SUR L'APPLICATION DE RÉCIPROCITÉ POUR UNE SURFACE FIBRÉE EN CONIQUES DÉFINIE SUR UN CORPS LOCAL

Tamás Szamuely (Budapest)

1. Le résultat

Soit k un corps local (i.e. un corps complet pour une valuation discrète, à corps résiduel fini), et soit X une variété propre lisse géométriquement intègre définie sur k. Considérons le groupe

$$SK_1(X) := \operatorname{coker}(\bigoplus_{x \in X_1} K_2 k(x) \to \bigoplus_{x \in X_0} K_1 k(x))$$

où X_i veut dire l'ensemble des points de dimension i de X et l'homomorphisme est induit par le symbole modéré. Shuji Saito a défini (cf. [15], chap. 3) une application de réciprocité

$$\phi_{X,n} : \; SK_1(X) \longrightarrow \pi_1^{ab}(X)$$

où $\pi_1^{ab}(X)$ est l'abélianisé du groupe fondamental étale de X. La construction est faite de la manière suivante : pour chaque point fermé x de X, on envoie $k(x)^\times$ dans $Gal(k(x)^{ab}/k(x))$ par la théorie des corps de classes locale, on compose par l'homomorphisme donné par la fonctorialité du groupe fondamental, puis on fait la somme sur les points fermés de X. Une loi de réciprocité assure alors que l'homomorphisme ainsi défini induit une application de $SK_1(X)$ dans $\pi_1^{ab}(X)$. Dans [12], 4.1 on trouve une autre construction de ϕ_X (pour k de caractéristique 0), équivalente à celle rappelée ici.

Fixons un entier n inversible dans k, et notons $\phi_{X,n} : SK_1(X)/n \to \pi_1^{ab}(X)/n$ le morphisme $\phi_X \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Saito a démontré l'injectivité de $\phi_{X,n}$ pour X une courbe (cf. [14], Lemma 5.3) ; dans ce cas, il a également donné une description du conoyau de ϕ_X (*ibid.*, th. 2.4).

Dans cet article, nous démontrons le résultat suivant.

Théorème. — *Supposons que X soit une surface admettant un morphisme propre surjectif $\pi : X \to C$, où C est une k-courbe propre, lisse, géométriquement intègre et la fibre générique de π est une conique lisse. Alors $\phi_{X,n}$ est injectif, et de plus on a* $\operatorname{coker} \phi_X \cong \operatorname{coker} \phi_C$.

Notons que le théorème vaut sans hypothèse sur la réduction de X. Il est d'ailleurs instructif de le comparer avec l'exemple de Parimala et Suresh [11] : ces auteurs étudient l'application cycle sur de telles surfaces, et montrent qu'elle peut admettre un noyau non trivial même dans le cas où la fibration π est lisse.

L'idée de la démonstration est de comparer les noyau et conoyau de ϕ_X avec ceux de ϕ_C. Pour ce faire, remarquons d'abord que le morphisme $\pi : X \to C$ induit un morphisme

$\pi_* : SK_1(X) \to SK_1(C)$ par la fonctorialité covariante du complexe de Gersten, i.e. par le diagramme commutatif (qui généralise une loi de réciprocité de Weil, cf. [6], p. 276)

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus\limits_{x\in X_1} K_2k(x) & \longrightarrow & \bigoplus\limits_{x\in X_0} K_1(k(x)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
K_2k(C) & \longrightarrow & \bigoplus\limits_{p\in C_0} K_1(k(p))
\end{array}$$

où les homomorphismes verticaux sont induits par les normes en K-théorie. La construction de ϕ_X rappelée plus haut, jointe à l'invariance de la théorie des corps de classes locale par rapport aux normes assure alors la fonctorialité covariante de l'application de réciprocité pour les morphismes propres.

Or dans les paragraphes 2 à 4 nous allons établir les propositions suivantes :

Proposition 1. — *Le morphisme naturel $\pi_1^{ab}(X) \to \pi_1^{ab}(C)$ induit par la projection $\pi : X \to C$ est un isomorphisme.*

Proposition 2. — *Le morphisme $\pi_* : SK_1(X) \to SK_1(C)$ est un isomorphisme.*

Vu la fonctorialité de ϕ_X, le théorème découle de ces deux faits et du résultat déjà cité de Saito sur l'injectivité de $\phi_{C,n}$.

