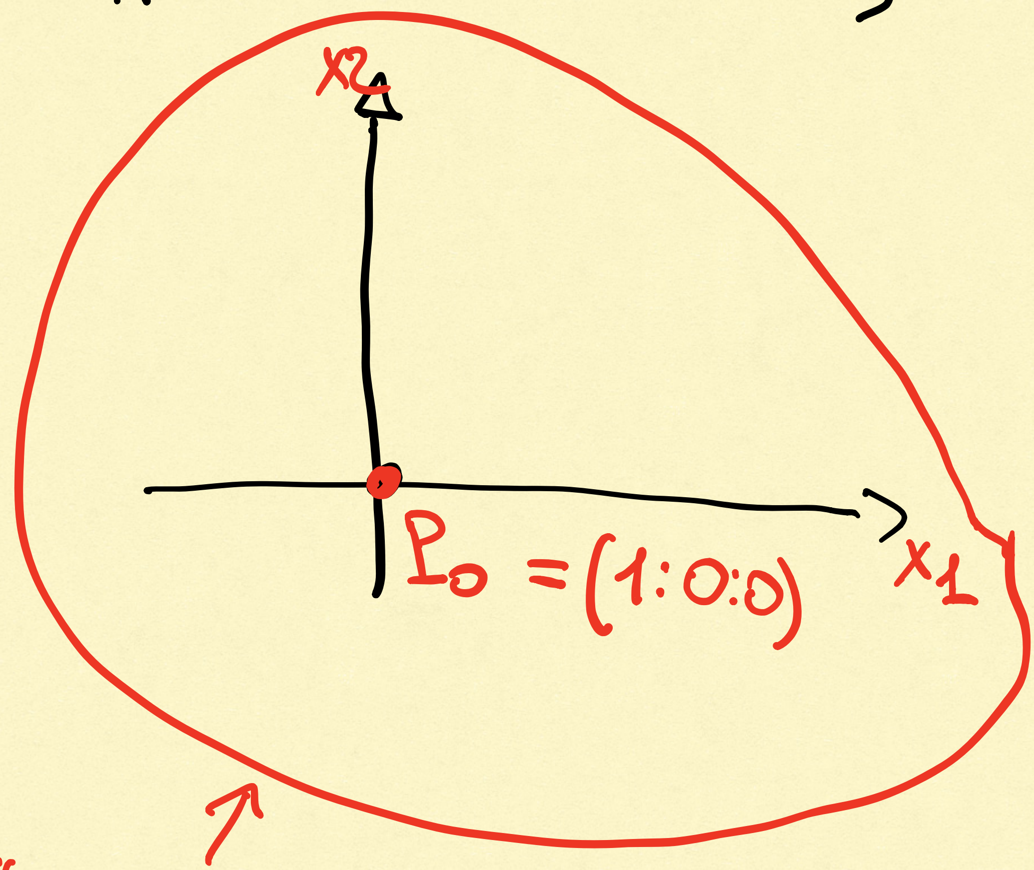
$\Updownarrow$

coordinate di v rispetto a $\{v_0, \dots, v_n\}$

(definite a meno di scalari)

Esempio:

$$\mathbb{P}^2 = \{(x_0 : x_1 : x_2)\}$$



"retta all' ∞" $= \{x_0 = 0\}$

$$x_1 \longleftrightarrow x \in \mathbb{A}^2$$

$$x_2 \longleftrightarrow y \in \mathbb{A}^2$$

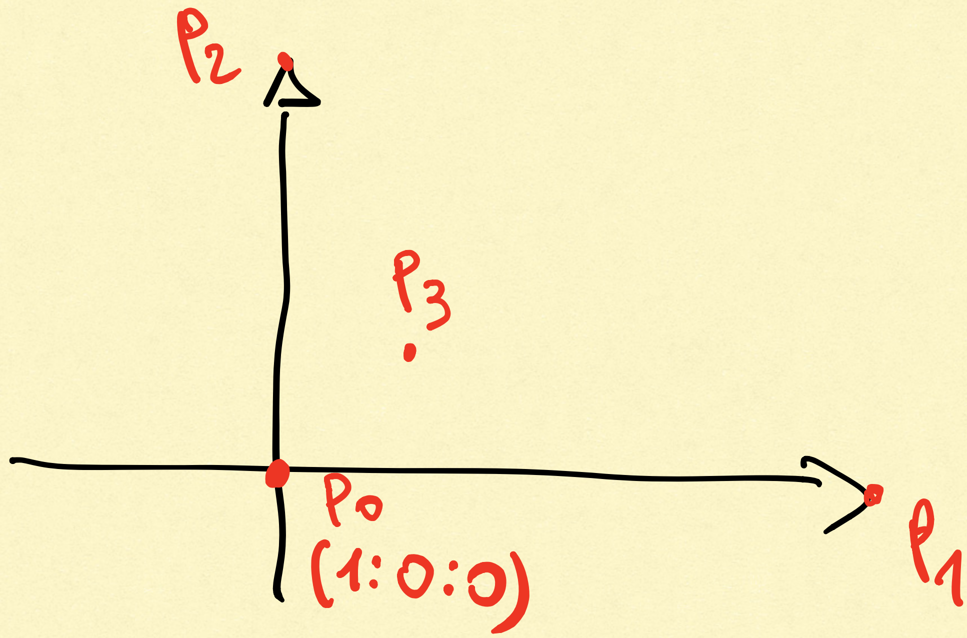
Se $x_0 \neq 0$

$$(x_0 : x_1 : x_2) \sim \Big(1 : \underset{\substack{\shortparallel \\ x}}{\frac{x_1}{x_0}} : \underset{\substack{\shortparallel \\ y}}{\frac{x_2}{x_0}}\Big)$$

