DUALITÉ ARITHMÉTIQUE POUR LES 1-MOTIFS

avec David Harari

vo sous-titré en anglais

PRÉHISTOIRE

Hasse ($\sim$ 10 avant L.I.)[1]:

K = extension finie de $\mathbf{Q}_p$

Théorème principal du corps de classes local:[2]

Il existe un morphisme (application de réciprocité[3])

$$K^\times \to Gal(\overline{K}|K)^{\mathrm{ab}}$$

induisant un isomorphisme

$$(K^\times)^\wedge \to Gal(\overline{K}|K)^{\mathrm{ab}}$$

où $\wedge$:= *complété profini*, ab := abélianisé.

---

[1] *This is a silly joke. Try to figure it out.*

[2] *main theorem of local class field theory*

[3] *reciprocity map*

HISTOIRE

Interprétation cohomologique (début de notre ère):

$K^\times = \mathbf{G}_m(K)$

$\mathsf{Hom}(Gal(\overline{K}|K)^{\mathsf{ab}}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = H^1(K, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \cong H^2(K, \mathbf{Z})$

L'accouplement[1] tautologique

$$\mathbf{G}_m(\overline{K}) \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$$

donne

$$H^0(K, \mathbf{G}_m(\overline{K})) \times H^2(K, \mathbf{Z}) \to H^2(K, \mathbf{G}_m(\overline{K}))$$

Mais $H^2(K, \mathbf{G}_m(K)) = Br(K) \cong \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, d'où la

Reformulation du théorème précédent:

L'accouplement

$$H^0(K, \mathbf{G}_m(\overline{K}))^\wedge \times H^2(K, \mathbf{Z}) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

est parfait.[2]

---

[1] *pairing*

[2] *a kind of ice cream*

Plus généralement, on a:

Dualité de Tate-Nakayama:

T= tore sur K

Y^*= groupe des caractères de T

L'accouplement naturel

$$T(\overline{K}) \times Y^*(\overline{K}) \to \mathbf{G}_m(\overline{K})$$

induit des accouplements parfaits

$$H^i(K,T) \times H^{2-i}(K,Y^*) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

pour $i = 0, 1, 2$

(avec $H^0(K,T)^\wedge$ en place de $H^0(K,T)$ pour $i = 0$).

VARIÉTÉS ABÉLIENNES

Dualité de Tate (1957):

A= variété abélienne sur K

A^*= variété abélienne duale

L'accouplement de Barsotti-Weil

$$A \overset{\mathbf{L}}{\otimes} A^* \to \mathbf{G}_m[1]$$

dans D^b(faisceaux étales) induit des accouplements parfaits

$$H^i(K, A) \times H^{1-i}(K, A^*) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

pour $i = 0, 1$.

DUALITÉ GLOBALE

Dualité de Cassels-Tate ($\sim$ 1962):

k=corps de nombres

$\widehat{k}_v$ = complété en une place v

$Ш^i(G) := \mathrm{ker}(H^i(k,G) \to \prod_v H^i(\widehat{k}_v, G))$

pour G = schéma en groupes $/k$.

Théorème. Pour A= variété abélienne sur k, de dual A^*, il existe un accouplement (dit de Cassels-Tate)

$$Ш^1(A) \times Ш^1(A^*) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

non dégénéré modulo sous-groupes divisibles.

[*Conjecturalement:* accouplement parfait de groupes finis.]

DUALITÉ GLOBALE (cont.)

Analogue pour les tores:

k=corps de nombres

Théorème (Kottwitz?)

Soient

T= tore sur k

Y^* = groupe de caractères de T.

Il existe des accouplements parfaits de groupes finis

$$\text{Ш}^i(T) \times \text{Ш}^{3-i}(Y^*) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

pour $i = 1, 2$.

1-MOTIFS

Un 1-motif sur un schéma S est la donnée de:

- Un S-schéma en groupes Y isomorphe à $\mathbf{Z}^r$ $(r \geq 0)$ localement pour la topologie étale;
- Un S-schéma en groupes G se dévissant en[1]

  $$0 \to T \to G \xrightarrow{p} A \to 0$$

  avec T un S-tore et A un S-schéma abélien;
- Un S-morphisme $u : Y \to G$.

