ALGEBRA LINEARE

<u>Introduzione</u>: sistemi di 2 equazioni a 2 variabili.

Ad esempio:

1) $\begin{rcases} E_1: & x + y = 3 \\ E_2: & x + 2y = 5 \end{rcases} \Rightarrow E_2 - E_1: \boxed{y} = 5 - 3 = \boxed{2}$

sostituzione $\Rightarrow \boxed{x} = \boxed{1}$

2) $\begin{rcases} E_1: & x + y = 3 \\ E_2: & 2x + 2y = 6 \end{rcases} \quad E_2 - 2E_1: \quad 0 = 0$

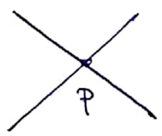
Infatti, $E_2 = 2E_1 \Rightarrow$ hanno le stesse soluzioni [un'infinità!]

3) $\begin{rcases} E_1: & x + y = 3 \\ E_2: & 2x + 2y = 5 \end{rcases} \Rightarrow E_2 - 2E_1: \quad 0 = -1 \quad \lightning$

nessuna soluzione comune!

Quindi abbiamo 1, ∞ o $\emptyset$ soluzioni comuni. Sarà così in generale.

<u>Interpretazione geometrica</u>: in ogni caso E_1 e E_2 sono le equazioni di due <u>rette</u> nel piano.

Nel caso 1)  hanno un punto in comune $P = (1, 2)$

2) coincidono $\Rightarrow \infty$ punti in comune

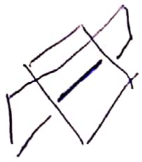
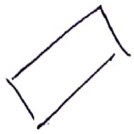
3)  sono paralleli $\Rightarrow \nexists$ punto in comune

---

Equazione tipo a 3 variabili: $x + 2y + 3z = 4$

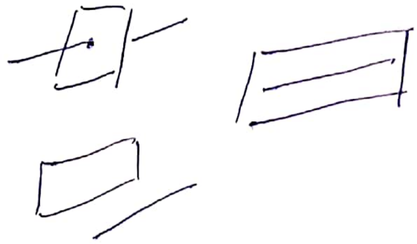
È l'equazione di un <u>piano</u> nello spazio 3-dimensionale.

Soluzioni comuni di 2 equazioni lineari a 3 variabili
$\Updownarrow$
punti nell'intersezione di 2 piani. 3 casi:

a)  retta b)  coincidenza c)  paralleli

Se c'è una 3a equazione $\leftrightarrow$ corrisponde a un terzo piano.
L'intersezione con i precedenti da:

a) $\{\text{retta}\} \cap \text{piano} = \begin{cases} \text{punto} \\ \text{la retta} \\ \emptyset \end{cases}$



b) Intersezione di due piani: 3 casi come sopra.
c) Rimane $\emptyset$.

<u>Sintesi</u>: Le soluzioni comuni di 3 equazioni lineari a 3 variabili corrispondono all'intersezione di 3 piani nello spazio 3-dimensionale.

L'intersezione può essere:
- un punto [unica soluzione]
- una retta o un piano [∞ soluzioni]
- $\emptyset$

<u>Caso generale</u>: sistema di n equazioni lineari a m variabili

$$\begin{aligned}
E_1 &: \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\
E_2 &: \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\
&\ \ \vdots \\
E_n &: \quad a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_m
\end{aligned}
\qquad (E)$$

$a_{ji}, b_i \in \mathbb{R}$
$n, m > 0.$

Cerchiamo soluzioni comuni:

Def. Il sistema (E) è omogeneo se $b_1 = \dots = b_n = 0$.

Se no, possiamo considerare il sistema omogeneo associato:

$$
\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1m} x_m &= 0 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2m} x_m &= 0 \\
&\vdots \\
a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nm} x_m &= 0
\end{aligned}
\qquad (E_{om})
$$

Prop. Se $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ e $(d_1, \dots, d_m)$ sono soluzioni di (E) $\Rightarrow$ $(c_1 - d_1, c_2 - d_2, \dots, c_m - d_m)$ sono soluzioni di (E_{om})

Dim. Si fà la sostituzione $x_j = c_j$ e $x_j = d_j$ in E_i:

$$
\left.
\begin{aligned}
a_{i1} c_1 + a_{i2} c_2 + \dots + a_{im} c_m &= b_i \\
a_{i1} d_1 + a_{i2} d_2 + \dots + a_{im} d_m &= b_i
\end{aligned}
\right\} \rightarrow
$$

$$a_{i1}(c_1 - d_1) + \dots + a_{im}(c_m - d_m) = 0 \qquad \forall i$$

Teorema. Se $(c_1, \dots, c_m)$ è soluzione di (E), tutte le soluzioni sono della forma $(c_1 + e_1, c_2 + e_2, \dots, c_m + e_m)$ dove $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ è soluzione di (E_{om}).

Dim. Prop $\Rightarrow$ le soluzioni hanno questa forma. Viceversa, se $(e_1, \dots, e_m)$ è sol. di (E_{om}) $\Rightarrow$ $(c_1 + e_1, \dots, c_m + e_m)$ sol. di (E).

Sintesi: "soluzione generale" = "soluzione particolare" + "soluzione omogenea"

Osservazione: $(0, \dots, 0)$ è sempre soluzione di (E_{om}).

Quindi se (E) ammette una soluzione, questa soluzione è unica $\Leftrightarrow$ $(0, \dots, 0)$ è l'unica soluzione di (E_{om})

Interpretazione geometrica per (E_{om}): "iperpiani attraverso l'origine".