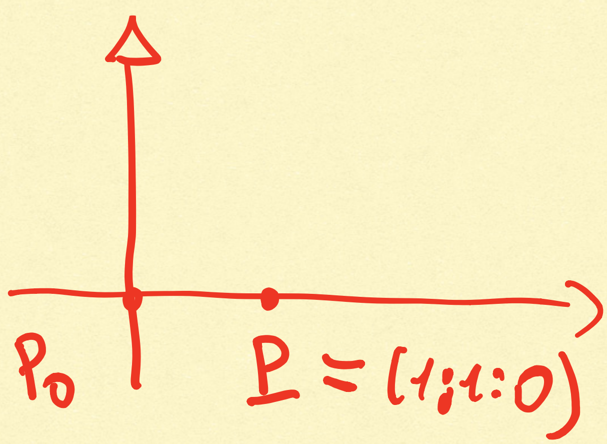
$$U_0 = \mathbb{P}^2 \setminus \{x_0 = 0\} \cong \mathbb{A}^2_{(x,y)}$$

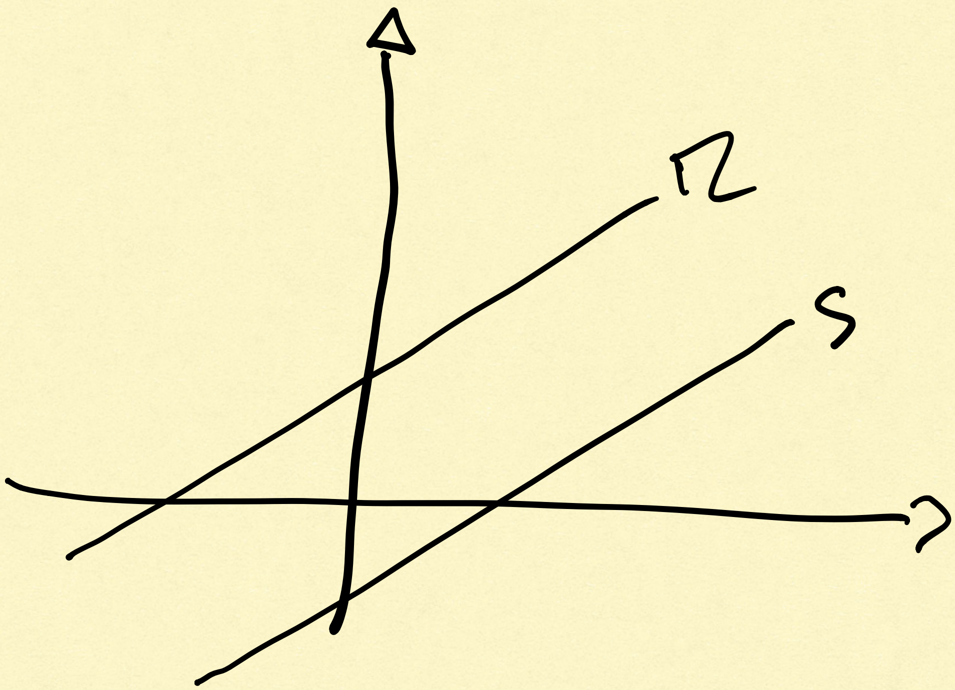
$r_0 = \{x_0 = 0\} \cong \mathbb{P}^1$ è la retta all'∞

$$\mathbb{P}^2 = \underset{\substack{\cong \\ \mathbb{A}^2}}{U_0} \cup \underset{\substack{\shortparallel \\ \text{retta all'}\infty}}{r_0}$$



$$P_1 = (0:1:0)$$
$$P_2 = (0:0:1)$$
$$P_3 = (1:1:1)$$





r, s due rette in $\mathbb{A}^2$ parallele

$r: \; 5x + 6y - 7 = 0$

$s: \; 5x + 6y + 3 = 0$

$\cap$

ris: !

$$\longleftrightarrow \begin{cases} 5x+6y-7=0 \\ 5x+6y+3=0 \end{cases}$$

non ha soluzione in $\mathbb{A}^2$
"al finito"

Introduciamo le coordinate omogenee:

$x \longleftrightarrow x_1$
$y \longleftrightarrow x_2$
coeff $\longleftrightarrow$ coeff. $\cdot\ x_0$

l'eq. diventa

$$\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 - 7x_0 = 0 \\ 5x_1 - 6x_2 + 3x_0 = 0 \end{cases}$$

ha soluzione: $x_0 = 0$

$$5x_1 = 6x_2$$

CIOE' : $P = \left(0 : \frac{6}{5} : 1\right)$

Punto $P \leftrightarrow$ coeff. angolare delle 2 rette