Séminaire Bourbaki Juin 2003
55ème année, 2002-2003, n° 923

GROUPES DE GALOIS DE CORPS DE TYPE FINI
[d'après Pop]

par **Tamás SZAMUELY**

Le but de cet exposé est de montrer que le groupe de Galois absolu d'un corps de fonctions est un invariant très fin : d'une part, il détermine le corps de fonctions à isomorphisme près ; d'autre part, il est possible d'en extraire des informations très riches et variées sur l'arithmétique et la géométrie du corps en question.

1. ÉNONCÉS

Les deux résultats principaux qui nous intéressent ici sont les suivants. Ici, et dans la suite, pour un corps F on fixe toujours une clôture séparable F^s, et on note G_F le groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}\,(F^s|F)$.

Théorème 1.1 (Florian Pop, [30], [31]). — *Soient K, L deux corps infinis, de type fini sur le corps premier. Supposons qu'il existe un isomorphisme $\Phi : G_K \xrightarrow{\sim} G_L$ de groupes profinis. Alors il existe des extensions purement inséparables $K'|K, L'|L$ avec $K' \cong L'$. De plus, il existe un isomorphisme $\phi : L'^s \xrightarrow{\sim} K'^s$ de clôtures séparables tel que pour tout élément $g \in G_{K'}$ on ait $\Phi(g) = \phi^{-1} \circ g \circ \phi$.*

Remarques 1.2. —

(1) En particulier, tout corps de type fini sur $\mathbf{Q}$ est déterminé à isomorphisme près par son groupe de Galois absolu. Un tel énoncé ne vaut pas en caractéristique positive, car si $K'|K$ est une extension purement inséparable de corps, alors l'homomorphisme de restriction $G_K \to G_{K'}$ est un isomorphisme. La formulation ci-dessus tient compte de ce contre-exemple évident.

(2) Pop démontre en fait un énoncé plus précis : pour L, K comme ci-dessus, considérons la règle qui associe à tout isomorphisme $\phi : L^i \xrightarrow{\sim} K^i$ entre leurs clôtures parfaites l'isomorphisme $\Phi : G_K \xrightarrow{\sim} G_L$ donné par la formule $\Phi(g) = \phi^{-1} \circ g \circ \phi$. En caractéristique 0, c'est une bijection entre l'ensemble des isomorphismes de corps $L \xrightarrow{\sim} K$ et le *quotient* de l'ensemble des isomorphismes de groupes profinis $G_K \xrightarrow{\sim} G_L$ par l'action intérieure naturelle de G_L. En caractéristique positive on a une bijection

analogue, mais il faut y identifier les isomorphismes $L^i \xrightarrow{\sim} K^i$ qui sont les mêmes « quitte à tordre par un automorphisme de Frobenius ».

Dans un travail en préparation, Pop obtient l'amplification remarquable que voici. Pour un groupe profini G et un nombre premier ℓ, notons G^ℓ le pro-ℓ-quotient maximal de G.

THÉORÈME 1.3 (Florian Pop, [32], [33]). — *Soient ℓ un nombre premier, K et L deux corps de type fini sur la* clôture algébrique *du corps premier dont le degré de transcendance est au moins 2 et dont la caractéristique est différente de ℓ. Supposons qu'il existe un isomorphisme $\Phi : G_K^\ell \xrightarrow{\sim} G_L^\ell$ de groupes profinis. Alors il existe des extensions purement inséparables $K'|K, L'|L$ avec $K' \cong L'$. De plus, il existe un isomorphisme $\phi : L'^s \xrightarrow{\sim} K'^s$ de clôtures séparables tel que pour tout élément $g \in G_K^\ell$ on ait $\Phi(g) = \phi^{-1} \circ g \circ \phi$.*

REMARQUES 1.4. —

(1) Bien entendu, on a encore un énoncé plus précis comme dans la remarque ci-dessus.

(2) L'énoncé est *faux* pour les corps de degré de transcendance un. En effet, si K est le corps de fonctions de n'importe quelle courbe propre lisse X de genre $g > 0$ sur un corps algébriquement clos, et ℓ est premier à la caractéristique de K, alors G_K^ℓ est la limite projective des groupes fondamentaux ℓ-complétés $\pi_1(U,u)^\ell$ pour les sous-schémas ouverts $U \subset X$. Or la présentation d'un tel $\pi_1(U,u)^\ell$ est bien connue d'après les travaux de Riemann, Poincaré et Grothendieck (voir [15]) : elle est de la forme $< a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g, i_1, \ldots, i_r | [a_1, b_1] \ldots [a_g, b_g] i_1 \ldots i_r = 1 >$, où r est le nombre des points de $X \setminus U$. Ainsi, G_K^ℓ ne dépend que de g et du cardinal du corps de base.

(3) Le th. 1.1 ne semble pas découler de manière évidente du th. 1.3. Toutefois, après avoir fait une bonne partie de la démonstration du th. 1.1, on peut conlure par une application de 1.3 (voir la remarque 8.6).

2. HISTORIQUE

Bien que la caractérisation galoisienne des corps réels clos par Artin et Schreier [2] puisse être regardée comme un précurseur des résultats ci-dessus, l'histoire commence réellement avec des travaux de Neukirch à la fin des années 1960. Celui-ci a été amené par son étude de la structure du groupe de Galois absolu d'un corps p-adique (un sujet de recherche florissant à l'époque) à une caractérisation cohomologique des sous-groupes de décomposition associés aux idéaux premiers dans une extension galoisienne de corps de nombres. De là il a pu déduire, par une application du théorème de densité de Chebotarev, le th. 1.1 dans le cas où L et K sont des extensions *finies galoisiennes* de $\mathbf{Q}$ (voir [24]). En plus, il a remarqué que l'on pourrait étendre son résultat au cas de corps de nombres arbitraires via la solution d'un « problème de plongement » en théorie de Galois inverse.

Ce travail a été mené à bien par Iwasawa (non publié) et Uchida [39] (voir aussi [26], [27]). Ce dernier a également étendu dans [40] la méthode de Neukirch au cas des corps de fonctions à une variable sur un corps fini.

L'histoire semblait donc arriver à une conclusion satisfaisante, mais l'intérêt pour ce genre de questions a été réalimenté vers le milieu des années 1980 par la « vision anabélienne » de Grothendieck, exposée dans sa célèbre lettre à Faltings [17]. Ce programme, qui vise la reconstitution de certains schémas définis sur des corps de type fini (dits *schémas anabéliens*) ainsi que leurs morphismes dominants à partir de leur groupe fondamental géométrique muni de l'action extérieure du groupe de Galois du corps de base, a donné lieu à de spectaculaires développements ces dernières années dont la plupart ont été rapportés dans ce séminaire par Faltings [13] (voir aussi les survols [23], [27], [29], [38] et [18]). Grothendieck énonce dans sa lettre le th. 1.1 comme une variante birationnelle de ses conjectures sur les groupes fondamentaux, avec toutefois une différence notable : il considère les groupes de Galois des corps de fonctions munis d'augmentations naturelles vers le groupe de Galois absolu d'un corps de base k (qui peut être le corps premier, supposé le même pour K et L, ou plus généralement un corps de type fini sur le corps premier contenu dans chacun de ces deux corps) et par suite les k-isomorphismes entre K et L. En revanche, il prédit que les k-homomorphismes $K \to L$ devraient également être reconstituables à partir des G_k-morphismes induits sur les groupes de Galois. Or le th. 1.1 et surtout le th. 1.3 montrent que du moins en ce qui concerne la reconstruction des isomorphismes, l'action du groupe de Galois d'un corps de base n'est pas essentielle. Les travaux récents de Tamagawa, Raynaud et autres sur les groupes fondamentaux des courbes sur un corps algébriquement clos de caractéristique positive témoignent d'ailleurs du même phénomène.

Concernant la conjecture birationnelle de Grothendieck, le premier pas est franchi par Pop [28], où le th. 1.1 est démontré dans le cas des corps de fonctions à une variable sur un corps de nombres, en combinant la stratégie de Neukirch avec des considérations en théorie des valuations utilisant des techniques de logique. Spiess [37] a ensuite trouvé une démonstration purement arithmético-géométrique encore plus proche de l'esprit original de Neukirch. En combinant ces idées avec des arguments de géométrie birationnelle, Pop a ensuite réussi à démontrer le th. 1.1.

Entretemps, dans ses articles [4], [5], Bogomolov a esquissé un programme pour démontrer un résultat similaire au th. 1.3, mais pour des corps de type fini au-dessus d'un corps algébriquement clos quelconque. D'après son point de vue, le corps de fonctions K devrait être déterminé par le deuxième quotient $G_K^\ell/[[G_K^\ell, G_K^\ell], G_K^\ell]$ de la suite centrale descendante de G_K^ℓ. Dans leurs articles récents [6], [7], Bogomolov et Tschinkel fournissent des détails de cette démonstration dans le cas des corps de fonctions de certaines surfaces au-dessus de $\bar{\mathbf{F}}_p$. Certaines idées de Bogomolov ont inspiré Pop dans sa démonstration du théorème 1.3. Pour un complément intéressant, voir [34].

Cet aperçu ne serait pas complet si on ne mentionnait pas un résultat très important de Mochizuki [22] : il y est démontré que si K et L sont deux corps de type fini sur un corps k qui peut lui-même être plongé dans une extension de type fini de $\mathbf{Q}_p$ (Mochizuki appelle un tel corps *sous-p-adique*), alors tout G_k-morphisme $G_K \to G_L$ de groupes profinis à image ouverte est induit par un k-morphisme $L \to K$ de corps. Mochizuki dérive ce théorème de son résultat anabélien fondamental d'après lequel tout G_k-morphisme $\pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ à image ouverte entre les groupes fondamentaux de deux k-courbes hyperboliques X et Y est induit par un k-morphisme dominant $X \to Y$ (voir l'exposé [13] de Faltings). La stratégie est alors la suivante (pour les détails, *cf.* [22], §§15, 16) : on montre d'abord que si K est le corps de fonctions de X, alors tout G_k-morphisme $G_K \to \pi_1(Y)$ se factorise à travers $\pi_1(X)$, d'où on conclut aisément en utilisant le résultat précédent qu'il est induit par un morphisme $\operatorname{Spec} K \to Y$. Un argument (non trivial) de fibration en courbes permet alors d'en déduire un résultat similaire pour K corps de type fini quelconque sur k. Ensuite, étant donné un G_k-morphisme $G_K \to G_L$, où L est le corps de fonctions de Y, on peut le composer par le G_k-morphisme naturel $G_L \to \pi_1(Y)$ et ainsi récupérer par ce qui précède le morphisme dominant $\operatorname{Spec} K \to Y$; il se factorise à travers $\operatorname{Spec} L$. Enfin, le résultat pour L général s'en suit à nouveau par un argument de fibration (facile cette fois).

Noter que dans cette preuve l'action de G_k joue un rôle essentiel ; la variante « absolue » du théorème, ainsi que son analogue en caractéristique positive, ne sont pas connues à ce jour.

3. STRATÉGIE

Nous donnons maintenant un survol parallèle des démonstrations des théorèmes 1.1 et 1.3, laissant les détails aux chapitres suivants. Nous ignorons ici les complications causées par les extensions inséparables en caractéristique positive.

On va appeller la situation du th. 1.1 le *cas arithmétique* et celle du th. 1.3 le *cas géométrique*. Le corps de base k est le corps premier de K dans le premier cas et sa clôture algébrique dans le second ; de même pour l et L.

Première étape : *Correspondance locale.* Soit X un k-schéma normal intègre de type fini ayant K pour corps de fonctions, et soit P un point de codimension 1 de X. Notons D_P un sous-groupe de décomposition de G_K (resp. G_K^ℓ) associé à P, i.e. le stabilisateur d'un point $\bar{P}$ au-dessus de P du normalisé de X dans la clôture algébrique $\bar{K}$ de K. Alors on montre que $D_Q := \Phi(D_P)$ est un groupe de décomposition associé à un point Q de codimension 1 d'un k-schéma normal intègre de type fini Y ayant L pour corps de fonctions. En plus, on obtient ainsi une bijection entre les sous-groupes de décomposition de G_K et de G_L (resp. leurs pro-ℓ-quotients) du type décrit ci-dessus.

On démontre ensuite que Φ transforme le sous-groupe d'inertie de D_P en celui de D_Q, d'où un isomorphisme $\Phi_P : G_{k(P)} \to G_{k(Q)}$ entre les groupes de Galois des corps résiduels de P et de Q (resp. leurs pro-ℓ-quotients).