<u>Esempio</u>: $n=1$ $m=2$ E_1: $2x+3y=5$

Soluzione particolare: $x=y=1$

Eq. omogenea: E_1^{om}: $2x+3y=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}y$

Soluzione generale: se s parametro nel ruolo di y

$x = 1 + (-\frac{3}{2})s$, $y = 1+s$.

Come trovare soluzioni comuni di (E)? Semplificare!

3 operazioni: A) Moltiplicare un'equazione E_i per una costante $\lambda \neq 0$ $E_i \rightsquigarrow \lambda E_i$

B) Moltiplicare E_i per $\lambda \neq 0$ e fare la somma con E_j $E_j \rightsquigarrow E_j + \lambda E_i$

C) Scambiare due equazioni.

All'inizio abbiamo sempre fatto operazioni di tipo (B).

Ad esempio: $\left.\begin{aligned} x+y&=3 \\ 2x+2y&=6 \end{aligned}\right\}$ $E_2 \rightsquigarrow E_2 - 2E_1$: $0=0$.

<u>Prop.</u> Le operazioni A), B), C) non cambiano l'insieme delle soluzioni di (E).

<u>Dim.</u> C) ovvio. A): se $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ soluzione di (E) $\Rightarrow$ anche di (λE) e viceversa.

B) se $(c_1, \dots, c_m)$ è soluzione di E_i, E_j $\Rightarrow$ anche di $E_j + \lambda E_i$

Viceversa, se è soluzione di $E_i, E_j + \lambda E_i$ $\Rightarrow$ anche di $E_j = (E_j + \lambda E_i) - \lambda E_i$.

<u>Prossima volta</u>: sistematizzando A), B), C) si ottiene un <u>algoritmo</u> per semplificare (E), poi trovare le soluzioni.

Metodo per semplificare (E_{om}):

Mettiamo i coefficienti in una matrice $n \times m$ $[a_{ij}]$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \qquad R_i : \text{riga N}^\circ\ i$$

Le operazioni A), B), C) corrispondono a:

A') moltiplicare una riga per $\lambda \neq 0$: $R_i \mapsto \lambda \cdot R_i$

B') sostituire la riga R_j con una somma: $R_j \mapsto R_j + \lambda \cdot R_i$

C') scambiare due righe.

Def. Una matrice $n \times m$ è in forma a scalini per righe se

(1) Le righe $(0, \dots, 0)$ sono "in fondo"

(2) Il primo elemento di ogni riga (se esiste) è a destra del primo elemento $\neq 0$ della riga precedente.

Un tale elemento si chiama pivot.

Esempi
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
NO SI NO

Sono in forma a scalini?

Algoritmo di Gauss: Ogni matrice $n \times m$ si mette in forma a scalini (per righe) con operazioni del tipo B'), C').

0) Se la matrice è già in forma a scalini $\Rightarrow$ END

1) Si cerca il primo elemento $\neq 0$ della prima colonna $\neq 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_4]{C'} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2) Cambiando righe si può supporre che questo elemento è il pivot della prima riga. Notiamolo p

Se siamo in forma a scalini $\to$ END. Se no,

3) Si annullano tutti gli elementi della colonna di p <u>sotto</u> p con operazioni di tipo B')

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 - 2R_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

Se siamo in forma a scalini $\to$ END

4) Se no, si ricomincia con la matrice ottenuta cancellando la prima riga. FINE DESCRIZIONE ALGORITMO

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 + 2R_2]{R_3 + \frac{4}{3}R_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Questa matrice non è ancora a scalini, quindi si cancella R_2:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 + (-\frac{3}{4})R_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Altro esempio</u>:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ corrisponde a $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 10x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$\left.\begin{matrix} R_2 - 3R_1 \\ R_3 - R_1 \end{matrix}\right\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_3 - 5x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$x_4 \leftrightarrow$ colonna senza pivot - variabile libera!

Se si mette $\boxed{x_4 = t}$ parametro, andando sopra si ottiene:

$\boxed{x_3 = -5t}$, $2x_2 - 5t + t = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = 2t}$

$x_1 - 2t + 3t = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = -t}$

Metodo per equazioni non omogenei: si aggiunge una colonna con $b_1, \dots, b_n$ e si applica l'algoritmo di Gauss.

Esempi

1) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 9 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 - 2R_1]{R_2 - R_1,\ R_3 - R_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -12 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 + R_2}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -14 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 + R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right]$$

Corrisponde a: $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 9 \\ x_2 - x_4 &= -2 \\ x_3 - x_4 &= -1 \\ -5x_4 &= -15 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x_4 = 3 \Rightarrow x_3 = 2,\ x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 0.$

Soluzione unica!

L'unicità si vede già sul sistema omogeneo:

$x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $\quad (0,0,0,0)$ unica soluzione

E sempre così se ogni colonna ~~e ogni riga~~ contiene un pivot. [Forma a scalini: $\left[\begin{array}{cccc} * & & * & \\ & * & & \\ 0 & & * & \\ & & & * \\ \hline & 0 & & \end{array}\right]$]

2) $x_1 + x_2 - 4x_3 = 1$
$2x_1 + 3x_2 - 10x_3 = 2$
$5x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 5$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -10 & 2 \\ 5 & -3 & -4 & 5 \end{array}\right] \underset{R_3-5R_1}{\overset{R_2-2R_1}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -8 & 16 & 0 \end{array}\right] \overset{R_3+8R_2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 + x_2 - 4x_3 = 1$
$x_2 - 2x_3 = 0$

x_3 variabile libera! Se $\boxed{x_3 = t}$, $\boxed{x_2 = 2t}$, $\boxed{x_1 = 1+2t}$

Soluzione particolare: $(1,0,0)$ generale: $(1+2t, 2t, t)$

omogenea: $(2t, 2t, t)$

Se c'è una colonna senza pivot $\Rightarrow \exists$ variabile libera $\Rightarrow \infty$ soluzioni.