2. Réduction au cas d'une fibration C-minimale

Dans ce paragraphe, on rappelle quelques résultats de géométrie birationnelle (valables sur un corps k quelconque) qui permettront de simplifier l'étude des fibres du morphisme π. Disons qu'une surface comme dans le Théorème est *C-minimale* si les fibres X_p du morphisme π au-dessus des points fermés p de C satisfont à l'une des deux conditions suivantes :

- X_p est une conique lisse ;
- Sur une extension quadratique du corps $k(p)$, X_p devient la réunion de deux droites projectives se coupant en un point $k(p)$-rationnel.

Le résultat suivant est dû à Manin :

Lemme 1. — *Soit X une surface comme dans le Théorème. Alors il existe une k-surface $\tilde{X}$ équipée d'un k-morphisme $\tilde{\pi} : \tilde{X} \to C$ pour lequel elle est C-minimale, ainsi qu'un C-morphisme propre birationnel $X \to \tilde{X}$, défini par l'éclatement d'un nombre fini de points fermés de $\tilde{X}$.*

Pour la démonstration, combiner [8], 1.4 et 1.6 avec [9], 21.5 et 21.8.

D'autre part, on a le lemme bien connu suivant dont nous incluons une démonstration élémentaire faute de référence :

Lemme 2. — *Soit $f_z : Y \to Z$ un morphisme de k-surfaces propres et lisses défini par l'éclatement d'un point fermé z de Z. Alors f_z induit un isomorphisme de $SK_1(Y)$ avec $SK_1(Z)$.*

En effet, notons E le diviseur exceptionnel. On a alors le diagramme commutatif à lignes exactes, dont les morphismes verticaux sont induits par les symboles modérés :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & K_2k(E) & \longrightarrow & \bigoplus_{u\in Y_1} K_2k(u) & \longrightarrow & \bigoplus_{v\in Z_1} K_2k(v) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & {}_N\Big(\bigoplus_{y\in E_0} k(y)^\times\Big) & \longrightarrow & \bigoplus_{y\in Y_0} k(y)^\times & \xrightarrow{N} & \bigoplus_{z\in Z_0} k(z)^\times & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

Ici, le morphisme N est l'identité sur les corps résiduels des points non situés sur E et le produit des normes sur les éléments de $\bigoplus_{y\in E_0} k(y)^\times$. L'indice N veut dire les éléments tués par N. Par un résultat classique de Tate (cf. [2], p. 379), le morphisme vertical de gauche est surjectif. (Le même résultat assure la commutativité du carré de droite.) Mais les conoyaux des deux autres morphismes verticaux sont respectivement $SK_1(Y)$ et $SK_1(Z)$, d'où le lemme.

Comme par ailleurs le groupe fondamental est un invariant birationnel (cf. [SGA1], Exp. X, Cor. 3.4) et comme ϕ_X est fonctorielle pour les morphismes propres, les lemmes 1 et 2 permettent de *supposer désormais que X soit une surface C-minimale.*

3. Démonstration de la proposition 1

Pour démontrer l'isomorphisme de la proposition 1, il suffit de l'établir modulo m pour tout entier positif m, i. e. de démontrer que le morphisme dual $H^1(C,\mathbb{Z}/m) \to H^1(X,\mathbb{Z}/m)$ est un isomorphisme. Par l'hypothèse de C-minimalité, les fibres géométriques de π sont connexes, nous avons donc $\pi_*\mathbb{Z}/m = \mathbb{Z}/m$. Une considération de la suite spectrale de Leray associée à $\pi : X \to C$ nous apprend alors qu'il suffit d'établir la nullité du groupe $H^0(C, R^1\pi_*\mathbb{Z}/m)$. Or les fibres géométriques de $R^1\pi_*\mathbb{Z}/m$ sont toujours nulles, ce que l'on voit comme suit.

- Si $\overline{p}$ est au–dessus d'un point de C où la fibre est lisse, on a par changement de base $(R^1\pi_*\mathbb{Z}/m)_{\overline{p}} = H^1(\mathbb{P}^1_{\overline{k}}, \mathbb{Z}/m) = 0$ car $\mathbb{P}^1$ est simplement connexe.
- Le cas où $\overline{p}$ est au–dessus d'un point où la fibre est dégénérée se ramène au cas précédent par la suite exacte de Mayer-Vietoris associée aux inclusions des

deux composantes irréductibles de $X_{\overline{p}}$ (elle se démontre pour la cohomologie étale exactement comme dans [7], II.5.6 ; alternativement, elle peut être perçue comme un cas très particulier de la théorie de descente cohomologique de [SGA4], exp. VIbis) :

$$\begin{aligned}H^0(\mathbb{P}^1_{\overline{k}}, \mathbb{Z}/n) \oplus H^0(\mathbb{P}^1_{\overline{k}}, \mathbb{Z}/m) \to & H^0(\{\text{point}\}, \mathbb{Z}/m) \to H^1(X_{\overline{p}}, \mathbb{Z}/m) \to \\ & \to H^1(\mathbb{P}^1_{\overline{k}}, \mathbb{Z}/m) \oplus H^1(\mathbb{P}^1_{\overline{k}}, \mathbb{Z}/m)\end{aligned}$$

