ELEMENTI DI Geometria Algebrica

MARCO FRANCIOSI

Libri di riferimento:

M. Reid "Undergraduate Algebraic Geometry"

I.R. Shafarevich "Basic Algebraic Geometry"

Fortuna - Frigerio - Pardini
"Geometria proiettiva, problemi risolti e richiami di Teoria"

Modalità d'esame: prova orale

Oggetto di studio:

VARIETA' Algebriche

$\mathbb{K}$ campo

$$I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$$

IDEALE

$$\downarrow$$

$$V(I) = \{ X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n : f(X) = 0 \ \forall f \in I \}$$

$$V(I) \subseteq \mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$$

varietà affine

$$\mathcal{I} \subset \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$$

IDEALE OMOGENEO

(vedremo la def.
"$\mathcal{I}$ generato da pol. omogenei")

$\downarrow$

$$V(\mathcal{I}) = \{ X = (x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n : f(X) = 0 \ \forall f \in \mathcal{I} \}$$

$$V(\mathcal{I}) \subseteq \mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$$

vedremo:

proprietà varietà algebriche

locali e globali

topologia

morfismi & mappe razionali

Esempi

Interludio: curve piane

DOMANDA:

Geometria proiettiva?

POLINOMI

$\mathbb{K}$ campo

$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] = \{$ polinomi a coeff. in $\mathbb{K}$ nelle variabili $x_1, \dots, x_n \}$

Teorema BASE di Hilbert

A Noetheriano $\Rightarrow A[x]$ Noetheriano

$\forall$ catena ascendente di ideali

$$I_1 \subset \dots \subset I_n \subset \dots$$

$$\exists N : \quad I_N = I_{N+1} = \dots$$

$\Leftrightarrow \forall I$ ideale $\exists f_1, \dots, f_k$ t.c.

$$I = (f_1, \dots, f_k)$$

COR. $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ è Noetheriano

LEMMA di Gauss

Pb. fattorizzazione di polinomi

PROP. A dominio a fattorizzazione UNICA (notazione: UFD)

$\Rightarrow$ $A[x]$ UFD

COR. $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ è UFD

$$\mathbb{K}(x_1, \_, x_n) \overset{def.}{=} \mathrm{Quot}\left(\mathbb{K}[x_1, \_, x_n]\right)$$

campo dei quozienti

<u>DEF.</u> A UFD

$$p(x) = \sum a_i x^i \quad \in A[x]$$

primitivo se M.C.D. $(a_i) = 1$

Lemma di Gauss:

$p \in \mathbb{K}[x_1, \_, x_n, y]$ irriducibile

$$\Updownarrow$$

p irriducibile in $\mathbb{K}(x_1, \_, x_n)[y]$

p primitivo in $\mathbb{K}[x_1, \_, x_n][y]$

Esempio:

$$p(x,y) = xy + y - x^5$$

- $\deg_y p = 1 \Rightarrow p$ irriducibile in $\mathbb{K}(x)[y]$

- p primitivo in $\mathbb{K}[x][y]$

$$p = (x+1)\,y \; - x^5$$

$\Rightarrow p$ irriducibile in $\mathbb{K}[x,y]$

LA CORRISPONDENZA V

$\mathbb{K}$ campo

$R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$

$\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ spazio affine con coordinate $x_1, \dots, x_n$

$$R \ni f \longmapsto V(f) = \{ x \in \mathbb{A}^n : f(x) = 0 \}$$

In generale

$I \subset R$ ideale

$$I \mapsto V(I) = \{ x \in \mathbb{A}^n : f(x) = 0 \ \forall f \in I \}$$

oss: I è f.g. $\Rightarrow I = (f_1, \dots, f_r)$

$\Rightarrow V(I) = \{X : f_i(X) = 0 \quad i = 1, \dots, r\}$

PROP. La corrispondenza V soddisfa:

(i) $V(0) = \mathbb{A}^n$; $V((1)) = V(R) = \emptyset$

(ii) $I \subset J$ ideali $\Rightarrow V(I) \supset V(J)$

(iii) $V(I_1 \cap I_2) = V(I_1) \cup V(I_2)$

(iv) $V(I_1 + I_2) = V(I_1) \cap V(I_2)$

<u>dim</u> (i), (ii) ovvi

(iii) Per assurdo

$\exists$ punto $P \notin V(I_1) \cup V(I_2)$

ma $P \in V(I_1 \cap I_2)$

$\Longrightarrow \exists\, f \in I_1$ t.c. $f(P) \neq 0$

$\exists\, g \in I_2$ t.c. $g(P) \neq 0$

Ma $f \cdot g \in I_1 \cdot I_2 \subseteq I_1 \cap I_2$

CIOE' $f \cdot g\,(P) \neq 0$

$\Rightarrow P \notin V(I_1 \cap I_2)$

assurdo $\square$

(iv) $\begin{matrix} I_1 \subset \\ I_2 \subset \end{matrix} I_1 + I_2$

$$\Downarrow$$

$$V(I_1 + I_2) \subseteq V(I_1) \cap V(I_2)$$

D'altra parte

se $x \in V(I_1) \Rightarrow f(x) = 0 \ \forall f \in I_1$

$\quad x \in V(I_2) \Rightarrow g(x) = 0 \ \forall g \in I_2$

$$\Rightarrow (f+g)(x) = 0$$

$$\Rightarrow x \in V(I_1 + I_2)$$

$\square$

IN PARTICOLARE:

$$X_1 = V(f_i : i = 1 \ldots n)$$

$$X_2 = V(g_j : j = 1 \ldots s)$$

allora

$$X_1 \cup X_2 = V(f_i \cdot g_j)_{\substack{i=1\ldots n \\ j=1\ldots s}}$$

$$X_1 \cap X_2 = V(f_i, g_j)_{\substack{i=1\ldots n \\ j=1\ldots s}}$$

LA CORRISPONDENZA $\mathcal{I}$

$$X \subseteq \mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{I}$$

$$\mathcal{I}(X) = \{ f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] : f(P) = 0 \ \forall P \in X \}$$

n.b. $\mathcal{I}(X)$ è un IDEALE

<u>PROP</u>. La corrispondenza $\mathcal{I}$ verifica:

(i) $X \subseteq Y \Rightarrow \mathcal{I}(X) \supseteq \mathcal{I}(Y)$

(ii) $X \subseteq V(\mathcal{I}(X))$

(iii) J ideale $\Rightarrow J \subseteq \mathcal{I}(V(J))$

<u>OSS</u>. Può accadere che

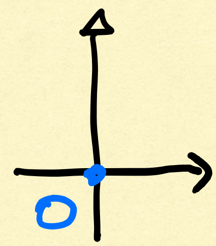
$$J \subsetneq \mathcal{I}(V(J))$$

Esempi

① $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ non alg. chiuso

$$J=(x^2+y^2)\subset\mathbb{R}[x,y]$$

$$V(J)=\{0\}\in\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$$



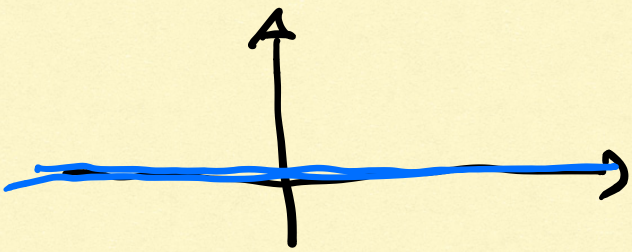
Ma $\mathcal{I}(\{0\})=(x,y)\supsetneq(x^2+y^2)$