On regarde $M = [Y \to G]$ comme un complexe de faisceaux $fppf$ *concentré en degrés -1 et 0.*

D'après Illusie, les morphismes entre 1-motifs sont les mêmes dans C^b(faisceaux $fppf$) que dans D^b(faisceaux $fppf$).

---

[1] *unscrewable as*

1-MOTIF DUAL (voie pédestre)[1]

Il se construit en 2 étapes (Deligne):

• Dual du quotient $M' := [Y \to A]$ de M:

D'après Barsotti-Weil, le schéma abélien dual A^* représente le foncteur $S' \to \mathsf{Ext}^1_{S'}(A, \mathbf{G}_m)$.

D'où: $S' \to \mathsf{Ext}^1_{S'}(M, \mathbf{G}_m)$ est représentable par un schéma en groupes G^* extension de A^* par $T^* = \mathsf{Hom}(Y, \mathbf{G}_m)$.

On pose $(M')^* := [0 \to G^*]$.

• Cas général: considérons

$$0 \to T \to M \to M' \to 0.$$

Etant donné $\chi \in Y^* := \mathsf{Hom}(T, G)$, la poussette[2] par χ donne une extension

$$0 \to \mathbf{G}_m \to E \to M' \to 0,$$

i.e. un élément de G^*. D'où un morphisme $Y^* \to G^*$.

On pose $M^* := [Y^* \to G^*]$.

[1] *pedestrian way*

[2] *pushout*

1-MOTIF DUAL (par Kärcher)[1]

La dualité entre M et M^* est donnée par une *biextension*:

- Sur $A \times A^*$ on a un $\mathbf{G}_m$-torseur 'canonique', la biextension de Poincaré $\mathcal{P}$;
- La rétrotirette[2] de $\mathcal{P}$ à $A \times G^*$ donne une biextension $\mathcal{P}'$ de (M', G^*) par $\mathbf{G}_m$ (elle se trivialise par rétrotirette à $Y \to G^*$);
- La rétrotirette de $\mathcal{P}'$ à $G \times G^*$ donne une biextension de (M, M^*) par $\mathbf{G}_m$ (elle se trivialise par rétrotirette à $G \to Y^*$).

Formule de Grothendieck-Deligne:

$\mathsf{Biext}_S(M, M^*, \mathbf{G}_m) \cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}^b(S_{pl})}(M \otimes^{\mathbf{L}} M^*, \mathbf{G}_m[1])$

D'où un accouplement $M \otimes^{\mathbf{L}} M^* \to \mathbf{G}_m[1]$ donnant $\mathbf{H}^i(S, M) \times \mathbf{H}^j(S, M^*) \to H^{i+j+1}(S, \mathbf{G}_m)$

[1] *joke for the French (of Hungarian origin)*

[2] *pullback*

UN EXEMPLE

$X =$ variété projective, lisse sur un corps alg. clos

$U \subset X =$ ouvert de Zariski

$\mathsf{Alb}_U =$ variété d'Albanese généralisée de Serre

(universelle pour les morphismes de U dans des variétés semi-abéliennes)

Alb_U est semi-abélienne, extension de la variété abélienne Alb_X par un tore.

Théorème (Severi, Serre) *Le dual du 1-motif* $[0 \to \mathsf{Alb}_U]$ *est* $[Y^* \overset{\mathrm{div}}{\to} \mathrm{Pic}^0(X)]$*, où*

$Y^* =$ *groupe de diviseurs de* X *alg. équivalents à 0 concentrés sur* $X \setminus U$*.*

DUALITÉ LOCALE POUR LES 1-MOTIFS

K = extension finie de $\mathbf{Q}_p$

$M = [Y \to G]$ = 1-motif sur K

Topologie sur $\mathbf{H}^0(K, M)$:

$$0 \to L \to G(K) \to \mathbf{H}^0(K, M) \to H^1(K, Y)$$

$L := H^0(K, Y)/\mathbf{H}^{-1}(K, M)$ *discret de type fini*

$H^1(K, Y)$ *fini*

On munit $G(K)/L$ de la topologie quotient et en fait un sous-groupe ouvert de $\mathbf{H}^0(K, M)$.