3) $x_1 - x_2 - x_3 = 3$
$3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 3$
$4x_1 + x_2 - 9x_3 = 7$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & -4 & 3 \\ 4 & 1 & -9 & 7 \end{array}\right] \underset{R_3-4R_1}{\overset{R_2-3R_1}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \end{array}\right] \overset{R_3-5R_2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{array}\right] \leftrightarrow 0 = 25 \ \lightning$$

Nessuna soluzione!

È sempre così se c'è un pivot nell'ultima colonna.
$\nexists$ soluzione particolare! (Ma il sistema omogeneo ammette ∞ soluzioni)

<u>Sintesi</u>. Se nella forma a scalini

* ogni colonna "non aggiunta" ha un pivot $\Leftrightarrow$ unica soluzione
* c'è un pivot nell'ultima colonna $\Leftrightarrow \nexists$ soluzione
* c'è una colonna "non aggiunta" senza pivot e l'ultima colonna non ne ha $\Leftrightarrow \infty$ soluzioni

Def. Una matrice è in forma ridotta a scalini se
* è in forma a scalini
** ogni pivot è uguale a 1
*** — " — l'unico elemento $\neq 0$ nella sua colonna

Esempi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ è in forma ridotta a scalini

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ in forma a scalini ma non ridotta

Algoritmo di Gauss-Jordan: con operazioni del tipo A'), B'), C') produce una matrice a forma ridotta a scalini

Funziona così:

1) Con l'algoritmo di Gauss la matrice si mette in forma a scalini. Ad esempio

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$R_2 \mapsto \frac{1}{2} R_2$

$R_3 \mapsto \frac{1}{3} R_3$

2) In ogni riga si cerca il pivot (se esiste). Poi se il pivot è $\lambda \neq 1$, moltiplicare la riga per $\frac{1}{\lambda}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3) Nelle colonne dei pivot gli elementi sotto (e nella riga a sinistra) sono già $= 0$. Annullare gli elementi sopra della colonna con operazioni del tipo B').

[Questa operazione non cambia gli altri pivot perché sono o a sinistra o sotto!]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operazioni:
$R_1 - 3R_2$, poi
$R_2 - 2R_3$,
$R_1 + 2R_3$.

Esempi:

1)
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

Per facilitare il calcolo, $R_2 \rightsquigarrow 2R_2$, $R_4 \rightsquigarrow 2R_4$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 6 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & -1 \\ 10 & -4 & 4 & 4 \end{array}\right] \underset{R_4 - 5R_1}{\overset{R_2 - 3R_1,\ R_3 - 2R_1}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & -9 & 9 & 9 \end{array}\right] \underset{R_4 + 9R_2}{\overset{R_3 + 5R_2}{\rightsquigarrow}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 18 & 36 \end{array}\right] \underset{R_4 - \frac{18}{8}R_3}{\overset{R_3 \rightsquigarrow \frac{1}{8}R_3}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{R_1 - R_2}{\rightsquigarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{R_2 - R_3}{\overset{R_1 + 2R_3}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{R_1 \to \frac{1}{2}R_1}{\rightsquigarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 + 9x_4 = 3 \\ 4x_1 - 8x_2 + 5x_3 + x_4 = 7 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & 1 & 9 & 8 \\ 4 & -8 & 5 & 1 & 7 \end{array}\right] \quad R_2 \downarrow 2R_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 3 & -1 & 3 \\ 6 & -12 & 2 & 18 & 16 \\ 4 & -8 & 5 & 1 & 7 \end{array}\right] \underset{R_3 - 2R_1}{\overset{R_2 - 3R_1}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 21 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_2 \mapsto -\frac{1}{7}R_2$$

$$R_3 \mapsto -R_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right] \overset{R_3 + R_2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{R_1 - 3R_2}{\rightsquigarrow}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{R_1 \mapsto \frac{1}{2} R_1}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

colonne senza pivot

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = s \\ x_4 = t \end{array}\right\} \text{variabili liberi}$$

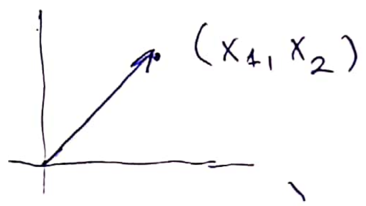
$$x_1 = 3 + 2s - 4t$$

$$x_3 = -1 + 3t$$

Spazi vettoriali

Motivazione: punti e vettori nel piano $\mathbb{R}^2$

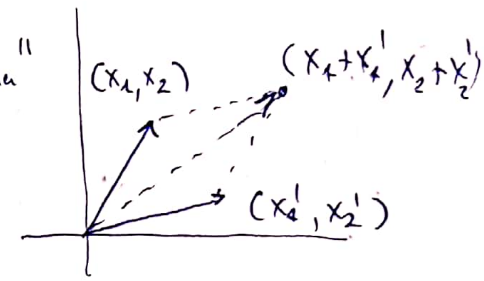
Un punto di $\mathbb{R}^2$ si può descrivere con due coordinate (x_1, x_2), ma anche con un vettore [i.e. una freccia] dall'origine $(0,0)$ a (x_1, x_2):



