

Calcolo Numerico
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica
Compito dell'1 luglio 2026

Ogni risposta deve contenere una (breve) descrizione del procedimento usato.

Problema 1

Sia $M = F(2, 3)$. Determinare il massimo ed il minimo dell'insieme $A = [-17, 17] \cap M$.

Problema 2

Sia $h(x) = e^{x-2}$.

- (a) Determinare il numero di punti uniti di h e separarli.
- (b) Per ciascuno dei punti uniti, decidere se il metodo ad un punto definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione.
- (c) Sia x_k la successione determinata dal metodo ad un punto definito da h a partire da $x_0 = 0$. Determinare x_1 .

Problema 3

Si considerino i dati

$$(-1, 1) \quad (0, 2) \quad (1, 3)$$

Determinare la retta che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati e, poi, lo scarto quadratico associato a tale retta.

Soluzione

Problema 1

Si ha:

$$17 = 16 + 1 = 2^4 + 2^0 = 10001 = 2^5 \cdot 0,10001 \notin M$$

dunque il massimo dell'insieme A è il più piccolo degli elementi di M adiacenti a 17:

$$\xi_- = 2^5 \cdot 0,100$$

L'insieme A è simmetrico rispetto a zero (lo sono sia l'insieme $[-17, 17]$ che l'insieme M) e quindi il minimo di A è l'opposto del massimo:

$$-\xi_- = -2^5 \cdot 0,100$$

Problema 2

Sia $f(x) = h(x) - x = e^{x-2} - x$. Gli zeri di f sono tutti e soli i punti uniti di h (verificarlo!). Si ha poi:

$$f'(x) = e^{x-2} - 1, \quad f''(x) = e^{x-2}$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $f''(x) > 0$ e quindi f ha *al più due zeri*. Siccome $f(0) = e^{-2} > 0$, $f(2) = -1 < 0$ e $f(4) = e^2 - 4 > 0$, dal Teorema di esistenza degli zeri (f è una funzione continua) si deduce che f ha due zeri, e quindi h ha *due punti uniti*, separati da:

$$\alpha_1 \in (0, 2), \quad \alpha_2 \in (2, 4)$$

Per l'utilizzabilità del metodo definito da h occorre considerare $h'(x)$. Si ha:

$$h'(x) = e^{x-2}$$

Dunque: poiché per ogni $x \in (0, 2)$ si ha $h'(x) \in (0, 1)$ si deduce che il metodo definito da h è *utilizzabile* per approssimare α_1 ; poiché per ogni $x \in (2, 4)$ si ha $h'(x) > 1$ si deduce che il metodo definito da h *non è utilizzabile* per approssimare α_2 .

Infine, si ha $x_1 = h(x_0) = h(0) = e^{-2}$.

Problema 3

Scelta la coppia $1, x$ come base di $P_1(\mathbb{R})$, il sistema che traduce le condizioni di interpolazione è:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

I coefficienti che individuano la retta che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati sono le componenti della soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema riportato. Si ottiene, risolvendo le equazioni normali:

$$\alpha^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La retta cercata è quindi il grafico del polinomio $p^*(x) = 2 + x$.

Lo scarto quadratico associato alla retta trovata risulta *zero*: la retta, infatti, interpola i dati.