Les résultats locaux esquissés ci-dessus permettent déjà de reconstituer beaucoup d'invariants arithmétiques et géométriques des corps K et L. En particulier, dans le cas arithmétique, l'utilisation des résultats précédents permet d'établir que les corps de base $k \subset K$ et $l \subset L$ sont isomorphes, et que Φ transforme la projection canonique $G_K \to G_k$ en la projection $G_L \to G_l$; par le théorème de Neukirch/Uchida, on a donc $k \cong l$. Dans le cas géométrique ces deux projections sont bien entendu triviales.

Une fois la projection $G_K \to G_k$ (ou même la projection $G_K^\ell \to G_k^\ell$) connue, il est possible de déduire le cas arithmétique du cas géométrique (cf. la remarque 8.6). On va opter pour ce procédé en caractéristique positive ; en revanche, en caractéristique 0 l'approche directe au th. 1.1 est plus simple.

Deuxième étape : *Correspondance kummérienne.* Soit maintenant n un entier positif que l'on suppose toujours premier à la caractéristique de K et de L ; en plus, dans le cas géométrique, on suppose que c'est une puissance de ℓ.

Dans le cas arithmétique, le groupe G_K agit sur le groupe μ_n des racines n-ièmes de l'unité à travers son quotient G_k qui est préservé par Φ par ce qui précède ; dans le cas géométrique cette action est triviale. Donc, par application de la théorie de Kummer, on obtient une suite d'isomorphismes

$$K^\times/K^{\times n} \cong H^1(G_K, \mu_n) \cong H^1(G_L, \mu_n) \cong L^\times/L^{\times n}$$

où $K^\times$ (resp. $L^\times$) est le groupe multiplicatif de K (resp. L), les deux groupes au milieu sont des groupes de cohomologie galoisienne et leur isomorphisme est induit par Φ. Notons ici que Φ est également applicable dans le cas géométrique : comme l'action de G_K sur μ_n est triviale, les éléments de $H^1(G_K, \mu_n)$ sont alors des homomorphismes $G_K \to \mu_n$; ils se factorisent à travers G_K^ℓ car on a supposé que n est une puissance de ℓ.

Par passage à la limite projective sur les puissances de ℓ, on obtient également un isomorphisme

$$\Phi^{(\ell)} : K^{\times(\ell)} \cong L^{\times(\ell)}$$

entre les *complétés ℓ-adiques* des groupes multiplicatifs des deux corps.

Le noyau du morphisme $K^\times \to K^{(\ell)}$ est le sous-groupe ℓ-divisible maximal de $K^\times$. Dans le cas arithmétique on peut montrer que ce sous-groupe est trivial ; en revanche, dans le cas géométrique ce sous-groupe est égal à $k^\times$.

Troisième étape : *Récurrence.* Dans le cas arithmétique, on dispose des résultats de Neukirch et Uchida sur les corps globaux classiques. Il est donc possible de les utiliser comme point de départ d'une récurrence sur le degré de transcendance commun de K et L (en effet, ce degré est lisible sur la dimension cohomologique de $G_K \cong G_L$). En particulier, on peut supposer que les corps résiduels de deux points de codimension 1 P

et Q sur des modèles de K et L qui se correspondent par la bijection de la première étape sont isomorphes.

La combinaison de ces deux types d'information, à savoir les « isomorphismes modulo P » ainsi que l'isomorphisme des groupes multiplicatifs modulo n établi à l'étape précédente permet alors de construire un isomorphisme entre K et L par « recollement », du moins en caractéristique zéro. Notons toutefois que l'argument contient plusieurs détails délicats, comme par exemple l'établissement d'une correspondance canonique entre les modèles géométriques suffisamment petits de K et de L (*cf.* le chap. 5).

En revanche, dans le cas géométrique une pareille récurrence n'est *a priori* possible qu'à partir du cas de degré de transcendance 2 (cf. la remarque 1.4 (2)), que l'on ne connaît pas à l'avance. Toutefois, la théorie locale fournit suffisamment d'informations sur les corps résiduels de points de codimension 1 dans ce cas pour que l'on puisse commencer une récurrence et caractériser, sinon l'image de $K^\times/k^\times$ dans $K^{\times(\ell)}$, du moins son tensorisé par $\mathbf{Z}_{(\ell)}$, l'anneau des fractions rationnelles à dénominateur non divisible par ℓ.

Fin de la preuve dans le cas géométrique. Finalement, par des arguments géométriques astucieux (cf. le chap. 8), on arrive à caractériser $K^\times/k^\times$ en tant que réseau entier dans son tensorisé par $\mathbf{Z}_{(\ell)}$. Pour terminer la preuve, regardons $K^\times/k^\times$ comme l'espace projectif $\mathbf{P}(K)$ associé au k-espace vectoriel K (et de même pour L). On vérifie alors que la bijection ensembliste $\mathbf{P}(\Phi) : \mathbf{P}(K) \cong \mathbf{P}(L)$ dont on dispose *préserve les droites*. Une fois cela acquis, on peut appliquer le théorème fondamental de la géométrie projective qui dit que $\mathbf{P}(\Phi)$ est induit par un isomorphisme $K \to L$ des espaces vectoriels sous-jacents. C'est alors un exercice facile de vérifier que cet isomorphisme est également multiplicatif.

Enfin, dans les deux cas, on vérifie que l'isomorphisme de corps ainsi obtenu s'étend à un isomorphisme de clôtures séparables induisant bien Φ sur les groupes de Galois, tel qu'il est écrit dans les th. 1.1 et 1.3.

4. VALUATIONS

Soit K un corps de type fini sur un corps parfait k. Appelons *anneau de valuation divisoriel* tout anneau de valuation discrète $A \supset k$ de corps de fractions K et de corps résiduel κ satisfaisant à $\mathrm{tr.deg}(\kappa|k) = \mathrm{tr.deg}(K|k) - 1$. De même, appelons *valuation divisorielle* toute valuation discrète de K associée à un anneau de valuation divisoriel. Nous expliquons dans ce chapitre que dans la situation des th. 1.1 et 1.3 l'isomorphisme Φ induit une bijection entre les anneaux de valuation divisoriels de K et de L, ainsi que des isomorphismes sur les sous-groupes de décomposition et d'inertie associés.

Remarquons d'abord que les prolongements des valuations divisorielles de K à une clôture séparable (resp. à une pro-ℓ-extension maximale) correspondent bijectivement aux sous-groupes de décomposition qui leur sont associés dans G_K (resp. G_K^ℓ). Cela résulte d'un théorème classique de F. K. Schmidt [35] d'après lequel un corps non-séparablement clos ne peut être muni que d'une seule valuation discrète hensélienne (voir [25], Lemma 8 pour la variante « pro-ℓ »).

Or, dans le cas des corps globaux classiques, Neukirch a obtenu la caractérisation suivante des sous-groupes de décomposition comme ci-dessus : un sous-groupe D de G_K est groupe de décomposition si et seulement si étant donné un nombre premier p, le groupe de cohomologie galoisienne $H^2(G, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ ou 0 pour tout sous-groupe ouvert G de D, selon la présence ou non des racines p-ièmes de l'unité dans le corps fixé par G. Cela se déduit après passage à la limite de la suite exacte d'Albert-Brauer-Hasse-Noether en théorie du corps de classes global. Dans son article [37], Michael Spiess démontre un analogue de ce critère pour K le corps de fonctions d'une courbe sur un corps de nombres, en se basant sur un principe de Hasse cohomologique de K. Kato.

Utilisant le principe de Hasse cohomologique de U. Jannsen (non publié à l'heure actuelle) pour une variété projective lisse sur un corps de nombres, il devrait être possible de prouver un critère similaire dans le cas d'un corps de type fini quelconque sur $\mathbf{Q}$. Mais en fait, la caractérisation est possible en utilisant des outils moins élaborés.

Avant d'expliquer comment, rappelons quelques propriétés des valuations générales (comme références de base, voir [8] ou [10]). Par définition, une *valuation (de Krull)* sur un corps K est une application $v : K \to \Gamma_v \cup \{\infty\}$, où Γ_v est un groupe abélien totalement ordonné, satisfaisant aux axiomes habituels : (1) $v(x) = \infty$ si et seulement si $x = 0$; (2) $v(xy) = v(x) + v(y)$; et (3) $v(x + y) \geq \min(v(x), v(y))$ pour tout $x, y \in K$. L'ensemble des éléments à valuation non négative est un sous-anneau A_v de K, appelé *l'anneau de valuation de* v. C'est un anneau local de corps de fractions K ; notons M_v son idéal maximal et $\kappa(v)$ son corps résiduel. La dimension $\mathrm{rr}(\Gamma_v)$ (éventuellement infinie) du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\Gamma_v \otimes \mathbf{Q}$ est appelée le *rang (rationnel)* de v. Dans le cas où K contient un sous-corps k sur lequel v est triviale, on a l'inégalité fondamentale :

$$\mathrm{tr.deg}(K|k) \geq \mathrm{rr}(\Gamma_v) + \mathrm{tr.deg}(\kappa(v)|k).$$

Les anneaux de valuation sont caractérisés par la propriété suivante : un anneau A de corps de fractions K est l'anneau de valuation d'une valuation de Krull si et seulement si tout $x \in K \setminus A$ satisfait à $x^{-1} \in A$. De cette propriété on déduit immédiatement deux énoncés très utiles pour la suite. Le premier dit que si $A \subset B$ sont des anneaux de valuation ayant même corps de fractions et si B domine A, alors $A = B$. Le deuxième est le suivant : si A est un anneau de valuation de corps de fractions K et corps résiduel κ, l'image réciproque dans A de tout anneau de valuation de κ est un anneau de valuation de K.

Comme dans le cas des valuations discrètes, si $N|K$ est une extension galoisienne (finie ou infinie) et si w est une valuation prolongeant la valuation v, on définit le *sous-groupe de décomposition* $D_w \subset \mathrm{Gal}(N|K)$ associé à w comme le stabilisateur de w.

L'extension des corps résiduels $\kappa(w)|\kappa(v)$ est quasi-galoisienne et le morphisme naturel $D_w \to \mathrm{Gal}\,(\kappa(w)|\kappa(v))$ est surjectif ; on définit le *sous-groupe d'inertie* I_w comme son noyau. Le groupe Γ_w/Γ_v est de torsion ; posons $X_w := \mathrm{Hom}(\Gamma_w/\Gamma_v, \kappa(w)^\times)$. On dispose d'un morphisme naturel $\chi : I_w \to X_w$ défini comme suit : on associe à $\sigma \in I_w$ le caractère χ_σ défini par $\chi_\sigma(\alpha) := \sigma(x)/x \bmod M_w$, avec $x \in N^\times$ un élément arbitraire de valuation α. La caractère χ_σ est bien défini, car on vérifie immédiatement que $\sigma(u)/u = 1 \bmod M_w$ si u est une unité de A_w ou un élément de K. On montre alors que le noyau P_w de $\chi : I_w \to X_w$ est l'unique sous-groupe de (pro)-p-Sylow de I_w, où p est la caractéristique de $\kappa(w)$; il est trivial pour $p = 0$. On appelle P_w le *sous-groupe d'inertie sauvage* et le quotient $I_w^{\mathrm{mod}} := I_w/P_w$ le *groupe d'inertie modéré*. Le groupe I_w^{mod} est donc abélien, isomorphe à $\mathrm{Hom}(\Gamma_w/\Gamma_v, \kappa(w)^\times)$. En particulier :

LEMME 4.1. — Dans le cas où N est la pro-ℓ-extension maximale de K pour un $\ell \neq p$, le groupe $I_w = I_w^{\mathrm{mod}}$ est isomorphe à $\mathbf{Z}_\ell$ si et seulement si $\Gamma_v/\ell\Gamma_v \cong \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$.

Passons maintenant à la construction promise. Elle est basée sur les deux théorèmes remarquables que voici.

THÉORÈME 4.2. — *Soit $\ell \neq 2$ un nombre premier et F un corps satisfaisant à la condition $[F^\times : F^{\times\ell}] \geq \ell^2$. Alors un sous-groupe $D \subset G_F^\ell$ est le sous-groupe de décomposition associé à une valuation (de Krull) w, avec ℓ premier à la caractéristique de $\kappa(w)$ et $\Gamma_w/\ell\Gamma_w \neq 0$, si et seulement si D admet un sous-groupe normal abélien non trivial.*

Par la discussion précédente, la condition du théorème est nécessaire. La suffisance a été démontrée par Engler-Koenigsmann [11]. L'énoncé vaut également pour $\ell = 2$ avec toutefois un cas exceptionnel : voir Efrat [9] et Engler-Nogueira [12]. Les démonstrations utilisent des constructions algébriques complètement explicites et élémentaires.