Si può fare la somma di due vettori. Sulle coordinate:

$$(x_1, x_2) + (x_1', x_2') := (x_1 + x_1', x_2 + x_2')$$

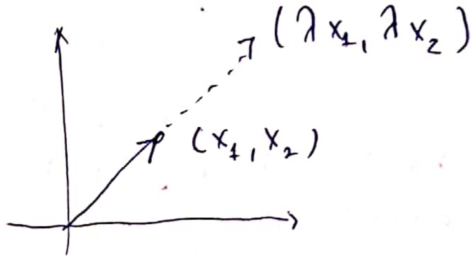
Geometricamente: "legge di parallelogramma"



Un vettore si può anche moltiplicare con uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda (x_1, x_2) := (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

La lunghezza è moltiplicata da λ, ma l'angolo non cambia!



Generalizzazione

Si definisce $\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \right\}$ spazio n-dim. standard

o "spazio delle vettori colonna" con le operazioni

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_1 + x_1' \\ x_2 + x_2' \\ \vdots \\ x_n + x_n' \end{bmatrix} \qquad \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Casi $n = 2, 3 \leftrightarrow$ piano, spazio euclidiani.

Adesso facciamo un'assiomatizzazione.

Def Uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ è un insieme V che ammette due tipi di operazioni:

* Somma: $v_1, v_2 \in V \rightsquigarrow v_1 + v_2 \in V$
* Prodotto con $\lambda \in \mathbb{R}$: $v \in V \rightsquigarrow \lambda \cdot v \in V$

Le operazioni devono soddisfare:

$$(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3) \qquad (\lambda_1 + \lambda_2) v = \lambda_1 v + \lambda_2 v$$

$$v_1 + v_2 = v_2 + v_1 \qquad \lambda (v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$$

$$\exists ! \, 0 \in V: \ 0 + v = v + 0 = v \ \forall v \qquad (\lambda_1 \lambda_2) v = \lambda_1 (\lambda_2 v)$$

$$\forall v \ \exists ! -v \in V: \ v + (-v) = (-v) + v = 0. \qquad 1 \cdot v = v$$

Esempio: $\mathbb{R}^n$ con le operazioni sopra è uno spazio vettoriale.

$$0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix}$$

Altri esempi

1) Matrici $n \times m$. Notazione: $M_{n \times m}(\mathbb{R})$

Somma: se $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}] \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$

$$A + B := [a_{ij} + b_{ij}] \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$$

Prodotto con $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$.

Matrice 0: $a_{ij} = 0 \ \forall i, j$

Matrice opposta: $-A = [-a_{ij}]$. [Infatti, $[a_{ij} + (-a_{ij})] = 0$.]

[Si osserva: $M_{n\times 1} = \mathbb{R}^n$.]

2) Polinomi a coefficienti reali.

$\mathbb{R}[x] = \{ a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 : a_i \in \mathbb{R}, \ n \geq 0 \}$

Somma: $(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0) + (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0)$

[diciamo $m \geq n$] $b_m x^m + \dots + (a_n + b_n) x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (a_0 + b_0)$

Prodotto con λ: $\lambda (a_n x^n + \dots + a_0) = \lambda a_n x^n + \dots + \lambda a_0$.

3) Funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Somma: $(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$

Prodotto con λ: $(\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x)$.

Con la definizione seguente si ottengono altri esempi:

Def. Sia V uno spazio vettoriale. Uno <u>sottospazio</u> $W \subset V$ è un sottoinsieme tale che $v_1, v_2 \in W \Rightarrow v_1 + v_2 \in W$

$v \in W \Rightarrow \lambda v \in W \ \forall \lambda$.

Prop. Uno sottospazio $W \subset V$ è uno spazio vettoriale.

Dim. Dobbiamo verificare gli assiomi. Tutto è ovvio, con l'eccezione di: (*) $0 \in W$, (**) $v \in W \Rightarrow -v \in W$.

(*) Se $v \in V$, $0 \cdot v = 0$. Infatti,

$v = 1 \cdot v = (0+1) v = 0 \cdot v + 1 \cdot v = 0 \cdot v + v$

Ma allora se $v \in W$, $0 \cdot v = 0 \in W$.

(**) In modo simile, basta vedere $(-1) v = -v$.

Infatti, $0 = 0 \cdot v = (1 + (-1)) v = 1 \cdot v + (-1) v =$

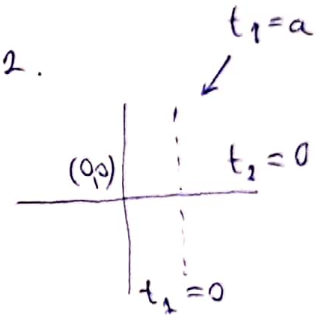
$= v + (-1) v$.

Esempi di sottospazi

1) $\left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n : \ t_1 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^n$ è un sottospazio.

In modo simile, $t_2 = 0$, $t_3 = 0, \dots, t_n = 0$ definiscono sottospazi.
Ma $t_1 = a$ non definisce un sottospazio se $a \neq 0$!
[Ad esempio, $\lambda a \neq a$ se $\lambda \neq 1$.]

Interpretazione geometrica: supponiamo $n = 2$.