Désormais[1], $\wedge$ désigne le complété par rapport aux sous-groupes *ouverts* d'indice finie[2].

Ce n'est pas un foncteur exact!

---

[1] *henceforth*

[2] *open of finite index*

LE THÉORÈME DE DUALITÉ LOCALE

$K =$ extension finie de $\mathbf{Q}_p$

$M = [Y \to G] =$ 1-motif sur K

Théorème. L'accouplement

$\mathbf{H}^i(K, M) \times \mathbf{H}^{1-i}(K, M^*) \to H^2(K, \mathbf{G}_m) \cong \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$

induit un accouplement parfait entre

1. le groupe profini $\mathbf{H}^{-1}_{\wedge}(K, M)$ et le groupe discret $\mathbf{H}^2(K, M^*)$;
2. le groupe profini $\mathbf{H}^0(K, M)^\wedge$ et le groupe discret $\mathbf{H}^1(K, M^*)$.

Ici, $\mathbf{H}^{-1}_{\wedge}(K, M) := \mathsf{ker}(H^0(K, Y)^\wedge \to H^0(K, G)^\wedge)$ (en général différent de $\mathbf{H}^{-1}(K, M)^\wedge$)

[Preuve: dévissage.[1]]

---

[1] *unscrewing*

DUALITÉ GLOBALE

k =corps de nombres

M = 1-motif sur k, de dual M^*

$Ш^i(M) := \mathrm{ker}(\mathbf{H}^i(k, M) \to \prod_v \mathbf{H}^i(\widehat{k}_v, M))$

Théorème. Il existe des accouplements

$$Ш^i(M) \times Ш^{2-i}(M^*) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

pour $i = 0, 1$, non dégénérés modulo sous-groupes divisibles.

[*Conjecturalement:* pour $i = 1$ accouplements parfaits de groupes finis.]

Cas particuliers:

$M = [0 \to A]$: dualité de Cassels-Tate

$M = [0 \to T], [Y \to 0]$: dualité pour les tores

SUITE EXACTE 'DE POITOU-TATE'

Supposant $Ш^1(A)$ et $Ш^1(A^*)$ finis, on a une suite exacte à 12 termes

$$
\begin{array}{ccccc}
0 \to \mathbf{H}^{-1}(k,M)^\wedge & \xrightarrow{\gamma_2{}^D} & \prod_{v\in\Omega_k} \mathbf{H}^2(\widehat{k}_v, M^*)^D & \xrightarrow{\beta_2{}^D} & \mathbf{H}^2(k,M^*)^D \\
 & & & & \downarrow \\
\mathbf{H}^1(k,M^*)^D & \xleftarrow{\gamma_0} & \mathbf{P}^0(M)^\wedge & \xleftarrow{\beta_0} & \mathbf{H}^0(k,M)^\wedge \\
\downarrow & & & & \\
\mathbf{H}^1(k,M) & \xrightarrow{\beta_1} & \mathbf{P}^1(M)_{\mathrm{tors}} & \xrightarrow{\gamma_1} & (\mathbf{H}^0(k,M^*)^\wedge)^D_{\mathrm{tors}} \\
 & & & & \downarrow \\
\mathbf{H}^{-1}(k,M^*)^D & \xleftarrow{\gamma_2} & \bigoplus_{v\in\Omega_k} \mathbf{H}^2(\widehat{k}_v, M) & \xleftarrow{\beta_2} & \mathbf{H}^2(k,M) \to 0
\end{array}
$$

où $\mathbf{P}^i(M)$ = produit restreint[1] des $\mathbf{H}^i(\widehat{k}_v, M)$ par rapport[2] aux images des $\mathbf{H}^i(\hat{O}_v, M)$.