L'autre ingrédient essentiel est le suivant :

THÉORÈME 4.3. — *Soit K un corps de type fini sur un corps parfait k. Supposons $k = \mathbf{Q}$ où* $\mathrm{tr.deg}(K|k) > 1$. *Alors G_K n'admet pas de sous-groupe normal fermé pro-résoluble non trivial. De même, G_K^ℓ n'admet pas de sous-groupe normal fermé abélien non trivial.*

C'est une application du théorème d'irréductibilité de Hilbert. Pour le premier énoncé, voir [14], Theorem 15.10. Le deuxième découle du premier (*cf.* [28], Lemma 1.15).

Nous pouvons maintenant procéder au

THÉORÈME 4.4. — *Soient K, L et Φ comme le th. 1.1 ou le th. 1.3. Dans la situation du th. 1.1, on suppose de plus que K et L ne sont pas des corps globaux classiques. Alors Φ induit une bijection entre les valuations divisorielles de K et de L.*

Nous ne donnons la preuve qu'en caractéristique positive ; pour des remarques concernant le cas de caractéristique 0, voir plus bas.

La démonstration va utiliser à un moment le th. 4.2 que nous n'avons énoncé que pour $\ell \neq 2$; on peut montrer en se basant sur les résultats de Efrat/Engler-Nogueira cités ci-dessus qu'il est également applicable pour $\ell = 2$.

Démonstration. — Dans la situation du th. 1.1, choisissons un nombre premier ℓ premier à la caractéristique (que l'on suppose désormais positive), et passons à l'isomorphisme $G_K^\ell \cong G_L^\ell$ induit par Φ, que l'on va abusivement noter de la même façon.

Soit v une valuation divisorielle de K, et soit $D_w \subset G_K^\ell$ le groupe de décomposition associé à un prolongement w de v. D'après les rappels sur les valuations (en particulier le lemme 4.1), D_w est extension de $G_{\kappa(v)}^\ell$ par le sous-groupe d'inertie (modérée) $I_w \cong \mathbf{Z}_\ell$. D'après le th. 4.3, I_w est donc l'unique sous-groupe normal abélien fermé maximal de D_w. Posons $D := \Phi(D_w)$. Il admet $\Phi(I_w)$ comme sous-groupe normal abélien non trivial, donc il est égal au groupe de décomposition $D_{w'}$ d'une valuation de Krull w' d'après le th. 4.2. Comme $\Phi(I_w) \cong \mathbf{Z}_\ell$ est le sous-groupe normal abélien maximal de $D_{w'}$, il ne peut être que le sous-groupe d'inertie ; toujours d'après le lemme 4.1, la restriction v' de w' à L satisfait à $\Gamma_{v'}/\ell\Gamma_{v'} \cong \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$. Ensuite, notons que v' est nécessairement triviale sur la clôture algébrique l du corps premier (fini) dans L. On a alors $\mathrm{tr.deg}(L|l) = 1 + \mathrm{tr.deg}(\kappa(v')|l)$. Cela se vérifie en utilisant les théorèmes de transition de Tate en cohomologie galoisienne (*cf.* [36], §II.4) : ils nous apprennent en effet que les degrés de transcendance de L (resp. $\kappa(v')$) se lisent sur la *dimension cohomologique* de G_L^ℓ (resp. $G_{\kappa(v')}^\ell$) et que ces dimensions cohomologiques diffèrent de 1. Enfin, par comparaison avec l'inégalité fondamentale $\mathrm{tr.deg}(L|l) \geq \mathrm{rr}(v') + \mathrm{tr.deg}(\kappa(v')|l)$, on obtient $\mathrm{rr}(v') = 1$. Comme d'autre part $\Gamma_{v'}/\ell\Gamma_{v'} \cong \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$, v' est discrète. $\square$

Notons que la preuve donnée ci-dessus montre également que Φ induit un isomorphisme entre les sous-groupes de décomposition et d'inertie associés à w (resp. w') dans G_K^ℓ (resp. G_L^ℓ), d'où également un isomorphisme $G_{\kappa(v)}^\ell \cong G_{\kappa(v)}^\ell$.

En caractéristique 0, la situation est plus compliquée, car la valuation v' construite ci-dessus pourrait être non triviale sur le corps de base l, et de caractéristique résiduelle positive. Dans la situation du th. 1, Pop surmonte cette difficulté (voir [28], pp. 163–170 pour les détails) en considérant simultanément tous les ℓ, en montrant que la valuation v' obtenue ci-dessus ne dépend pas de ℓ et et que ses sous-groupes de décomposition et d'inertie dans G_L tout entier sont isomorphes à ceux de v via Φ. Ainsi, $G_{\kappa(v)} \cong G_{\kappa(v')}$; en particulier, la ℓ-dimension cohomologique de $\kappa(v')$ est > 1 pour tout nombre premier ℓ, donc $\kappa(v')$ ne peut être que de caractéristique 0. On montre alors de la même façon que v' est divisorielle. La cas de caractéristique 0 du th. 1.3 est encore plus compliqué et utilise la théorie des éléments d'inertie (*cf.* le chap. 9) ; nous ne le discutons pas ici.

Voici une application, annoncée au chapitre précédent.

PROPOSITION 4.5. — *Soient K, L deux corps de type fini sur $\mathbf{Q}$, soit $\Phi : G_K \xrightarrow{\sim} G_L$ un isomorphisme comme dans le th. 1.1, et soit k (resp. l) la clôture algébrique du corps* *premier dans K (resp. L). Alors Φ transforme la projection $G_K \to G_k$ en la projection $G_L \to G_l$.*

Démonstration. — Soit X une k-variété projective lisse géométriquement intègre ayant K comme corps de fonctions (une telle X existe d'après le théorème de désingularisation de Hironaka), et soit H_X le sous-groupe fermé de G_K engendré par les sous-groupes d'inertie associés aux points de codimension 1 de X. Comme X est régulier, la description du groupe fondamental d'un schéma normal jointe au théorème de Zariski sur la pureté du lieu de ramification (*cf.* [16], exposé X) montrent que le quotient G_K/H_X est isomorphe au groupe fondamental de X. Mais ce dernier groupe est extension de G_k par le groupe fondamental de $X \times_k \bar{k}$, où $\bar{k} \supset k$ est une clôture algébrique ; on sait que ce dernier groupe est topologiquement de type fini (voir [15]). Ainsi, si maintenant H_K est le sous-groupe fermé de K engendré par les sous-groupes d'inertie de *toutes* les valuations divisorielles, on obtient que $\Pi_K := G_K/H_K$ est extension de G_k par un sous-groupe fermé F_K topologiquement de type fini. Procédant de façon analogue pour L, on construit des groupes H_L, Π_L et F_L. D'après le th. 4.4, Φ induit des isomorphismes $H_K \cong H_L$ et $\Pi_K \cong \Pi_L$. Mais $\Phi(F_K) \subset F_L$, car G_l n'admet pas de sous-groupes normaux fermés non triviaux qui sont topologiquement de type fini (à nouveau par le théorème d'irréductibilité de Hilbert, *cf.* [14], th. 15.10). D'où $\Phi(F_K) = F_L$ par symétrie, et la proposition est établie. □

Nous disposons donc un isomorphisme $G_k \cong G_l$; le théorème de Neukirch-Uchida cité au chap. 2 permet d'en déduire l'existence d'un isomorphisme $k \cong l$.

Conformément à la stratégie du chapitre précédent, nous allons utiliser la proposition ci-dessus dans la preuve du th. 1.1 en caractéristique 0. En revanche, en caractéristique positive nous ne démontrons ici que l'énoncé plus faible ci-dessous, ce qui est déjà suffisant pour déduire le th. 1.1 du th. 1.3 (voir la remarque 8.6).

PROPOSITION 4.6. — *Soient K, L deux corps de type fini sur un corps fini, k et l comme dans la proposition précédente, et soit $\Phi : G_K^\ell \to G_L^\ell$ un isomorphisme avec ℓ premier à la caractéristique de K et L. Alors Φ transforme la projection $G_K^\ell \to G_k^\ell$ en la projection $G_L^\ell \to G_l^\ell$.*

Démonstration. — Prenons pour X une k-variété lisse (non nécessairement projective), géométriquement intègre, de corps de fonctions K. Comme ci-dessus, le pro-ℓ-quotient maximal $\pi_1^\ell(X)$ du groupe fondamental de X est le quotient de G_K^ℓ par un sous-groupe normal fermé H_X. Or d'après un théorème de Katz et Lang [20], l'abélianisé $\pi_1^{\mathrm{ab},\ell}(X)$ est extension de $G_k^\ell \cong \mathbf{Z}_\ell$ par un ℓ-groupe fini. Le noyau de la projection $\pi_1^{\mathrm{ab},\ell}(X) \to G_k^\ell$ n'est donc autre que le sous-groupe de torsion de $\pi_1^{\mathrm{ab},\ell}(X)$. On termine la preuve de manière similaire au cas précédent, en remarquant que la preuve du th. 4.4 a permis de répérer les sous-groupes de décomposition des points de codimension 1 déjà dans G_K^ℓ. □

On peut montrer que k et l ont même cardinalité par un argument de récurrence sur la dimension se basant sur les estimations de Hasse-Weil sur le nombre de points des courbes sur un corps fini (voir [32], chap. 2) ; nous n'aurons pas besoin de ce résultat.

5. MODÈLES

Soient k un corps parfait et K une extension de type fini de k. Appelons *modèle* de $K|k$ toute k-variété (i.e. k-schéma intègre de type fini) X dont le corps de fonctions est isomorphe à K. Dans la suite, on identifie souvent les anneaux locaux de X à des sous-anneaux de K contenant k.

On a vu au chapitre 4 que si K est comme dans le th 1.1 (resp. le th. 1.3), l'ensemble des anneaux de valuation divisoriels ayant K pour corps de fractions est encodé dans G_K (resp. dans son pro-ℓ-quotient maximal pour ℓ premier à la caractéristique de K). Évidemment, l'anneau local d'un modèle normal de X en un point de codimension 1 est un tel anneau. Réciproquement, étant donné un anneau de valuation divisoriel $A \subset K$, c'est un exercice facile de construire un modèle normal de K dont A est un anneau local.

Lorsque $\mathrm{tr.deg}(K|k) = 1$, tout anneau de valuation divisoriel est un anneau local de l'unique modèle propre et normal de $K|k$. Mais en dimension supérieure, un tel modèle n'est pas unique.

La tâche suivante est donc la caractérisation des ensembles d'anneaux de valuation divisoriels provenant d'*un seul* modèle normal X de K lorsque $\mathrm{tr.deg}(K|k) > 1$. L'exemple type d'un anneau de valuation divisoriel ne provenant pas de X s'obtient comme suit : éclatons un point P de codimension > 1 du k-schéma X et prenons l'anneau local du schéma éclaté à un point générique du diviseur exceptionnel. Heureusement, lorsque P est un point régulier, le corps résiduel de cet anneau possède une propriété géométrique particulière qui va nous permettre de le distinguer : il est le corps de fonctions du diviseur exceptionnel qui est un fibré projectif dans ce cas – en particulier, c'est une variété qui contient beaucoup de courbes *rationnelles* (i.e. birationnelles, après passage à la clôture algébrique du corps de base, à la droite projective). Pop considère alors la notion suivante :

DÉFINITION 5.1. — *Une variété X est dite* antiréglée *si l'ensemble des points des courbes rationnelles contenues dans X n'est pas Zariski dense.*

REMARQUE 5.2. — On a la relation suivante à des classes de variétés plus souvent étudiées en géométrie algébrique. Rappelons (*cf.* [21], Proposition IV.1.3) qu'une variété est *uniréglée* si, après changement de base à un corps algébriquement clos non dénombrable, elle admet un *ouvert* dense dont chaque point est contenu dans une courbe rationnelle. Mais, comme nous fait remarquer J.-L. Colliot-Thélène, il existe des variétés non uniréglées qui ne sont pourtant pas antiréglées : prendre, par exemple, une surface K3 complexe admettant une fibration au-dessus de la droite projective dont la fibre générique est une courbe elliptique sur $\mathbf{C}(t)$ ayant une infinité de points rationnels ; la surface contient alors une infinité de courbes rationnelles, mais pas d'ouvert dense couvert par ces courbes. Ainsi, être antiréglé est une notion plus forte que d'être non uniréglé.

On vérifie immédiatement, en se servant du théorème de Lüroth, la propriété suivante.

LEMME 5.3. — Soit $Y \dashrightarrow X$ une application rationnelle dominante et génériquement finie de k-variétés. Alors si X est antiréglée, il en est de même pour Y. En particulier, être antiréglé est une propriété birationnelle.