$t_1 = 0$ definisce una retta attraverso $(0,0)$.
$t_2 = 0$ —"—

Ma $t_1 = a$ per $a \neq 0$ definisce una retta che non contiene $(0,0)$!

Per $n = 3$ $t_i = 0$ definisce un sottospazio [piano attraverso $(0,0)$]
ma se $a \neq 0$ $t_i = a$ —"— un piano che non contiene $(0,0,0)$!

Però abbiamo visto: un sottospazio $W \subset V$ contiene sempre l'elemento 0.

2) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) : \ a = 0 \right\} \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ è un sottospazio. Ma $a = 1$ non definisce un sottospazio!

3) $\{ f \in \mathbb{R}[x] : \deg(f) \leq d \} \subset \mathbb{R}[x]$ è un sottospazio $\forall d \geq 0$.
Ma $\{ f : \deg(f) = d \}$ no se $d \geq 1$!

4) $\{ f \in \mathbb{R}[x] : f(0) = 0 \} \subset \mathbb{R}[x]$ è un sottospazio.
Anche $\{ f \in \mathbb{R}[x] : f(a) = 0 \}$ è un sottospazio $\forall a \in \mathbb{R}$!

Ma $\{ f \in \mathbb{R}[x] : f(0) = a \}$ NO se $a \neq 0$.

5) $\mathbb{R}[x]$ è un sottospazio di $\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ funzione continua} \}$

c) $\left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : t_1 + t_2 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$ è un sottospazio.

Più generalmente, se $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ fissi,

$\left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_1 t_1 + a_2 t_2 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$ è un sottospazio

Ancora più generalmente, se $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ fissi,

$$\left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m : a_1 t_1 + a_2 t_2 + \dots + a_m t_m = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^m \text{ sottospazio.}$$

Quindi: le soluzioni di un equazione lineare omogeneo a n variabili definiscono un sottospazio di $\mathbb{R}^m$.

Generalizzazione ultima:

$$\left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m : \begin{matrix} a_{11} t_1 + a_{12} t_2 + \dots + a_{1m} t_m = 0 \\ a_{21} t_1 + a_{22} t_2 + \dots + a_{2m} t_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1} t_1 + a_{n2} t_2 + \dots + a_{nm} t_m = 0 \end{matrix} \right\} \subset \mathbb{R}^m \text{ sottospazio}$$

Quindi: le soluzioni di un sistema di equazioni lineari omogenei definisce un sottospazio di $\mathbb{R}^m$.

Vedremo: ogni sottospazio di $\mathbb{R}^m$ è il sottospazio delle soluzione di un sistema lin. omogeneo.

Combinazioni lineari

Def. Sia V uno spazio vettoriale, $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$. Una combinazione lineare di $v_1, \dots, v_m$ è una somma $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m \in V$, dove $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$. La combinazione lineare è detta banale se $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$. In questo caso $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda v_m = 0$.

Nota: Una combinazione lineare può essere 0 ma non banale.

Esempio: $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Allora $-2 v_1 + 1 \cdot v_2 = 0$.

Def Siano $v_1, \dots, v_m \in V$ m vettori. Il <u>sottospazio</u> generato da $v_1, \dots, v_m$ è:

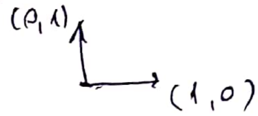
$$\mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_m) := \{ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_r v_m : \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R} \}$$

Quindi $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_m)$ è l'insieme delle combinazioni lineari.

Prop. $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_m) \subset V$ è un sottospazio.

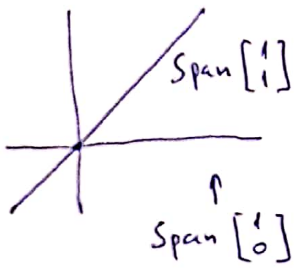
Dim. Verificare $v, w \in \mathrm{Span} \Rightarrow v + w \in \mathrm{Span}$ e $\lambda v \in \mathrm{Span}$ $\forall \lambda$.

Esempi 1) $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$



$\mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $\mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ sono due rette.

Ma anche $\mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ è una retta.



2) Sia $W := \left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : t_1 = 0 \right\}$

Allora $W = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

Quindi un sottospazio può essere lo Span di vettori diversi!

Def I vettori $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ sono <u>linearmente indipendenti</u> se $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ vale <u>solo</u> per $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$.

Altrimenti sono <u>linearmente</u> dipendenti.

Prop. $v_1, v_2, \dots, v_m$ sono linearmente dipendenti $\Longleftrightarrow$ $\exists i$: v_i è combinazione lineare dei v_j per $j \neq i$.

Dim. $\Rightarrow$ $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m$: $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_m = 0$.
<u>non</u> tutti $= 0$

Ad esempio $\lambda_i \neq 0$. Dividiamo per λ_i:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_i} v_2 + \dots + 1 \cdot v_i + \dots + \frac{\lambda_m}{\lambda_i} v_m = 0$$

$$\Rightarrow \quad v_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_i} v_2 - \dots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} v_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} v_{i+1} - \dots - \frac{\lambda_m}{\lambda_i} v_m.$$

$\Leftarrow$: Se $v_i = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \dots + \lambda_m v_m$

allora $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} - v_i + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \dots + \lambda_m v_m = 0$.

Come si vede se m vettori $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ sono lin. indipendenti?