Ici, le dernier terme de la suite exacte est zéro, les deux premiers sont isomorphes respectivement à $\mathbb{Z}/m \oplus \mathbb{Z}/m$ et $\mathbb{Z}/m$; le morphisme qui les lie est la différence des composantes, ce qui est surjectif. Donc le troisième terme s'annule et la démonstration de la proposition est terminée.

4. Démonstration de la proposition 2

Considérons le diagramme à lignes exactes suivant, analogue à celui figurant dans le paragraphe 1 de [4] :

$$\begin{array}{ccccccc}
\bigoplus_{x \in (X_\eta)_0} K_2 k(x) & \longrightarrow & \bigoplus_{p \in C_0} SK_1(X_p) & \longrightarrow & SK_1(X) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \pi_* & & \\
K_2 k(C) & \longrightarrow & \bigoplus_{p \in C_0} k(p)^\times & \longrightarrow & SK_1(C) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Ici, les morphismes α_1 et α_2 sont donnés par les normes en K–théorie de Milnor, et X_η est la fibre générique de π. La commutativité du carré de gauche ainsi que le fait que α_1 soit bien défini sont assurés par le diagramme commutatif du paragraphe 1 ; la commutativité du carré de droite est tautologique.

Par le lemme du serpent, la Proposition 2 découle donc des deux lemmes suivants :

Lemme 3. — *Le morphisme α_1 est un isomorphisme.*

Lemme 4. — *Le morphisme α_2 est surjectif.*

Commençons par le *lemme 3*. On va faire une vérification cas par cas, suivant le type des fibres.

- Cas d'une fibre lisse : Considérons l'algèbre de quaternions D associée sur $k(p)$ à X_p (cf. par exemple [3], 7.4). Par la théorie de la norme réduite (*ibid.*, 7.3), la surjectivité de la norme $\bigoplus_{x \in (X_p)_0} k(x)^\times \to k(p)^\times$ est alors équivalente au fait bien connu que tout élément de $k(p)^\times$ est une norme réduite de D (en effet, $k(p)$ est un corps local, et on peut appliquer [16], chap. X, prop. 6). Pour l'injectivité, le théorème à la page 79 de [10] implique que $\ker(SK_1(X_p) \xrightarrow{N} k(p)^\times) \simeq SK_1(D)$. Or le dernier groupe est 0 sur un corps local par un théorème classique de Wang (cf. [5], pp. 164-165).

- Cas d'une fibre dégénérée : La surjectivité est ici évidente, la fibre possédant un point $k(p)$-rationnel. Pour l'injectivité, soient $K = k(p)$, K' l'extension quadratique qui déploie la fibre X_p. Soit X^1 l'une des composantes de $X_p \times K'$. Le morphisme composé $X^1 \to X_p \times K' \to X_p$ induit un isomorphisme sur les sous–schémas ouverts obtenus en enlevant le point double de X_p et son image réciproque sur X^1, notée y. Notre tâche est de montrer que la ligne du bas du diagramme commutatif de complexes

$$\begin{array}{ccccc}
K_2K'(X^1) & \longrightarrow & \bigoplus\limits_{x' \in (X^1)_0} K'(x')^\times & \longrightarrow & K'^\times \\
\big\downarrow \text{norme} & & \big\downarrow \text{norme} & & \big\downarrow N_{K'/K} \\
K_2K(X_p) & \longrightarrow & \bigoplus\limits_{x \in (X_p)_0} K(x)^\times & \xrightarrow{\alpha} & K^\times
\end{array}$$

est exacte. Soit donc $(f_x) \in \ker\alpha$. En modifiant par un élément de $K_2K(X_p)$, on peut supposer que la composante au point double soit 1. Par l'isomorphisme décrit plus haut, (f_x) provient alors d'un élément $(f'_{x'})$ de $\oplus K'(x')^\times$ dont la composante en y est 1. Modifions cet élément en plaçant $[\Pi N_{K'(x')/K'}(f'_{x'})]^{-1}$ au–dessus du point y ; le nouvel élément s'applique toujours sur (f_x) (par commutativité du carré de droite) mais sa norme en K' est 1. X^1 étant une droite projective, la ligne du haut est exacte d'après le théorème de Tate déjà cité ; (f_x) provient donc d'un élément de $K_2K'(X^1)$.