Le deuxième énoncé du lemme permet en particulier d'introduire les notions suivantes.

DÉFINITION 5.4. — *Un corps de type fini sur k est dit antiréglé s'il est le corps de fonctions d'une k-variété antiréglée. L'anneau local d'un point d'un k-schéma de type fini est antiréglé si son corps résiduel l'est.*

Nous aurons également besoin du lemme suivant :

LEMME 5.5. — Soit K un corps de type fini sur k. Alors il existe une extension finie $K'|K$, avec K' un corps antiréglé. On peut même supposer que le degré $[K' : K]$ est une puissance d'un nombre premier ℓ donné.

Démonstration. — Si K est non antiréglé, une construction simple est la suivante. Soit X un modéle de $K|k$. On peut supposer X affine, équipé d'un morphisme fini $X \to \mathbf{A}^n$ par le lemme de normalisation de Noether. Or $\mathbf{A}^n$ admet beaucoup de revêtements finis antiréglés de degré une puissance de ℓ : prendre, par exemple, un produit $Z = C_1 \times \cdots \times C_n$ de n courbes lisses, affines, munies de projections $C_i \to \mathbf{A}^1$ de degré une puissance de ℓ, et dont le compactifié est de genre positif ; on vérifie en utilisant le théorème de Lüroth que Z est antiréglé (en fait, il ne contient point de courbe rationnelle). On peut alors prendre pour K' le corps de fonctions d'une composante du produit fibré $X \times_{\mathbf{A}^n} Z$ qui domine Z ; celle-ci est antiréglée d'après le lemme 5.3. $\square$

Après ces préparations, on peut procéder à la caractérisation promise. D'abord une terminologie : on dit que deux ensembles S et T sont *presque égaux* si les différences $S \setminus (S \cap T)$ et $T \setminus (S \cap T)$ sont finies.

DÉFINITION 5.6. — *Soit K un corps de type fini sur le corps parfait k. Notons $\mathcal{D}_K$ l'ensemble des anneaux de valuation divisoriels dont le corps de fractions est K. On appelle un sous-ensemble $S \subset \mathcal{D}_K$* géométrique *s'il est presque égal à l'ensemble des anneaux locaux des points de codimension 1 d'un modèle normal de $K|k$.*

REMARQUE 5.7. — Dans la définition ci-dessus, on peut même supposer que le modèle normal en question est *propre*. En effet, si U est un modèle normal de $K|k$, on peut le réaliser comme sous-schéma ouvert d'un modèle normal propre X (normaliser une compactification de Nagata). Le complément $X \setminus U$ est un fermé propre, donc ne contient qu'un nombre fini de points de codimension 1.

On a le lemme suivant :

LEMME 5.8. — Si $K'|K$ est une extension finie de K, un sous-ensemble $U \subset \mathcal{D}_K$ est géométrique si et seulement si l'ensemble U' formé des éléments $A' \in \mathcal{D}_{K'}$ satisfaisant à $A' \cap K \in U$ l'est.

C'est évident (si U est géométrique, normaliser un modèle normal correspondant à U dans K' ; la réciproque est similaire).

Vient alors le point clef :

PROPOSITION 5.9. — *Soit K un corps de type fini* antiréglé *sur le corps parfait k, avec* tr.deg$(K|k) > 1$. *Alors un sous-ensemble $S \subset \mathcal{D}_K$ est géométrique si et seulement si il est presque égal au sous-ensemble de $\mathcal{D}_K$ constitué par les anneaux de valuation divisoriels antiréglés.*

Démonstration. — Soit X un modèle normal de $K|k$. Remarquons d'abord que comme X est antiréglé, il n'admet qu'un nombre fini de points de codimension 1 dont l'anneau local n'est pas antiréglé. Ceci est dû au fait que par hypothèse l'adhérence des courbes rationnelles dans X est un sous-schéma fermé propre.

Ainsi, tenant compte de la remarque 5.7, il suffit de démontrer que si X est propre et A est un élément antiréglé de $\mathcal{D}_K$, alors A est l'anneau local d'un point de codimension 1 de X. Pour ce faire, traitons d'abord le cas où X est régulier. Comme X est également supposé propre, A domine l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ d'un point x de X par le critère valuatif de propreté. Si x est de codimension 1, $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète et on a nécessairement $A = \mathcal{O}_{X,x}$. Sinon, éclatons x ; alors A domine l'anneau local d'un point $\tilde{x}$ du schéma éclaté $\tilde{X}$ contenu dans le diviseur exceptionnel. D'après un lemme classique de Zariski (*cf.* [41], Theorem 10 pour le cas typique de dimension 2), en répétant ce procédé un nombre fini de fois, on arrive à un point de codimension 1. Mais il est alors point générique du diviseur exceptionnel provenant de l'éclatement d'un point régulier. Son anneau local est donc non antiréglé (en fait uniréglé), ce qui contredit le choix de A.

Dans le cas général, on peut trouver, d'après le théorème d'altération de de Jong ([19], [3]), une variété projective lisse Y équipée d'un morphisme propre dominant génériquement fini $\pi : Y \to X$. Or Y est antiréglée en vertu du lemme 5.3, donc le cas précédent s'y applique. On conclut par le lemme 5.8 et par la remarque que π étant dominant, son image contient les points de codimension 1 de X sauf pour un nombre fini. $\square$

Nous arrivons maintenant à la caractérisation des ensembles géométriques.

THÉORÈME 5.10. — *Soient $K|k, L|l$ et Φ comme dans les théorèmes 1.1 ou 1.3. Alors Φ induit une bijection entre les sous-ensembles géométriques de $\mathcal{D}_K$ et $\mathcal{D}_L$.*

Démonstration. — L'énoncé est évident lorsque tr.deg$(K|k)$ = tr.deg$(L|l) = 1$: les ensembles géométriques sont les sous-ensembles cofinis de $\mathcal{D}_K$.

Supposons donc $\mathrm{tr.deg}(K|k) = \mathrm{tr.deg}(L|l) > 1$. D'après le lemme 5.8, il suffit de démontrer l'énoncé après passage à un sous-groupe ouvert dans $G_K \cong G_L$ (resp. $G_K^\ell \cong G_L^\ell$), i.e. à des extensions finies de K et L. En vertu des lemmes 5.3 et 5.5, on peut supposer K et L antiréglés, et le théorème résulte alors de la proposition précédente et du fait que la bijection du th. 4.4 envoie les éléments antiréglés de $\mathcal{D}_K$ sur ceux de $\mathcal{D}_L$. Dans la situation du th. 1.3, ce dernier fait sera vérifié pour $\mathrm{tr.deg}(K|k) = \mathrm{tr.deg}(L|l) = 2$ dans la remarque 9.5 (2). Dans tous les autres cas, on peut supposer par récurrence sur le degré de transcendance que Φ induit un isomorphisme sur les corps résiduels, d'où le résultat. □

6. RÉCURRENCE

Une bonne partie des démonstrations des th. 1.1 et 1.3 procède par récurrence sur le degré de transcendance commun des corps K et L. Dans la situation du th. 1.1, le point de départ est le cas des corps globaux classiques, où le résultat est connu d'après les travaux de Neukirch et Uchida cités au chap. 2. Dans la situation du th. 1.3, la récurrence part du cas de degré de transcendance 2.

L'idée de la récurrence (déjà utilisée dans la dernière preuve ci-dessus) est la suivante : si A est un élément de $\mathcal{D}_K$ et $A' \in \mathcal{D}_L$ l'anneau que lui correspond par la bijection établie au chap. 4, on peut supposer (sauf dans le cas exceptionnel $\mathrm{tr.deg}(K|k) = \mathrm{tr.deg}(L|l) = 2$ du th. 1.3) par récurrence que leurs corps résiduels sont isomorphes, car ils ont un degré de transcendance inférieur à celui de K et L. On peut alors essayer de relever et recoller ces isomorphismes en un isomorphisme entre K et L. Dans le cas où K et L sont de type fini sur $\mathbf{Q}$, c'est possible ; dans les autres cas on n'obtient qu'un résultat partiel.

Pour construire des relèvements, on exploite les résultats géométriques du chapitre précédent. Nous adaptons ici des arguments de l'article de Michael Spieß [37].

Soit donc K un corps de type fini sur un corps parfait k ; on peut supposer k algébriquement clos dans K. Par ce qui précède, on peut se borner aux cas où $\mathrm{tr.deg}(K|k) > 1$ ainsi qu'au cas où $\mathrm{tr.deg}(K|k) = 1$ et k est un corps de nombres.

Lemme 6.1. —

(1) Soit U un modèle normal de $K|k$. Alors $\mathcal{O}^\times(U)/k^\times$ est un groupe abélien libre de type fini, où $\mathcal{O}^\times(U)$ est l'anneau des fonctions régulières inversibles sur U.

(2) Il existe un ensemble fini $P_1, \ldots, P_m$ de points de codimension 1 de U tel que le morphisme de réduction naturel vers les corps résiduels

$$\mathcal{O}^\times(U) \to \bigoplus_{i=1}^{m} \kappa(P_i)^\times$$

soit injectif.

Démonstration. — Soit X un modèle propre normal de $K|k$ dont U est un sous-schéma ouvert. Alors on dispose d'une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}^\times(X) \to \mathcal{O}^\times(U) \to \mathrm{Div}_{X\setminus U}(X)$$

où $\mathrm{Div}_{X\setminus U}(X)$ est le groupe abélien (libre de type fini) des diviseurs de Weil concentrés sur $X \setminus U$. Comme X est propre, et également géométriquement connexe d'après l'hypothèse sur $K|k$, on a $\mathcal{O}^\times(X) \cong k^\times$, d'où le premier énoncé.

Pour le second, soit d'abord P_1 un point de codimension 1 quelconque de U. Notons C_1 le noyau de la réduction $\mathcal{O}^\times(U) \to \kappa(P_1)^\times$. Évidemment $C_1 \cap k^\times = \{1\}$, donc C_1 est libre de type fini. Soit x un générateur de C_1. Choisissons le point $P_2 \neq P_1$ de sorte que l'image $\bar{x}$ de x dans $\kappa(P_2)$ soit différente d'une racine de l'unité (dans le cas où $\mathrm{tr.deg}(\kappa(P_2)|k) > 0$ on peut même prendre $\bar{x}$ transcendant sur k). Alors le noyau C_2 du morphisme $\mathcal{O}^\times(U) \to \kappa(P_1)^\times \oplus \kappa(P_2)^\times$ a un rang plus petit que celui de C_1. En continuant ce procédé, on arrive à un noyau trivial en temps fini. □

Nous pouvons maintenant démontrer le th. 1.1 en caractéristique 0.

THÉORÈME 6.2. — *Soient K, L deux corps de type fini sur $\mathbf{Q}$. Supposons qu'il existe un isomorphisme $\Phi : G_K \xrightarrow{\sim} G_L$ de groupes profinis. Alors il existe un isomorphisme $\phi : L \xrightarrow{\sim} K$ de corps induisant Φ.*

Démonstration. — Si $\mathrm{tr.deg}(K|\mathbf{Q}) = \mathrm{tr.deg}(L|\mathbf{Q}) = 0$, c'est le théorème de Neukirch-Uchida cité au chap. 2. Supposons donc le théorème connu pour les corps de degré de transcendance plus petit que $\mathrm{tr.deg}(K|\mathbf{Q})$.

Soit U un modèle normal de $K|k$. D'après le th. 5.10, quitte à remplacer U par un ouvert, on peut supposer que Φ induit une bijection entre les points de codimension 1 de U et ceux d'un modèle normal U' de L. Soit $P_1, \dots, P_m$ un ensemble de points de U comme dans le lemme précédent et soit P_i' $(i = 1, \dots, m)$ le point de U' correspondant à P_i par la bijection induite par Φ. Quitte à agrandir l'ensemble des P_i (ce qui n'affecte pas l'injectivité du morphisme $\mathcal{O}^\times(U) \to \oplus\, \kappa(P_i)^\times$), on peut supposer que le morphisme $\mathcal{O}^\times(U') \to \oplus\, \kappa(P_i')^\times$ est également injectif.

Nous voulons maintenant définir un morphisme $\phi_U : \mathcal{O}^\times(U) \to \mathcal{O}^\times(U')$ rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}^\times(U) & \xrightarrow{\phi_U} & \mathcal{O}^\times(U') \\
{\scriptstyle r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r'} \\
\bigoplus_{i=1}^{m} \kappa(P_i)^\times & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{i=1}^{m} \kappa(P_i')^\times
\end{array}$$

commutatif, où le morphisme du bas est un isomorphisme par l'hypothèse de récurrence. Comme les morphismes verticaux sont injectifs, ϕ_U est alors nécessairement un isomorphisme. Pour l'existence de ϕ_U, il suffit de montrer que le morphisme naturel ψ_U : $\mathcal{O}^\times(U) \to \mathrm{coker}\,(r')$ induit par les morphismes connus du diagramme est trivial.