Siano

$$v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}.$$

L'equazione $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ vale se e solo se $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ è soluzione del sistema

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1m} x_m &= 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2m} x_m &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nm} x_m &= 0 \end{aligned} \qquad (*)$$

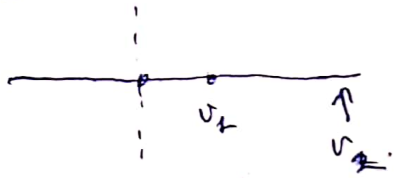
[si ricorda che il vettore 0 di $\mathbb{R}^n$ è $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$!]

Quindi $v_1, \dots, v_m$ sono lin. <u>indipendenti</u> $\Leftrightarrow$ $(*)$ ammette <u>solo</u> la soluzione <u>banale</u> $(0, \dots, 0)$.

<u>Interpretazione geometrica</u>: $n = 2$

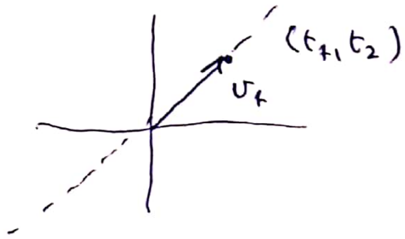
v_1, v_2 sono lin. dipendenti $\Leftrightarrow$ v_1 o $v_2 = 0$ oppure $\exists \lambda : v_2 = \lambda v_1$

Ad esempio, se $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, allora $v_2 = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \end{bmatrix}$, i.e. corrisponde a un punto della retta $x_2 = 0$:



In generale, se $v_1 = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$, v_2 deve essere $\begin{bmatrix} \lambda t_1 \\ \lambda t_2 \end{bmatrix}$, quindi

v_1, v_2 sono lin. dipendenti $\Leftrightarrow$ i punti corrispondenti sono sulla stessa retta attraverso $(0,0)$.



Per $n = 3$ si verifica: v_1, v_2, v_3 sono lin. dipendenti $\Leftrightarrow$ i punti corrispondenti sono nello stesso <u>piano</u> attraverso $(0,0,0)$.

<u>Esempio</u>: Si decide se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono lin. indipendenti:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo cercare le soluzioni del sistema lineare omogeneo con la matrice di coefficienti associata:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Algoritmo di Gauss:

$$\underset{R_3-3R_1}{\overset{R_2-2R_1}{\rightsquigarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \overset{R_3-R_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3 pivots, una variabile libera $\Rightarrow \infty$ soluzioni!

Quindi il sistema ammette soluzioni non banali $\Rightarrow$ i vettori sono lin. <u>dipendenti</u>!
Però lo stesso argomento dà: i primi 3 vettori sono lin. <u>in</u>dipendenti!

<u>Osservazione</u>: In questo esempio $\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3$.

Come $\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) \subseteq \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4)$, basta vedere: $\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3$. Infatti, se $v = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, applicando Gauss si ottiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 2 & 0 & 0 & b_2 \\ 3 & 1 & 1 & b_3 \end{array}\right] \underset{R_3-3R_1}{\overset{R_2-2R_1}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & -2 & 0 & b_2-2b_1 \\ 0 & -2 & 1 & b_3-3b_1 \end{array}\right] \overset{R_3-R_2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & -2 & 0 & b_2-2b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_3-b_1-b_2 \end{array}\right]$$

3 pivots nelle 3 colonne a sinistra $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= b_1 \\ 2x_1 &= b_2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= b_2 \end{aligned}$$

ammette una (unica soluzione) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \Rightarrow$

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

i.e. il vettore generale v è contenuto in $\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$.

In generale:

Prop. Se $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ sono vettori tali che v_n è combinazione lineare di $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ $\Rightarrow$
$\mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$

Dim. Si ricorda che
$\mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \{ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n : \lambda_i \in \mathbb{R} \}$
Se d'altra parte $v_n = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{n-1} v_{n-1}$,

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = \underbrace{(\lambda_1 + \alpha_1) v_1 + (\lambda_2 + \alpha_2) v_2 + \dots + (\lambda_{n-1} + \alpha_{n-1}) v_{n-1}}_{\in \mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})}$$

Corollario. Se $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$, si possono trovare $r \leq n$ vettori tra loro, diciamo $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$ tali che $\mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \mathrm{Span}(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r})$ e $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$ sono linearmente indipendenti.

Dim. Se $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono indipendenti $\Rightarrow$ FINITO.
Se no, $\exists\, v_i$ che è combinazione lineare degli altri.
Cambiando notazione, si può supporre $v_i = v_n$.
Ma allora $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n) = \mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$. [Prop.]
Si ripeta la procedura con $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$.

Esempi:
1) Nell'esempio precedente v_4 era combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 [ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ l'era].
e v_1, v_2, v_3 erano già indipendenti.

2) Se $v_2 = 2v_1$, $v_3 = 3v_1$, la procedura precedente dà:

$$\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Span}(v_1, v_2) = \mathrm{Span}(v_1).$$

Quindi è possibile che alla fine rimane un solo vettore!

Def. Un sistema $v_1, \ldots, v_n$ di vettori è una <u>base</u> di V se i vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono lin. <u>indipendenti</u> e $\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_n) = V$.

Oss. Dunque l'osservazione (Cor.) precedente dice: se $\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_n) = V$, si può scegliere una <u>base</u> di V fra i $v_1, \ldots, v_n$.