Prouvons enfin le *lemme 4*.

Soit D l'algèbre de quaternions associée à la conique générique X_η. Par la propriété fondamentale de la norme réduite pour K_2 (cf. l'introduction de [10]), on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\prod\limits_{L \text{ déploie } D} K_2(L) & \longrightarrow & K_2(D) \\
& \underset{\Pi N_{L|k(C)}}{\searrow} & \big\downarrow Nrd \\
& & K_2k(C)
\end{array}$$

Alperin et Dennis (cf. [1], [13]) nous apprennent que la flèche horizontale est surjective. Comme un corps L déploie D si et seulement si X_η possède un L–point, par transitivité de la norme on en conclut que $\operatorname{Im}\alpha_2 = \operatorname{Im}(K_2(D) \stackrel{Nrd}{\longrightarrow} K_2k(C))$. Mais par un résultat de Merkouriev, (cf. [10], Theorem 9), ce dernier groupe est égal au noyau de l'homomorphisme $K_2k(C) \to H^4(k(C), \mathbb{Z}/2)$ obtenu par cup-produit avec la classe de D à partir du symbole cohomologique. Or $H^4(k(C), \mathbb{Z}/2) = 0$ car $k(C)$ est de dimension cohomologique 3. Cela montre la surjectivité de α_2, et termine la démonstration du théorème.

Remerciement. Ce travail a bénéficié de discussions enrichissantes avec J.-L. Colliot-Thélène ; qu'il en soit remercié ici.

Note ajoutée ultérieurement. Après avoir soumis cet article, j'ai été informé que dans des exposés faits en 1989, P. Salberger avait annoncé un résultat généralisant l'énoncé d'injectivité dans le théorème ci-dessus à une classe de surfaces satisfaisant à certains critères cohomologiques.

Bibliographie

[SGA1] A. Grothendieck. — *Revêtements étales et groupe fondamental*, Springer LNM **224**, 1971.

[SGA4] M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier et al. — *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Springer LNM **269**, **270**, **305**, 1972-3.

[1] R. Alperin, R.K. Dennis. — K_2 of quaternion algebras, *J. Algebra* **56** (1979), 262-274.

[2] H. Bass, J. Tate. — The Milnor ring of a global field, in *Algebraic K-Theory II*, Springer LNM **342**, 1973.

[3] P. M. Cohn. — *Algebra*, 2nd ed, vol. 3, John Wiley, 1991.

[4] J-L. Colliot-Thélène, A. N. Skorobogatov. — Groupe de Chow des zéro-cycles sur les fibrés en quadriques, *K-Theory* **7** (1993), 477-500.

[5] P. Draxl. — *Skew Fields*, LMS Lecture Notes **81**, Cambridge University Press, 1983.

[6] H. Gillet. — Riemann-Roch theorems for higher algebraic K-theory, *Adv. in Math.* **40** (1981), 203-289.

[7] B. Iversen. — *Cohomology of Sheaves*, Springer, 1986.

[8] Yu. I. Manin. — Surfaces rationnelles sur les corps parfaits I. (en russe) *Publ. Math. IHES* **30** (1966), 55-113. (Trad. anglaise : *Amer. Math. Soc. Transl.* **84** (1969), 137-186.)

[9] Yu. I. Manin. — *Cubic Forms*, North-Holland, 1974.

[10] A.S. Merkurjev. — K–theory of simple algebras, *Proc. Symp. Pure Math.* **58**/1 (1995), 65-83.

[11] R. Parimala, V. Suresh. — Zero-cycles on quadric fibrations : Finiteness theorems and the cycle map, *Inv. Math.* **122** (1995), 83-119.

[12] W. Raskind. — Abelian class field theory of arithmetic schemes, *Proc. Symp. Pure Math.* **58**/1 (1995), 85-187.

[13] U. Rehmann, U. Stuhler. — On K_2 of finite dimensional division algebras over arithmetical fields, *Inv. Math.* **50** (1978), 75-90.

[14] S. Saito. — Class field theory of curves over local fields, *J. Number Theory* **21** (1985), 44-80.

[15] S. Saito. — Unramified class field theory of arithmetic schemes, *Ann. of Math.* **121** (1985), 251-281.

[16] A. Weil. — *Basic Number Theory*, 2nd ed, Springer, 1973.

Tamás Szamuely
Mathematical Institute of the
Hungarian Academy of Sciences
PO Box 127
H-1364 Budapest, Hungary