Or d'après l'argument de théorie de Kummer expliqué au chap. 3, on dispose pour tout $n > 0$ des isomorphismes compatibles $K^\times/K^{\times n} \cong L^\times/L^{\times n}$. D'autre part, la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}^\times(U) \to K^\times \to \mathrm{Div}\,(U)$$

implique que le morphisme naturel $\mathcal{O}^\times(U)/n \to K^\times/n$ est injectif (car $\mathrm{Div}\,(U)$ est sans torsion). Ainsi, par fonctorialité des isomorphismes de Kummer, on dispose de morphismes compatibles $\phi_{U,n}:\ \mathcal{O}^\times(U)/n \to \mathcal{O}^\times(U')/n$ rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}^\times(U)/n & \xrightarrow{\phi_{U,n}} & \mathcal{O}^\times(U')/n \\
{\scriptstyle r_n}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle r'_n} \\
\bigoplus_{i=1}^{m} \kappa(P_i)^\times/n & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{i=1}^{m} \kappa(P'_i)^\times/n
\end{array}$$

commutatif. Par conséquent, l'image du morphisme ψ_U défini ci-dessus est contenu dans le sous-groupe divisible de $\mathrm{coker}\,(r')$. Mais ce dernier sous-groupe est trivial, car $\mathrm{coker}\,(r')$, étant le conoyau du morphisme $\mathcal{O}^\times(U')/k^\times \to \oplus\,\kappa(P'_i)^\times/k^\times$, est le quotient d'un groupe libre (somme directe des groupes des diviseurs principaux sur des modèles propres des $\kappa(P'_i)$) par un sous-groupe libre de type fini – il est donc extension d'un groupe libre par un groupe fini.

Ergo habemus ϕ_U. On vérifie immédiatement qu'en prenant U de plus en plus petit, les isomorphismes ϕ_U ainsi obtenus sont compatibles, d'où un isomorphisme $K^\times \xrightarrow{\sim} L^\times$ car tout élément de $K^\times$ définit une fonction régulière sur U suffisamment petit. Enfin, en considérant l'image d'éléments $x, y, x+y \in K$ arbitrairement choisis dans une infinité de $\kappa(P)$, on vérifie (en utilisant l'hypothèse de récurrence) qu'en rajoutant les éléments 0 on obtient une bijection additive. $\square$

En examinant la preuve donnée ci-dessus, on voit que le seul obstacle qui l'empêche de s'appliquer à la situation du th. 1.3 est que là, on ne connaît la correspondance de Kummer que pour n une puissance du nombre premier ℓ. (Il y a un problème similaire dans le cas du th. 1.1 en caractéristique positive, où n doit être supposé premier à la caractéristique.) Or le conoyau de r' peut très bien contenir des éléments ℓ-divisibles non triviaux, à savoir les éléments d'un sous-groupe fini d'ordre premier à ℓ. Mais l'on peut tuer ce sous-groupe en tensorisant avec $\mathbf{Z}_{(\ell)}$, le localisé de $\mathbf{Z}$ en (ℓ). Ainsi, dans la situation du th. 1.3, en supposant $\mathrm{tr.deg}(K|k) > 2$ et le résultat connu pour les corps de degré de transcendance plus petit, on peut au moins déduire l'existence d'un isomorphisme de $\mathbf{Z}_{(\ell)}$-modules $\phi_\ell:\ K^\times \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)} \xrightarrow{\sim} L^\times \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)}$.

Mais en fait, pour mener à bien la preuve du th. 1.3, on peut se contenter d'un énoncé un peu plus faible. Au chapitre 9, nous allons donner des indications sur la caractérisation de l'image de $K^\times/k^\times \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)}$ dans $K^{\times(\ell)}$ dans le cas $\mathrm{tr.deg}(K|k) = 2$. Admettons pour le moment que l'on connaît ce résultat. Alors on peut mettre en marche la récurrence précédente et l'on obtient :

Proposition 6.3. — *Soient K, L, Φ comme dans le théorème 1.3. Alors (quitte à passer à des extensions purement inséparables en caractéristique positive) il existe un isomorphisme de $\mathbf{Z}_{(\ell)}$-modules*

$$\phi_\ell : (K^\times/k^\times) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)} \xrightarrow{\sim} (L^\times/l^\times) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)}$$

s'insérant dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (K^\times/k^\times) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)} & \xrightarrow{\cong} & (L^\times/l^\times) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ K^{\times(\ell)} & \xrightarrow{\cong} & L^{\times(\ell)} \end{array}$$

7. PROJECTIONS

Dans ce chapitre et le suivant, nous complétons la démonstration du th. 1.3 (modulo le résultat pour $\mathrm{tr.deg}(K|k) = 2$ admis au chapitre précédent). Cette partie de la démonstration utilise plusieurs idées remontant au travail [5] de Bogomolov ; outre les textes de Pop, la consultation de [7] nous a été très utile lors de la rédaction de ces deux chapitres.

Dans la démonstration, un outil de première importance est la considération des quotients de G_K^ℓ et G_L^ℓ correspondant à des morphismes d'un modèle propre normal de K (resp. L) vers la droite projective. Dans ce chapitre, nous étudions ces quotients.

Appelons une fonction $x \in K$ *générale* si le sous-corps $k(x)$ est algébriquement clos dans K. La signification géométrique de cette définition est la suivante. Soit $X|k$ un modèle projectif normal de $K|k$. La fonction x induit une application rationnelle $\pi_x : X \to \mathbf{P}_k^1$ définie en codimension 1 ; quitte à éclater X, on peut donc supposer que π_x est un morphisme.

Lemme 7.1. — Dans la situation ci-dessus, supposons en plus que le morphisme π_x est séparable. Alors x est une fonction générale si et seulement si les fibres de π_x sont connexes.

Démonstration. — Comme X est supposé projectif, le morphisme $\pi_x : X \to \mathbf{P}_k^1$ se factorise en un composé $X \xrightarrow{c_x} C \xrightarrow{f_x} \mathbf{P}_k^1$, où f_x est fini et les fibres de c_x sont connexes, d'après le théorème de factorisation de Stein. Le morphisme séparable f_x est un isomorphisme si et seulement si x est une fonction générale, d'où le lemme. □

Toute projection $\pi_x : X \to \mathbf{P}_k^1$ suffisamment générale (au sens de la géométrie algébrique) est à fibres connexes, ce qui explique la terminologie. D'autre part, utilisant cette remarque on montre facilement que les fonctions générales engendrent l'extension $K|k$.

Le groupe de Galois $G_{k(x)}^\ell$ est de façon naturelle quotient du groupe G_K^ℓ (rappeler que nous sous-entendons qu'une clôture séparable de K a été fixée). Notre objectif suivant est de montrer que l'isomorphisme Φ du th. 1.3 respecte ce type de quotients.

Commençons par montrer que Φ induit une bijection entre les quotients de G_K^ℓ et G_L^ℓ provenant de sous-corps algébriquement clos dans K (resp. L) de degré de transcendance 1.

PROPOSITION 7.2. — *Soit t une fonction (non nécessairement générale) de K, et soit T la clôture algébrique de $k(t)$ dans K. Notons N_T le noyau de la projection $G_K^\ell \to G_T^\ell$. Alors il existe un sous-corps $T' \subset L$, de degré de transcendance 1 sur le corps des constantes $l \subset L$, donnant lieu à un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} G_L^\ell \arrow[r] \arrow[d, "="] & G_L^\ell/\Phi(N_T) \arrow[d, "\cong"] \\ G_L^\ell \arrow[r] & G_{T'}^\ell \end{tikzcd}$$

Avant de démontrer la proposition, rappelons quelques faits bien connus sur le *symbole modéré* : pour un corps F muni d'une valuation discrète v, c'est le morphisme de groupes $\partial_v : F^\times \times F^\times \to \kappa(v)^\times$ qui associe à un couple (f,g) l'image de $(-1)^{v(f)v(g)} f^{v(g)}/g^{v(f)}$ dans $\kappa(v)^\times$. De plus, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} F^{\times(\ell)} \times F^{\times(\ell)} \arrow[r, "\partial_v"] \arrow[d] & \kappa(v)^{\times(\ell)} \arrow[d] \\ H^2(G_F^\ell, \mathbf{Z}_\ell) \arrow[r] & H^1(G_{\kappa(v)}^\ell, \mathbf{Z}_\ell) \end{tikzcd}$$

où les morphismes verticaux proviennent de la théorie de Kummer (suivie d'un cup-produit pour le morphisme de gauche) et le morphisme horizontal du bas est un morphisme *résidu* en cohomologie galoisienne (voir l'appendice à la partie II de [36]). Les groupes de cohomologie à coefficients dans $\mathbf{Z}_\ell$ sont définis ici par passage à la limite projective à partir de ceux à coefficients $\mathbf{Z}/\ell^m\mathbf{Z}$.

Démonstration. — Le groupe $H^1(G_T^\ell, \mathbf{Z}_\ell)$ s'identifie à un sous-groupe de $H^1(G_K^\ell, \mathbf{Z}_\ell)$. D'après le théorème de Tsen, G_T^ℓ est de dimension cohomologique 1, donc le produit $H^1(G_T^\ell, \mathbf{Z}_\ell) \times H^1(G_T^\ell, \mathbf{Z}_\ell)$ est annulé par le cup-produit

$$H^1(G_K^\ell, \mathbf{Z}_\ell) \times H^1(G_K^\ell, \mathbf{Z}_\ell) \to H^2(G_K^\ell, \mathbf{Z}_\ell).$$

Il en est alors de même pour le sous-groupe $H^1(G_K^\ell/\Phi(N_T), \mathbf{Z}_\ell) \subset H^1(G_L^\ell, \mathbf{Z}_\ell) \cong L^{\times(\ell)}$. Considérons les éléments de $\Phi(K^\times \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)}) = L^\times \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)} \subset L^{\times(\ell)}$ contenus dans ce sous-groupe. Il s'agit de montrer qu'ils proviennent tous d'éléments de $L^\times$ qui sont algébriquement dépendants sur l. Or, si f, g sont deux éléments non constants de L qui sont algébriquement indépendants, alors leurs images dans $H^1(G_L^\ell, \mathbf{Z}_\ell)$ ont un cup-produit non trivial. Ce dernier fait se vérifie, par exemple, en utilisant le symbole modéré. En effet, on voit aisément qu'il existe une valuation discrète v de L telle que $\partial_v(f,g) \neq 1$ (on peut prendre pour v la valuation divisorielle provenant d'un point générique du diviseur de f sur un modèle propre et normal de L ; alors $v(f) > 0$, mais $v(g) = v(g-1) = 0$, *cf.* [7], Lemma 10.1). On conclut par le diagramme ci-dessus que le cup-produit des classes de f et g dans $H^1(G_L^\ell, \mathbf{Z}_\ell)$ a un résidu non trivial, donc il est lui-même non trivial. □

Soit maintenant $T \subset K$ un sous-corps de degré de transcendance 1 comme ci-dessus. Prenons des modèles projectifs normaux X et C de $K|k$ et de $T|k$, respectivement. Quitte à éclater X, on peut supposer que l'inclusion $T \subset K$ est induite par un morphisme (nécessairement surjectif) $\pi : X \to C$. En particulier, tout point fermé de C est l'image d'un point de codimension 1 de X. Ces points donnent lieu à des sous-groupes d'inertie *canoniques* dans les abélianisés $G_T^{\mathrm{ab},\ell}$ et $G_K^{\mathrm{ab},\ell}$, respectivement, et en plus, tout sous-groupe d'inertie dans $G_K^{\mathrm{ab},\ell}$ associé à un point P de C est l'image du sous-groupe d'inertie associé à un point de codimension 1 dans $\pi^{-1}(P)$. D'après la proposition précédente, T correspond par l'isomorphisme Φ à un sous-corps $T' \subset L$, de degré de transcendance 1. Une application du th. 4.4 (aux corps K et L) et la discussion précédente montrent alors que Φ envoie isomorphiquement les sous-groupes d'inertie contenus dans $G_T^{\mathrm{ab},\ell}$ sur ceux de $G_{T'}^{\mathrm{ab},\ell}$.