② $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ alg. chiuso

ma $J\neq\sqrt{J}$

$$J = (x^2) \subset \mathbb{C}[x,y]$$

$$V(J) = \{x=0\} \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$$



$$\mathcal{I}(V(J)) = (x) \underset{\neq}{\supset} (x^2)$$

NULLSTELLENSATZ

def. I IDEALE $\subset R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$

radicale di I $= \sqrt{I} \overset{def.}{=}$

$\{ f \in R : f^n \in I$ per qualche $n \in \mathbb{N} \}$

OSS. $\sqrt{I}$ è ancora IDEALE in R

poiché $f, g \in \sqrt{I}$

$$\Rightarrow (f+g)^r = \sum_i \binom{r}{i} f^i g^{r-i}$$

per $r \gg 0$ si ha $f^i \in I$

oppure $g^{r-i} \in I$

OSS. $I = (f)$

$f = \prod f_i^{n_i}$ f_i irriducibili

$\Rightarrow \sqrt{I} = (f_{red})$ $f_{red} = \prod f_i$

Teorema (NULLSTELLENSATZ di Hilbert)

Sia $\mathbb{K}$ campo, $R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$

SONO EQUIVALENTI:

1. $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$

2. $\forall\, J$ ideale

$$\boxed{I(V(J)) = \sqrt{J}}$$

3. $V(J) = \emptyset \iff 1 \in J$

4. J massimale $\iff$

$J = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$

OVVERO

J massimale $\Longleftrightarrow$ $J = \mathcal{I}(\{P\})$

$P = (a_1, \dots, a_n)$ punto $\in \mathbb{A}^n$

<u>Def</u>. I ideale si dice RADICALE se

$$I = \sqrt{I}$$

def. $X \subset \mathbb{A}^n$ si

dice CHIUSO ALGEBRICO

SE

$X = V(I)$ I ideale

$\subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$

RIASSUMENDO: $(\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}})$

CORRISPONDENZA $V - \mathcal{I}$

$$\mathbb{A}^n \longleftrightarrow \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{sottoinsiemi} \\ \text{di } \mathbb{A}^n \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Ideali} \\ \text{di } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \end{array} \right\}$$

$$X \longmapsto \mathcal{I}(X)$$

$$V(I) \longleftarrow\!\shortmid\; I$$

$$\left\{ \text{chiusi algebrici} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{ideali} \\ \text{radicali} \end{array} \right\}$$