---

[1]restricted product

[2]with respect to

IDÉE DE LA PREUVE DE LA DUALITÉ GLOBALE

k = corps de nombres (pour simplicité totalement imaginaire)

$\mathcal{O}_k$ = anneau des entiers de k

$j : U \to \mathsf{Spec}(\mathcal{O}_k)$ l'inclusion d'un ouvert

k_v = hensélisé de $\mathcal{O}_k$ en une place v

Si $\mathcal{F}^\bullet$ = complexe bornée de faisceaux étales sur U,

$\mathbf{H}^i_c(U, \mathcal{F}^\bullet) := \mathbf{H}^i(\mathsf{Spec}(\mathcal{O}_k), j_!\mathcal{F}^\bullet)$

On a une suite exacte:

$$\ldots \to \mathbf{H}^i_c(U, \mathcal{F}^\bullet) \to \mathbf{H}^i(U, \mathcal{F}^\bullet) \to \bigoplus_{v \notin U} \mathbf{H}^i(k_v, \mathcal{F}^\bullet) \to \ldots$$

Pour un 1-motif M sur U,

l'accouplement $M \otimes^{\mathbf{L}} M^* \to \mathbf{G}_m[1]$ donne

$$\mathbf{H}^i(U, M) \times \mathbf{H}^j_c(U, M^*) \to \mathbf{H}^{i+j+1}_c(U, \mathbf{G}_m)$$

d'où

$$\mathbf{H}^i(U, M) \times \mathbf{H}^{2-i}_c(U, M^*) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

car $H^3_c(U, \mathbf{G}_m) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ (corps de classes global)

PREUVE (cont.)

Notation: Pour A groupe abélien, ℓ premier $A\{l\}$:= sous-groupe de torsion ℓ-primaire

Proposition. *Pour* $0 \leq i \leq 2$ *les accouplements*

$$\mathbf{H}^i(U, M)\{\ell\} \times \mathbf{H}_c^{2-i}(U, M^*)\{\ell\} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

sont non dégénérés modulo les sous-groupes divisibles maximaux.

[Se ramène à la dualité d'Artin-Verdier pour les groupes finis via la 'réalisation ℓ-adique' des 1-motifs M et M^*.]

Posons

$$\begin{aligned} D^i(U, M) &:= \mathrm{Im}\,[\mathbf{H}_c^i(U, M) \to \mathbf{H}^i(U, M)] \\ &= \mathrm{Ker}\,[\mathbf{H}^i(U, M) \to \prod_{v \notin U} \mathbf{H}^i(k_v, M)] \end{aligned}$$

PREUVE (cont.)

Proposition. *Pour $i = 0, 1$ et ℓ inversible sur U il existe un accouplement*

$$D^i(U, M)\{\ell\} \times D^{2-i}(U, M^*)\{\ell\} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \qquad (1)$$

non dégénéré modulo sous-groupes divisibles.

Démonstration: Résulte du diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & D^i(U,M)\{\ell\} & \longrightarrow & \mathbf{H}^i(U,M)\{\ell\} & \longrightarrow & \bigoplus_{v \notin U} \mathbf{H}^i(k_v, M) \\
& & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \longrightarrow & D^{2-i}(U,M^*)^D & \longrightarrow & \mathbf{H}^{2-i}_c(U,M^*)^D & \longrightarrow & \bigoplus_{v \notin U} \mathbf{H}^{1-i}(k_v, M^*)^D
\end{array}$$

donné par la dualité précédente et la dualité locale.

On obtient la dualité voulue

$$Ш^i(k, M_k)\{\ell\} \times Ш^{2-i}(k, M_k^*)\{\ell\} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

en faisant U de plus en plus petit.

REMARQUES

1. Pour $M = [\mathsf{0} \to A]$ on obtient la dualité de Cassels-Tate, défini à l'origine par moyen de cocycles.

2. Cet accouplement est compatible avec la 'réalisation ℓ-adique' construite par Flach.