Soit I_T le sous-groupe fermé de $G_T^{\mathrm{ab},\ell}$ engendré par les sous-groupes d'inertie. Le quotient $G_T^{\mathrm{ab},\ell}/I_T$ est isomorphe au pro-ℓ-quotient abélien maximal $\pi_1^{\mathrm{ab},\ell}(C)$ du groupe fondamental de la courbe C. On sait (cf. la remarque 1.4 (2)) que c'est un pro-ℓ-groupe abélien libre dont le rang est le double du genre g de C. Ainsi, si C' est la courbe propre lisse correspondant au corps T' défini ci-dessus, la discussion précédente implique que C et C' ont même genre ; en particulier, C est rationnelle si et seulement si C' l'est. Donc nous avons finalement démontré :

Corollaire 7.3. — *Soit x une fonction générale de K définissant un sous-corps $k(x)$ algébriquement clos dans K. Alors il existe une fonction générale $y \in L$ telle que l'on ait $\Phi(G^\ell_{k(x)}) = G^\ell_{l(y)}$.*

Concentrons-nous maintenant sur le sous-groupe I_T. Soit $(i_1, \ldots, i_r) \subset I_T$ une famille de générateurs de sous-groupes d'inertie associés à des points fermés $P_1, \ldots, P_r$ de C. Notons U la sous-courbe ouverte de C obtenue en enlevant les points fermés P_j et I_U le sous-groupe fermé de I_T engendré par les i_j. Alors I_U est exactement le noyau de la projection canonique $\pi_1^{\mathrm{ab},\ell}(U) \to \pi_1^{\mathrm{ab},\ell}(C)$, donc, par la structure de $\pi_1(U)$ rappelée dans la remarque 1.4 (2), il admet la présentation $< i_1, \ldots, i_r | \sum i_j = 0 >$ comme pro-ℓ-groupe abélien (où nous avons employé la notation additive dans $\pi_1^{\mathrm{ab},\ell}(U)$). De là on déduit que le pro-ℓ-groupe abélien I_T admet la présentation $I_T =< i_P | \sum i_P = 0 >$, où P parcourt l'ensemble des points fermés de C. Cette présentation implique que si (j_P) est une autre famille d'éléments de I_T indexée par les points fermés de C telle que $\sum j_P = 0$, on a nécessairement $i_P = \varepsilon j_P$ pour tout P avec une unité ℓ-adique ε ne dépendant pas de P. Ceci s'applique en particulier à toute famille de générateurs des sous-groupes d'inertie associés aux points fermés de C.

Soit $\mathrm{Div}^0(C)$ le groupe des diviseurs de degré 0 sur C. Toute famille $\mathcal{I} = (i_P)$ de générateurs de sous-groupes d'inertie définit un plongement naturel

$$j_{\mathcal{I}} : \mathrm{Div}^0(C) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_\ell}(I_T, \mathbf{Z}_\ell)$$

de la façon suivante : soit d'abord $\mathcal{F}$ le pro-ℓ-groupe abélien libre engendré par les i_P. On définit un morphisme $\mathrm{Div}(C) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_\ell}(\mathcal{F}, \mathbf{Z}_\ell)$ en associant à un point fermé P le morphisme qui envoie i_P sur 1 et les autres générateurs sur 0. Il suffit alors de noter que

$D \in \mathrm{Div}\,(C)$ s'applique à un morphisme $\mathcal{F} \to \mathbf{Z}_\ell$ qui passe au quotient dans I_T si et seulement si $D \in \mathrm{Div}^0(C)$. Par ce qui précède, le morphisme $j_{\mathcal{I}}$ dépend de $\mathcal{I}$ mais les images de deux tels morphismes sont les mêmes à multiplication par une unité ℓ-adique près.

Supposons maintenant que $T = k(x)$ est le corps de fonctions rationnelles engendré par une fonction générale x. Alors on a les identifications $I_T = G_K^{\mathrm{ab},\ell}$, $C \cong \mathbf{P}^1$ et $\mathrm{Div}^0(C) \cong K^\times/k^\times$ (car tout diviseur de degré 0 sur $\mathbf{P}^1$ est principal). D'autre part, l'on dispose d'un morphisme canonique

$$\partial_T :\ \mathrm{Div}^0(C) \cong T^\times/k^\times \to H^1(G_T^{\mathrm{ab},\ell}, \mathbf{Z}_\ell) = H^1(I_T, \mathbf{Z}_\ell) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_\ell}(I_T, \mathbf{Z}_\ell)$$

induit par la théorie de Kummer. On vérifie alors sans difficulté qu'il existe une famille $\mathcal{I}$ de générateurs d'inertie telle que l'on ait $\partial_T = j_{\mathcal{I}}$. On peut tirer de cette discussion le corollaire suivant :

Corollaire 7.4. — *Conservons les notations du corollaire précédent, et notons C (resp. C') la droite projective ayant $k(x)$ (resp. $l(y)$) comme corps de fonctions. Identifions* $\mathrm{Div}^0(C)$ *(resp.* $\mathrm{Div}^0(C')$*) à leurs images dans* $\mathrm{Hom}(I_{k(x)}, \mathbf{Z}_\ell)$ *(resp.* $\mathrm{Hom}(I_{l(y)}, \mathbf{Z}_\ell)$*) via les morphismes de Kummer $\partial_{k(x)}$, $\partial_{l(y)}$. Alors l'isomorphisme $I_{k(x)} \cong I_{l(y)}$ induit par Φ envoie le groupe* $\mathrm{Div}^0(C)$ *sur $\varepsilon \cdot$* $\mathrm{Div}^0(C')$*, avec ε une unité de $\mathbf{Z}_\ell$.*

8. RÉSEAUX

Nous pouvons maintenant terminer la démonstration du th. 1.3 pour $\mathrm{tr.deg}(K|k) > 2$. Soient donc K, L des corps de type fini sur un corps k qui est la clôture algébrique de son corps premier. D'après la prop. 6.3, nous disposons déjà d'un isomorphisme de $\mathbf{Z}_{(\ell)}$-modules $\phi_\ell :\ (K^\times/k^\times) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)} \tilde{\to} (L^\times/l^\times) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)}$. Ces $\mathbf{Z}_{(\ell)}$-modules sont en fait *libres*, car $K^\times/k^\times$ (resp. $L^\times/k^\times$) est isomorphe au groupe abélien libre des diviseurs principaux sur un modèle propre normal de $K|k$ (resp. $L|k$). Ainsi, $K^\times/k^\times$ est un *réseau* dans $(K^\times/k^\times) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)}$, i.e. un $\mathbf{Z}$-module libre sur une base du $\mathbf{Z}_{(\ell)}$-module correspondant, et de même pour $L^\times/l^\times$. Pour alléger la notation, notons $\mathcal{L}_K$ (resp. $\mathcal{L}_L$) ces deux réseaux dans la suite.

Bien sûr, *a priori* il n'y a aucune raison pour que ϕ_ℓ envoie $\mathcal{L}_K$ sur $\mathcal{L}_L$. Mais l'on va voir que l'information accumulée jusqu'ici sur les fonctions générales permet tout de même de les raccrocher.

Si x est une fonction générale de K, le quotient $k(x)^\times/k^\times$ définit un sous-groupe $\mathcal{L}_x$ de $\mathcal{L}_K$, lui-même un réseau dans $\mathcal{L}_x \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)}$. Le point est que les réseaux $\mathcal{L}_x$ sont extrêmement rigides pour la correspondance induite par ϕ_ℓ. En effet, soit $l(y) \subset L$ le sous-corps correspondant à $k(x)$ par le cor. 7.3, et notons $\mathcal{L}_y$ le réseau $l(y)^\times/l^\times$.

Lemme 8.1. — Dans la situation ci-dessus, l'image de $\phi_\ell(\mathcal{L}_x)$ dans $\mathcal{L}_L \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)}$ est $\varepsilon \cdot \mathcal{L}_y$, avec ε une unité de $\mathbf{Z}_{(\ell)}$.

Démonstration. — Avec les notations du cor. 7.4, on a $\mathcal{L}_x \cong \mathrm{Div}^0(C)$ et $\mathcal{L}_y \cong \mathrm{Div}^0(C')$. Donc le corollaire s'applique et fournit une unité $\varepsilon \in \mathbf{Z}_\ell$ comme dans l'énoncé. Mais comme ϕ_ℓ identifie $\phi_\ell(\mathcal{L}_x) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)}$ à $\mathcal{L}_y \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)}$, on a nécessairement $\varepsilon \in \mathbf{Z}_{(\ell)}$. □

Fixons maintenant une fonction générale $x \in K$. D'après le lemme, quitte à remplacer ϕ_ℓ par un composé avec la multiplication par une unité de $\mathbf{Z}_{(\ell)}$, on peut supposer que $\phi_\ell(\mathcal{L}_x) = \mathcal{L}_y$. Le miracle est que cette seule normalisation entraîne que ϕ_ℓ raccroche $\mathcal{L}_K$ et $\mathcal{L}_L$. Notons en effet $\tilde{\mathcal{L}}_K := \mathcal{L}_K \cap \phi_\ell^{-1}(\mathcal{L}_L)$ (resp. $\tilde{\mathcal{L}}_L := \mathcal{L}_L \cap \phi_\ell(\mathcal{L}_K)$). Ces groupes sont des sous-quotients de $K^\times$ (resp. $L^\times$) ; ils sont non triviaux par ce qui précède. De plus, ϕ_ℓ envoie $\tilde{\mathcal{L}}_K$ isomorphiquement sur $\tilde{\mathcal{L}}_L$.

Enfin, notons $\tilde{K}^\times$ l'image réciproque de $\tilde{\mathcal{L}}_K$ dans $K^\times$; le groupe $\tilde{L}^\times$ est défini de façon analogue. Avec ces notations, on tire le corollaire suivant du lemme ci-dessus :

Corollaire 8.2. — *Pour une fonction générale $t \in K$ contenue dans $\tilde{K}^\times$, on a $\mathcal{L}_t \subset \tilde{\mathcal{L}}_K$.*

Bien entendu, il y a un corollaire analogue pour les éléments de $\tilde{L}^\times$.

Démonstration. — Une application du lemme précédent montre qu'il existe un entier positif m (le dénominateur de l'unité ε qui y figure) tel que l'on ait $\mathcal{L}_x \cap \tilde{\mathcal{L}}_K = m\mathcal{L}_x$, l'intersection étant prise dans $\mathcal{L}_K$. En particulier, l'image de x dans $\mathcal{L}_x$ est contenu dans $m\mathcal{L}_x$. Mais cela veut dire que le diviseur de x sur la droite projective associée à $k(x)$ a des coefficients divisibles par m, ce qui n'est possible que pour $m = 1$. □

Proposition 8.3. — *Le sous-ensemble $\tilde{K} := \tilde{K}^\times \cup \{0\} \subset K$ (resp. $\tilde{L} := \tilde{L}^\times \cup \{0\} \subset L$) est un corps.*

Démonstration. — Il suffit de faire la démonstration pour $\tilde{K}$. Notons d'abord que comme $\tilde{K}^\times$ est par construction un sous-groupe de $K^\times$, notre tâche est de voir que $\tilde{K} \subset K$ est un sous-groupe additif. Pour cela il suffit de montrer, en se servant de la multiplicativité, que pour tout $t \in \tilde{K}$ on a $t + 1 \in \tilde{K}$.

Soient donc t et x comme ci-dessus. S'ils sont algébriquement dépendants, on a $t \in k(x)$ car $k(x)$ est algébriquement clos dans K. Mais alors $k(t) \subset k(x) \subset \tilde{K}$ par le choix de x, donc en particulier $t + 1 \in \tilde{K}$.

Donc on peut supposer x et t algébriquement indépendants. Prenons $\kappa \in k^\times$ et considérons les éléments

$$w := (x + \kappa)/t \quad \text{et} \quad z := (t + x + \kappa)/(x + \kappa - 1).$$

En se servant de l'indépendance de t et x on vérifie que l'on peut choisir κ tel que w et z soient des fonctions générales de K.