Topologia di Zariski di $\mathbb{A}^n$

$$\Updownarrow$$

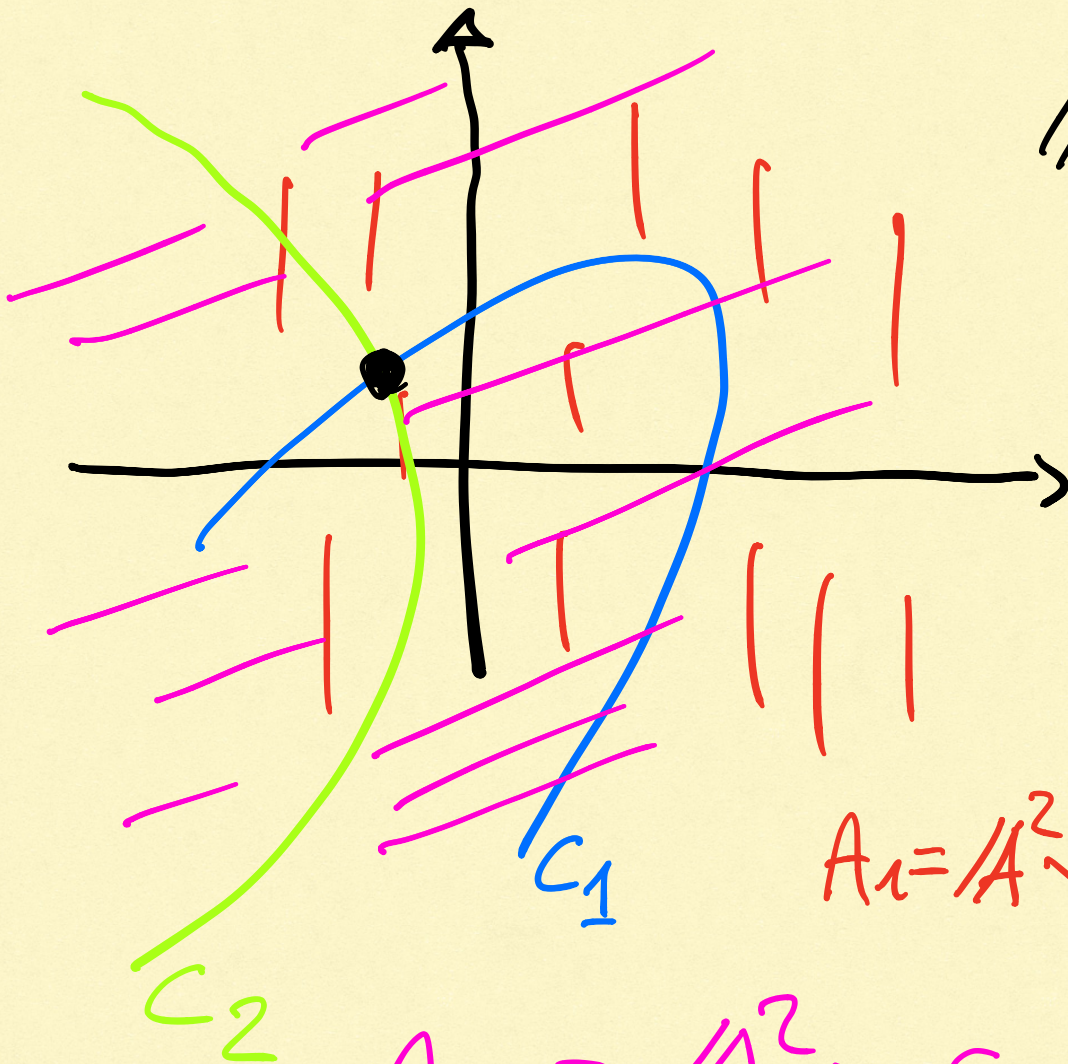
chiusi sono i chiusi algebrici

Prop.

① $\mathbb{A}^n$ con top. di Zariski
è T1
(i punti sono chiusi)

② $\# \mathbb{K} = \infty \Rightarrow$
$\mathbb{A}^n$ con top. di Zariski
non è T2
($\forall\ A_1, A_2$ aperti $\neq \emptyset$
$\Rightarrow A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$)

$\mathbb{A}^2$



$A_1 = \mathbb{A}^2 \setminus C_1$

$A_2 = \mathbb{A}^2 \setminus C_2$

dim 1

$P = (a_1, \dots, a_n)$

$= V(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$

dim 2

<u>$n = 1$</u> $\quad X \subsetneq \mathbb{A}^1$

$\Rightarrow X = V(I), \{0\} \neq I \subset \mathbb{K}[x]$

Sia $f \in I$

$(f) \subset I \quad \& \quad \#\{x : f(x) = 0\} < \infty$

$\Rightarrow \quad X \subset V((f)) \Rightarrow \# X < \infty$

Quindi se $A_1 = \mathbb{A}^1 \setminus X_1$
$A_2 = \mathbb{A}^1 \setminus X_2$

allora $\#(X_1 \cup X_2) < \infty$

$\Rightarrow \quad A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$

$\underline{n \geq 2}$

$\exists$ inclusione $\iota : \mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{A}^n$
$x \longmapsto (x, 0, \dots, 0)$

$\iota(\mathbb{A}^1) \cong \mathbb{A}^1$ OMEO

Se P.A. $\exists$ $A_1, A_2 \subset \mathbb{A}^n$
aperti

t.c. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$\Rightarrow \left(A_1 \cap (\iota \mathbb{A}_1)\right) \cap \left(A_2 \cap (\iota(\mathbb{A}^1))\right)$

$= \emptyset$

assurdo

$\square$

<u>OSS</u>. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$

I chiusi algebrici di $\mathbb{A}^n$
sono chiusi per la
topologia euclidea
&
$X = V(I)$ chiuso

$A = \mathbb{A}^n \setminus X$ è $\overline{\text{aperto}}$
denso