Esempi: 1) Base standard di $\mathbb{R}^n$:

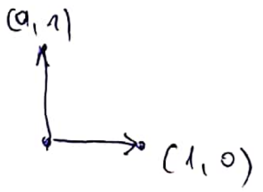
$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si osserva:

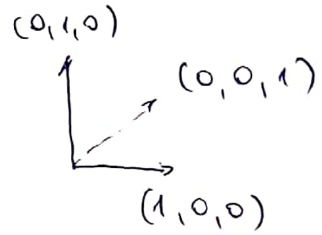
$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n.$$

Dunque $\mathrm{Span}(e_1, \ldots, e_n) = \mathbb{R}^n$ e $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0$ se e solo se $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

$n = 2$:



$n = 3$:



Ma questo non è l'unica base, ce ne sono tante! Ad esempio, per $n = 2$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ è una base: si guarda $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = (\lambda_1 - \lambda_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2) Base standard di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3) Base standard di $\mathbb{R}[x]_{\leq d} := \{ f \in \mathbb{R}[x] : \deg(x) \leq d \}$:

$1, x, x^2, \ldots, x^d$. Infatti,

$a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \ldots + a_0 = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \ldots + a_d \cdot x^d$,

e il sistema è indipendente (differenza di gradi!)

~~Def~~. 4) $\mathbb{R}[x]$ non ammette di base finita. Infatti,
$\nexists\ f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}[x]$: $\text{Span}(f_1, \dots, f_n) = \mathbb{R}[x]$,
perché se $f \in \text{Span}(f_1, \dots, f_n)$, allora
$\deg(f) \leq \max(\deg(f_1), \dots, \deg(f_n))$.

[Comunque è vero: $\text{Span}(1, x, x^2, x^3, \dots) = \mathbb{R}[x]$ e ogni sottoinsieme finito di $1, x, x^2, \dots$ è lin. indipendente]

<u>Prop.</u> Sia $v_1, \dots, v_n$ una base di V, $v \in V$ un vettore. Allora
$\exists!\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$: $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$

[i.e. ogni vettore si scrive in modo <u>unico</u> come comb. lineare degli elementi della base]

<u>Dim.</u> Come $V = \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$, l'esistenza degli α_i è chiara.
Se adesso $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \Rightarrow$

$$0 = (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) v_n$$

$\Rightarrow \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$ perché i v_i sono lin. <u>indipendenti</u>.

<u>Def.</u> Gli α_i sono le <u>coordinate</u> di v rispetto alla base $v_1, \dots, v_n$.

<u>Esempi</u> 1) Sappiamo già: $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
sono una base di $\mathbb{R}^3$. Troviamo le coordinate di $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ rispetto a questa base:

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$ Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 3R_1]{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \mapsto -\frac{1}{2} R_2]{R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - R_2}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= 1 \\ \alpha_2 &= -1 \\ \alpha_3 &= -1 \end{aligned}$$

2) Verifichiamo: $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Si dimostra che
$$\alpha_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} + \alpha_3\begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$
ammette un'unica soluzione $\forall\, b_1, b_2, b_3$ [in particolare, per $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ solo la soluzione banale $\Rightarrow$ sono lin. indipendenti] Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&b_1\\0&0&1&b_2\\1&0&1&b_3\end{array}\right] \overset{R_3-R_1}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&b_1\\0&0&1&b_2\\0&-2&-2&b_3-b_1\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&b_1\\0&-2&-2&b_3-b_1\\0&0&1&b_2\end{array}\right]$$

$$\underset{R_2 \mapsto -\frac{1}{2}R_2}{\overset{R_1+R_2}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&b_3\\0&1&1&\frac{1}{2}(b_1-b_3)\\0&0&1&b_2\end{array}\right] \underset{R_2-R_3}{\overset{R_1-R_3}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&b_3-b_2\\0&1&0&\frac{1}{2}(b_1-b_3)-b_2\\0&0&1&b_2\end{array}\right]$$

$\Rightarrow \alpha_1 = b_3 - b_2,\quad \alpha_2 = \frac{1}{2}(b_1 - b_3) - b_2,\quad \alpha_3 = b_2.$

Ad esempio, le coordinate di $\begin{bmatrix}2\\0\\4\end{bmatrix}$ rispetto a questa base sono $\alpha_1 = 4,\ \alpha_2 = -1,\ \alpha_3 = 0.$

3) In $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ $1, x, x^2$ è una base.

Si verifica: anche $1, 1+x, (1+x)^2$ formano una base.

Indipendenza lineare: $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2(1+x) + \lambda_3\underbrace{(1+x)^2}_{1+2x+x^2} = 0$

$\Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\cdot 1 + (\lambda_2 + 2\lambda_3)x + \lambda_3 x^2 = 0.$

$1, x, x^2$ indipendenti $\Rightarrow \lambda_3 = \lambda_2 + 2\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$

$\mathrm{Span}(1, 1+x, (1+x)^2) = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$: Basta vedere che $1, x, x^2 \in \mathrm{Span}(1, 1+x, (1+x)^2)$ [poi fare sostituzioni in $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.] Ma

$$1 = 1\cdot 1 + 0\cdot(1+x) + 0\cdot(1+x)^2$$
$$x = (-1)\cdot 1 + 1\cdot(1+x) + 0\,(1+x)^2$$
$$x^2 = 1\cdot 1 + (-2)(1+x) + 1\,(1+x)^2$$

Adesso: siano $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$. Metodo per trovare un sistema di equazioni lineari omogenei tale che il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ associato sia $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_m)$:

1) Si sceglie una base di $\mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_m)$. Possiamo supporre: questa base è $v_1, \dots, v_r$ per $r \leq m$ [rinumerotazione]

2) Siano $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \dots, v_r = \begin{bmatrix} a_{1r} \\ \vdots \\ a_{nr} \end{bmatrix} \rightsquigarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nr} \end{bmatrix}$

$v_1, \dots, v_r$ lin. indipendenti $\Leftrightarrow$ nella forma a scalini di A c'è un pivot in ogni colonna.