Comme $t \in \tilde{K}$ et $k(x) \subset \tilde{K}$, on a $w \in \tilde{K}$, d'où $k(w) \subset \tilde{K}$ par le corollaire précédent. En particulier, $w+1 \in \tilde{K}$, d'où $z = t(w+1)/(x+\kappa-1) \in \tilde{K}$ par multiplicativité. De nouveau par le corollaire, on a $k(z) \subset \tilde{K}$, donc en particulier $t + 1 = (z - 1)(x + \kappa - 1) \in \tilde{K}$. □

Proposition 8.4. — *L'extension $K|\tilde{K}$ est purement inséparable.*

Démonstration. — Soit x une fonction générale dans $K \setminus \tilde{K}$. D'après le lemme 8.1, il existe un entier positif m (le dénominateur de l'unité ε du lemme) tel que $m \cdot \mathcal{L}_x \subset \tilde{\mathcal{L}}_K$. Mais alors $k(x)$ est une extension de $k(x) \cap \tilde{K}$ tel que $k(x)^m \subset k(x) \cap \tilde{K}$. Comme $x \notin \tilde{K}$, ceci n'est possible que si la caractéristique est positive et l'extension est purement inséparable. A fortiori, l'extension $\tilde{K}(x)|\tilde{K}$ est purement inséparable. La proposition résulte alors du fait que les fonctions générales engendrent K au-dessus de k. □

Enfin, le th. 1.3 résulte de :

PROPOSITION 8.5. — *Il existe un unique isomorphisme de corps $\phi : \tilde{K} \to \tilde{L}$ induisant l'isomorphisme $\tilde{\mathcal{L}}_K \to \tilde{\mathcal{L}}_L$ fourni par ϕ_ℓ.*

Démonstration. — Notons que par construction $\tilde{\mathcal{L}}_K$ est exactement l'espace projectif $\mathcal{P}(\tilde{K})$ associé au k-espace vectoriel $\tilde{K}$, et de même pour $\tilde{\mathcal{L}}_L$. D'après le théorème fondamental de la géométrie projective ([1], Theorem 2.26), si l'on sait montrer que $\phi_\ell : \mathcal{P}(\tilde{K}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}(\tilde{L})$ *préserve les droites*, il s'en suit que $k \cong l$ et ϕ_ℓ est induit par un isomorphisme de k-espaces vectoriels $\tilde{K} \xrightarrow{\sim} \tilde{L}$. Or on sait déjà d'après le cor. 7.3 que Φ préserve de nombreuses droites, à savoir celles provenant des sous-corps $k(x)$ engendrés par une fonction générale x. Un argument astucieux de géométrie projective axiomatique (voir [7], §3 ainsi que la prop. 2.10) montre alors que la connaissance de ces droites permet déjà de reconstituer *toutes* les droites dans $\mathcal{P}(\tilde{K})$ et $\mathcal{P}(\tilde{L})$.

Enfin, la multiplicativité de l'application $\tilde{K} \to \tilde{L}$ s'en suit par un calcul facile (*loc. cit.*, th. 3.7 ou [31], fin du §5). □

REMARQUE 8.6. — Notons enfin que l'argument ci-dessus fournit également la preuve du th. 1.1 en caractéristique positive. En effet, soit K un corps de type fini sur un corps *fini* k. Remarquons que si ℓ est premier à la caractéristique de K, le morphisme naturel $K^\times \to K^{\times(\ell)}$ est injectif car $K^\times$, étant extension d'un groupe libre par un groupe fini, n'admet pas d'élément ℓ-divisible non trivial. D'autre part, le corps $K\bar{k}$ obtenu en prenant le composé de K avec la clôture algébrique du corps premier k dans une clôture séparable de K satisfait aux hypothèses du th. 1.3. On a obtenu ci-dessus une caractérisation de l'image du morphisme naturel $(K\bar{k})^\times \to (K\bar{k})^{\times(\ell)}$. Ce morphisme est équivariant pour l'action du groupe de Galois G_k de k, que l'on sait caractériser comme quotient de G_K par la prop. 4.6. L'image de $K^\times$ dans $K^{\times(\ell)}$ s'obtient alors en prenant les points fixes sous G_k.

9. SURFACES

Dans ce dernier chapitre, nous donnons des indications sur la démonstration du th. 1.3 dans le cas où $K|k$ est une extension de type fini *de degré de transcendance 2*. Comme déjà mentionné *supra*, dans ce cas on ne dispose pas des informations obtenues par la récurrence du chap. 6, donc il faut modifier la stratégie.

L'idée de Pop est de considérer d'abord les notions suivantes.

Définition 9.1. — *Un élément $g \in G_K^\ell$ est dit* élément d'inertie *s'il est contenu dans le sous-groupe d'inertie I_w associée à une prolongation w d'une valuation v sur K. L'élément d'inertie g est* divisoriel *si v est une valuation divisorielle de K. On note* In_K *l'ensemble des éléments d'inertie contenus dans G_K^ℓ.*

Supposons maintenant de plus que k est *la clôture algébrique d'un corps fini*; pour des remarques concernant le cas $k = \bar{\mathbf{Q}}$, voir la fin du chapitre. Le grand avantage de ce cas est que toute valuation de K est nécessairement triviale sur k.

On a alors les deux résultats suivants.

Proposition 9.2. — *L'ensemble* In_K *est fermé dans G_K^ℓ.*

La démonstration consiste à construire explicitement, pour tout g dans l'adhérence de In_k, une valuation contenant g dans son sous-groupe d'inertie. Nous omettons les détails ; voir [32].

En revanche, nous donnons la preuve de la proposition clef suivante :

Proposition 9.3. — *L'ensemble* In_K *est l'adhérence exacte du sous-ensemble des éléments d'inertie divisoriels dans G_K^ℓ.*

Démonstration. — Soit $g \in \mathrm{In}_{\mathrm{K}}$. Notons K^ℓ une pro-ℓ-extension maximale de K sur laquelle g agit, w la valuation de K^ℓ associée à g et $\Lambda \subset K^\ell$ le sous-corps fixé par g. D'après la théorie de Kummer, il existe un élément $\beta \in \Lambda$ qui n'est pas une puissance ℓ-ième et un système compatible (α_i) de racines ℓ^i-ièmes de β tel que K^ℓ soit la réunion des corps $\Lambda(\alpha_i)$. Alors la famille des corps de la forme $F(\alpha_i)$, avec $F \subset \Lambda$ extension galoisienne finie de K contenant β, est cofinale dans la famille des sous-extensions galoisiennes finies de $K^\ell|K$, il suffit donc de montrer que la restriction de g à un tel corps est contenue dans le sous-groupe d'inertie d'une valuation divisorielle.

Soit X un modèle propre régulier de $F|k$; un tel modèle existe comme $\mathrm{tr.deg}(K|k) = 2$ d'après Abhyankar. Pour v la restriction de w à F, l'anneau de valuation A_v domine un anneau local $\mathcal{O}_{X,P}$ de X ; cet anneau est régulier, donc factoriel. Ainsi, β s'écrit comme un produit $\beta = u\pi_1^{\nu_1} \dots \pi_r^{\nu_r}$, avec une unité u et des éléments premiers π_j de $\mathcal{O}_{X,P}$. On montre alors qu'il existe un $1 \leq j \leq r$ pour lequel $\ell \nmid \nu_j$. (En effet, comme $\mathrm{Gal}\,(K^\ell|\Lambda) \cong \mathbf{Z}_\ell$, l'anneau de valuation $A_{w,\Lambda}$ de la restriction de w à Λ est *pro-ℓ-hensélien*, donc son groupe d'unités est ℓ-divisible. Ainsi, si $\ell \mid \nu_j$ pour tout j, alors x est une puissance ℓ-ième dans $A_{w,\Lambda} \subset \Lambda$, contradiction.) Soit v_j la valuation divisorielle associée à π_j et w_j une extension de v_j à $F(\alpha_i)$. Alors l'on a $\nu_j = v_j(\beta) = w_j(\beta) = \ell^i w_j(\alpha_i)$, donc $\ell \nmid \nu_j$ implique que l'extension $F(\alpha_i)|F$ est non ramifiée pour w_j, i.e. le sous-groupe d'inertie de w_j est égal à $\mathrm{Gal}\,(F(\alpha_i)|F)$ tout entier. □

Soit maintenant v_P une valuation divisorielle de K ; elle provient donc d'un point de codimension 1 sur une k-surface normale de corps de fonctions K. Le corps résiduel $\kappa(P)$

est le corps de fonctions d'une k-courbe propre lisse C_P, donc toute valuation v_Q sur $\kappa(P)$ est la valuation discrète associée à un point fermé Q de la courbe C_P. L'image réciproque de l'anneau de valuation de v_Q (i.e. de l'anneau local de Q) dans l'anneau de valuation A_P de v_P est un anneau de valuation provenant d'une valuation v de K (de rang 2). Réciproquement, toute valuation de K dont l'anneau de valuation est contenu dans A_P induit une valuation sur $\kappa(P)$.

LEMME 9.4. — Soit $v_{P'}$ la valuation divisorielle correspondant à P via Φ. Alors Φ envoie les éléments d'inertie de $G_{\kappa(P)}$ sur ceux de $G_{\kappa(P')}$.

Démonstration. — Fixons un groupe de décomposition $D_P \subset G_K^\ell$ d'un prolongement de v_P ; il s'envoie surjectivement sur $G_{\kappa(P)}^\ell$. On vérifie alors sans peine que tout sous-groupe d'inertie I_Q associé à une prolongation de v_Q dans $G_{\kappa(P)}^\ell$ est quotient d'un sous-groupe d'inertie $I_w \subset D_P$ associé à une prolongation w de v dans G_K^ℓ. Donc on obtient finalement que $\mathrm{In}_{\kappa(P)}$ est *l'image exacte* de l'ensemble $\mathrm{In}_K \cap D_P$. D'après la proposition ci-dessus, $\mathrm{In}_K \cap D_P$ est l'intersection de D_P avec l'adhérence des éléments d'inertie divisoriels. Pour terminer la preuve, il suffit de noter que d'après le th. 4.4 (et sa preuve), l'isomorphisme Φ envoie D_P sur $D_{P'}$ et respecte les sous-groupes d'inertie divisoriels. □

REMARQUES 9.5. —

(1) Les sous-groupes d'inertie de $G_{\kappa(P)}^\ell$ sont tous procycliques. On peut les caractériser de la façon suivante : ils sont les sous-groupes procycliques *maximaux* engendrés par un élément d'inertie. Ainsi, d'après le lemme, ils sont respectés par Φ.

(2) Le lemme implique, comme dans la discussion précédant le cor. 7.3, que les courbes propres et lisses correspondant à $\kappa(P)$ et $\kappa(P')$ ont même genre.

Nous pouvons maintenant donner une *esquisse de la démonstration du th. 1.3* pour $\mathrm{tr.deg}(K|k) = \mathrm{tr.deg}(L|l) = 2$ et k, l des clôtures algébriques d'un corps fini ; pour les détails, voir [33].

Soit X un modèle quasi-projectif lisse de $K|k$, et soit $\mathcal{D}_X$ l'ensemble géométrique de valuations divisorielles provenant de points de codimension 1 de X. Utilisant le th. 5.10 et le lemme de Chow, on voit que quitte à rapetisser X, on peut supposer que Φ envoie $\mathcal{D}_X$ à l'ensemble des valuations provenant de points de codimension 1 d'un modèle quasi-projectif lisse Y de $L|l$.

Prenons maintenant un système $\mathcal{I} = (i_P)$ de générateurs de sous-groupes d'inertie associés aux points de codimension 1 de X dans $G_K^{\ell,\mathrm{ab}}$ et posons $\widehat{\mathrm{Div}}\,(X) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_\ell}(\mathcal{F}_{\mathcal{I}}, \mathbf{Z}_\ell)$, où $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ est le pro-ℓ-groupe abélien libre de base $\mathcal{I}$. Comme dans le cas des courbes discuté au chap. 7, le groupe $\widehat{\mathrm{Div}}\,(X)$ est bien défini à multiplication par une unité de $\mathbf{Z}_\ell$ près, et l'on dispose d'un morphisme naturel $K^{\times(\ell)} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_\ell}(G_K^{\ell,\mathrm{ab}}, \mathbf{Z}_\ell) \to \widehat{\mathrm{Div}}\,(X)$ (dépendant de $\mathcal{I}$). Soit maintenant $D_P \subset G_K^{\ell,\mathrm{ab}}$ le sous-groupe de décomposition d'un point P de codimension 1 sur X. Alors $\kappa(P)$ est le corps de fonctions d'une courbe propre lisse C_P pour laquelle on dispose d'un morphisme analogue $\kappa(P)^{\times(\ell)} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_\ell}(G^{\ell,\mathrm{ab}}_{\kappa(P)}, \mathbf{Z}_\ell) \to \widehat{\mathrm{Div}}\,(C_P)$ discuté au chap. 7. Tout élément dans le noyau du morphisme $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_\ell}(D_P, \mathbf{Z}_\ell) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_\ell}(I_P, \mathbf{Z}_\ell)$ provient d'un élément de $\kappa(P)^{\times(\ell)} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_\ell}(G^{\ell,\mathrm{ab}}_{\kappa(P)}, \mathbf{Z}_\ell)$.

Notons $\mathcal{K}_X$ l'image de $K^{\times(\ell)}$ dans $\widehat{\mathrm{Div}}\,(X)$; on définit $\mathcal{K}_{C_P}$ de façon analogue pour tout P. Ces sous-groupes se projettent surjectivement sur chaque composante de $\widehat{\mathrm{Div}}\,(X)$ (resp. $\widehat{\mathrm{Div}}\,(C_P)$) engendrée par un élément de la base canonique. Considérons $\mathrm{Div}\,(X) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)}$ (resp. $\mathrm{Div}\,(C_P) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)}$) comme $\mathbf{Z}_{(\ell)}$-réseaux dans $\widehat{\mathrm{Div}}\,(X)$ (resp. $\widehat{\mathrm{Div}}\,(C_P)$), et notons $\mathcal{L}_X$ (resp. $\mathcal{L}_{C_P}$) leurs intersections avec $\mathcal{K}_X$ (resp. $\mathcal{K}_{C_P}$). Ces sous-groupes déterminent $\mathrm{Div}\,(X) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)}$ et $\mathrm{Div}\,(C_P) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)}$ comme $\mathbf{Z}_{(\ell)}$-réseaux par ce qui précède. Alors il n'est pas difficile à démontrer la caractérisation suivante de $\mathrm{Div}\,(X) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)}$: il est l'unique $\mathbf{Z}_{(\ell)}$-réseau qui soit compatible, à multiplication par une unité de $\mathbf{Z}_\ell$ près, avec les $\mathbf{Z}_{(\ell)}$-réseaux résiduels $\mathrm{Div}\,(C_P) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)}$. L'énoncé précis est le suivant : $\mathrm{Div}\,(X) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)}$ est l'unique $\mathbf{Z}_{(\ell)}$-réseau, à multiplication par une unité de $\mathbf{Z}_\ell$ près, tel que pour tout P et tout sous-$\mathbf{Z}_\ell$-module de type fini Δ de $\mathcal{K}_X$ dont l'image Δ_P dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_\ell}(D_P, \mathbf{Z}_\ell)$ est contenue dans $\mathcal{K}_{C_P}$, l'image dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_\ell}(D_P, \mathbf{Z}_\ell)$ de la partie de $\mathcal{L}_X$ contenue dans Δ soit égale à la partie de $\mathcal{L}_{C_P}$ contenue dans Δ_P, à multiplication par une unité de $\mathbf{Z}_\ell$ près.

On peut faire une construction analogue pour le modèle Y de $L|l$ et obtenir, en particulier, un $\mathbf{Z}_{(\ell)}$-module $\mathcal{L}_Y$ de la même manière que $\mathcal{L}_X$. D'après le th. 4.4 et le lemme 9.4, l'isomorphisme Φ respecte ces constructions, et donc, par la caractérisation ci-dessus, quitte à multiplier Φ par une unité de $\mathbf{Z}_\ell$, on peut supposer qu'il envoie $\mathcal{L}_X$ sur $\mathcal{L}_Y$. Le problème est alors que ces $\mathbf{Z}_{(\ell)}$-modules sont en général plus grands que $K^\times/k^\times \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)}$ (resp. $L^\times/l^\times \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)}$). Mais on peut surmonter cette difficulté en exploitant que le quotient $Q_X := \mathcal{L}_X/(K^\times/k^\times \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)})$ est de torsion. Pour se convaincre de ce dernier fait, on peut d'abord remplacer X par une compactification lisse (elle existe d'après Abhyankar), car ce ne fait qu'agrandir le groupe Q_X. Ensuite, observons que par sa définition même, l'image de $\mathcal{L}_X$ dans le groupe $(Pic(X)/\ell^n) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)}$ est triviale pour tout n ; a fortiori, il en est de même dans $(NS(X)/\ell^n) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)}$, où $NS(X)$ est le groupe de Néron-Severi de X. Mais $NS(X) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)}$ est de type fini sur $\mathbf{Z}_{(\ell)}$, donc ne contient pas d'élément ℓ-divisible. Il en résulte que Q_X est quotient du groupe $\mathrm{Pic}^0(X) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)}$ qui est effectivement de torsion, X étant projective et lisse sur la clôture algébrique d'un corps fini.

De plus, on peut montrer que $\mathcal{L}_X$ est le plus grand sous-$\mathbf{Z}_{(\ell)}$-module de $\mathcal{K}_X$ contenant $K^\times/k^\times \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)}$ tel que le quotient soit de torsion. Nous avons bien sûr une caractérisation analogue de $\mathcal{L}_Y$. Cette propriété de torsion permet alors de terminer la démonstration par une légère adaptation des arguments présentés aux chapitres 7 et 8, où l'on remplace l'utilisation de $K^\times/k^\times \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)}$ et $L^\times/l^\times \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)}$ par celle de $\mathcal{L}_X$ et $\mathcal{L}_Y$. En particulier, la prop. 7.2 et le lemme 8.1 doivent être adaptés à ce contexte ; nous renvoyons à [33] pour les détails techniques.

Terminons par un mot sur le cas où $k = \bar{\mathbf{Q}}$. Le point le plus délicat est alors, comme on l'a déjà mentionné au chap. 4, la distinction entre les valuations divisorielles et les valuations discrètes non triviales sur $\bar{\mathbf{Q}}$; la théorie des éléments d'inertie joue ici un rôle crucial. Ensuite, on travaille avec des modèles entiers sur Spec $\bar{\mathbf{Z}}$ des surfaces ayant K et L pour corps de fonctions, et on établit le résultat par un argument de spécialisation modulo p, exploitant le cas $k = \bar{\mathbf{F}}_p$ que l'on vient de voir.

Remerciements. — Lors de la préparation de cet exposé, j'ai bénéficié d'une invitation de Florian Pop à l'université de Bonn qui m'a permis d'avoir de nombreuses discussions avec lui sur ses travaux en préparation. Je lui suis très reconnaissant pour sa générosité et sa disponibilité. Un grand merci également à Jean-Louis Colliot-Thélène, Philippe Gille, János Kollár et Jakob Stix pour des corrections apportées *in extremis.*

RÉFÉRENCES

[1] E. ARTIN – *Geometric Algebra*, Interscience, New York/London, 1957.

[2] E. ARTIN, O. SCHREIER – Eine Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 5 (1927), 225-231.

[3] P. BERTHELOT – Altérations de variétés algébriques (d'après A. J. de Jong), *Séminaire Bourbaki, année 1995/96*, Astérisque 241 (1997), exp. 815, 273–311.

[4] F. BOGOMOLOV – Sous-groupes abéliens de groupes de Galois (en russe), *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 55 (1991), 32–67.

[5] F. BOGOMOLOV – On two conjectures in birational algebraic geometry, in *Algebraic geometry and analytic geometry (Tokyo, 1990), ICM-90 Satell. Conf. Proc.*, Springer, Tokyo, 1991, p. 26–52.

[6] F. BOGOMOLOV, Yu. TSCHINKEL – Commuting elements in Galois groups of function fields, in *Motives, Polylogarithms and Hodge Theory* (F. Bogomolov, L. Katzarkov, eds.), International Press, 2002, p. 75–120.

[7] F. BOGOMOLOV, Yu. TSCHINKEL – Reconstruction of function fields, prépublication `math.AG/0303075`, 2003.

[8] N. BOURBAKI – *Algèbre commutative*, Hermann, Paris, 1964.

[9] I. EFRAT – Abelian subgroups of pro-2 Galois groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* 123 (1995), 1031–1035.

[10] O. ENDLER – *Valuation Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[11] A. J. ENGLER, J. KOENIGSMANN – Abelian subgroups of pro-p Galois groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* 350 (1998), 2473–2485.

[12] A. J. ENGLER, J. B. NOGUEIRA, Maximal abelian normal subgroups of Galois pro-2-groups, *J. Algebra* 166 (1994), 481–505.

[13] G. FALTINGS – Curves and their fundamental groups (following Grothendieck, Tamagawa and Mochizuki), *Séminaire Bourbaki, année 1997/98*, Astérisque 252 (1998), exp. 840, 131–150.

[14] M. FRIED, M. JARDEN – *Field Arithmetic*, Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete (3), vol. 11, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[15] A. GROTHENDIECK – *Revêtements étales et groupe fondamental*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1960–1961 (SGA 1), Lecture Notes in Mathematics, vol. 224, Springer-Verlag, 1971.

[16] A. GROTHENDIECK – *Cohomologie des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux* (SGA2), North-Holland, 1968.

[17] A. GROTHENDIECK – Brief an G. Faltings, reproduit dans *Geometric Galois Actions I* (P. Lochak, L. Schneps, eds.), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 242, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, p. 49–58, trad. anglaise p. 285–293.

[18] D. HARARI – Le théorème de Tamagawa II, in *Courbes semi-stables et groupe fondamental en géométrie algébrique (Luminy, 1998)*, J.-B. Bost, F. Loeser, M. Raynaud, eds., Progress in Math., 187, Birkhäuser, Basel, 2000, p. 203–216.

[19] A. J. de JONG – Smoothness, semi-stability and alterations, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 83 (1996), 51–93.

[20] N. KATZ, S. LANG – Finiteness theorems in geometric classfield theory, *L'Enseign. Math.* (2) 27 (1981), 285–319 (1982).

[21] J. KOLLÁR – *Rational Curves on Algebraic Varieties*, Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete (3), vol. 32, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[22] S. MOCHIZUKI – The local pro-p anabelian geometry of curves. *Invent. Math. 138* (1999), 319–423.

[23] H. NAKAMURA, A. TAMAGAWA, S. MOCHIZUKI, The Grothendieck conjecture on the fundamental groups of algebraic curves, *Sūgakū Expositions* 14 (1) (2001), 31–53.

[24] J. NEUKIRCH – Kennzeichnung der p-adischen und der endlichen algebraischen Zahlkörper, *Invent. Math.* 6 (1969), 296–314.

[25] J. NEUKIRCH – Kennzeichnung der endlich-algebraischen Zahlkörper durch die Galoisgruppe der maximalen auflösbaren Erweiterungen, *J. reine angew. Math.* 238 (1969), 135–147.

[26] J. NEUKIRCH – Über die absoluten Galoisgruppen algebraischer Zahlkörper, in *Journées Arithmétiques de Caen*, Astérisque 41-42 (1977), 67–79.

[27] J. NEUKIRCH, A. SCHMIDT, K. WINGBERG – *Cohomology of number fields*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften vol. 323, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[28] F. POP – On Grothendieck's conjecture of birational anabelian geometry. *Ann. of Math.* (2) 139 (1994), 145–182.

[29] F. POP – Glimpses of Grothendieck's anabelian geometry, in *Geometric Galois Actions I* (P. Lochak, L. Schneps, eds.), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 242, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, p. 145–182.

[30] F. POP – On Grothendieck's conjecture of birational anabelian geometry II, prépublication, 1996.

[31] F. POP – Alterations and birational anabelian geometry, in *Resolution of singularities (Obergurgl, 1997)*, H. Hauser et al., eds., Progress in Math., vol. 181, Birkhäuser, Basel, 2000, p. 519–532.

[32] F. POP – The birational anabelian conjecture revisited, prépublication, 2002.

[33] F. POP – Pro-ℓ birational anabelian geometry over algebraically closed fields I, prépublication `math.AG/0307076`, 2003 ; deuxième partie en préparation.

[34] M. ROVINSKY – On certain isomorphisms between absolute Galois groups, *Compositio Math.* 136 (2003), 61–67.

[35] F. K. SCHMIDT – Mehrfach perfekte Körper, *Math. Ann.* 108 (1933), 1–25.

[36] J-P. SERRE – *Cohomologie galoisienne*, cinquième édition, révisée et complétée, Lecture Notes in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[37] M. SPIESS – An arithmetic proof of Pop's theorem concerning Galois groups of function fields over number fields, *J. reine angew. Math.* 478 (1996), 107–126.

[38] T. SZAMUELY – Le théorème de Tamagawa I, in *Courbes semi-stables et groupe fondamental en géométrie algébrique (Luminy, 1998)*, J.-B. Bost, F. Loeser, M. Raynaud, eds., Progress in Math., 187, Birkhäuser, Basel, 2000, p. 185–201.

[39] K. UCHIDA – Isomorphisms of Galois groups, *J. Math. Soc. Japan* 28 (1976), 617–620.

[40] K. UCHIDA – Isomorphisms of Galois groups of algebraic function fields. *Ann. of Math.* (2) 106 (1977), 589–598.

[41] O. ZARISKI – The reduction of singularities of an algebraic surface, *Ann. of Math.* (2) 40 (1939), 639–689.

Tamás SZAMUELY

Alfréd Rényi Institute of Mathematics
Hungarian Academy of Sciences
PO Box 127
H-1364 Budapest, Hongrie
E-mail : `szamuely@renyi.hu`