3) Sia adesso $v = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ qualsiasi.

$v \in \mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_r) \Leftrightarrow v_1, v_2, v_3, \dots, v_r, v$ sono lin. dipendenti $\Leftrightarrow$ nella forma a scalini della matrice $\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nr} & b_n \end{bmatrix}$ ci sono sempre r pivots nelle prime r colonne

$\Leftrightarrow$ l'ultima colonna non contiene di pivots.

Questo dà equazioni lineari per i $b_1, b_2, \dots, b_n$.

Esempio.

1) $n = 3$ $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ sono lin. indipendenti perché v_2 non è multiplo di v_1. Metodo sopra:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 3 & b_2 \\ 1 & 1 & b_3 \end{bmatrix} \underset{R_3 - R_1}{\overset{R_2 - R_1}{\rightsquigarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 2 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & b_3 - b_1 \end{bmatrix}$$

2 pivots nelle prime 2 colonne. La terza non contiene di pivot $\Leftrightarrow b_3 - b_1 = 0$.

Quindi $\mathrm{Span}(v_1, v_2) = \{$ soluzioni di $x_3 - x_1 = 0 \}$.

2) $n = 4$ $\quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$

Qui v_1, v_2 sono lin. indipendenti, ma $v_3 = v_1 + v_2$
$\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ lin. dipendenti. Quindi
v_1, v_2 è una base di $\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$.

Metodo sopra:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & b_2 \\ 1 & 3 & b_3 \\ 0 & 4 & b_4 \end{bmatrix} \underset{R_3 - R_1}{\overset{R_2 - R_1}{\rightsquigarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 2 & b_3 - b_1 \\ 0 & 4 & b_4 \end{bmatrix} \underset{R_4 - 4R_2}{\overset{R_3 - 2R_2}{\rightsquigarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & b_3 - 2b_2 + b_1 \\ 0 & 0 & b_4 - 4b_2 + 4b_1 \end{bmatrix}$$

2 pivots nelle prime 2 colonne come atteso.
La terza colonna non contiene di pivots $\Leftrightarrow$

$$b_3 - 2b_2 + b_1 = 0$$
$$b_4 - 4b_2 + 4b_1 = 0$$

Quindi $\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Span}(v_1, v_2) = \{$ soluzioni del sistema
$$x_3 - 2x_2 + x_1 = 0$$
$$x_4 - 4x_2 + 4x_1 = 0 \ \}$$

Dimensione

La dimensione di uno spazio V sarà definita come il numero degli elementi di una base. Per questo bisogna sapere: questo numero è lo stesso per ogni base.

Prop. Sia V uno spazio vettoriale che ammette una base $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Se $v_1, v_2, \ldots, v_r \in V$ e $\boxed{r > n}$ $\Rightarrow$ $v_1, v_2, \ldots, v_r$ sono lin. dipendenti.

Dim. per $n = 2$. Prima osservazione: se la prop. vale per $r = 3$, vale per ogni $r > 2$. Infatti, se $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ è una comb. lin. non banale,

allora $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + 0 \cdot v_4 + 0 \cdot v_5 + \dots + 0 \cdot v_r = 0$
è una comb. non banale (perchè λ_1, λ_2 o λ_3 è $\neq 0$).

Quindi siano $n = 2$, $r = 3$, e_1, e_2 una base di V.
Come $V = \text{Span}(e_1, e_2)$, $v_1, v_2, v_3 \in \text{Span}(e_1, e_2)$. Quindi

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_{11} e_1 + a_{12} e_2 \\ v_2 &= a_{21} e_1 + a_{22} e_2 \\ v_3 &= a_{31} e_1 + a_{32} e_2 \end{aligned}\right\} (*)$$

Dobbiamo trovare $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, non tutti $= 0$ tali che
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$. Facciamo la sostituzione di $(*)$:

$$\lambda_1 (a_{11} e_1 + a_{12} e_2) + \lambda_2 (a_{21} e_1 + a_{22} e_2) + \lambda_3 (a_{31} e_1 + a_{32} e_2) = 0.$$

$$\Updownarrow$$

$$(\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \lambda_3 a_{31}) e_1 + (\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \lambda_3 a_{22}) e_2 = 0$$

Ma e_1, e_2 sono lin. indipendenti, quindi

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \lambda_3 a_{31} &= 0 \\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \lambda_3 a_{32} &= 0. \end{aligned}\right. \quad (+)$$

Questo è un sistema omogeneo di equazioni per $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ con matrice di coefficienti

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Se faccio l'algoritmo di Gauss, ottengo ≤ 2 pivots [ci sono solo due righe] $\Rightarrow$ ci sarà ≥ 1 colonna senza pivot $\Rightarrow$ il sistema avrà ∞ di soluzioni $\Rightarrow$ ci sarà una soluzione <u>non banale</u> $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Ma se $(+)$ ha una soluzione non banale $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ $\Rightarrow$ anche $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ sarà una combinazione non banale $\Rightarrow$ SONO HAPPY.

La dimostrazione per n, r generale è la stessa: alla fine ottengo un sistema lineare di n equazioni in $r > n$ variabili $\Rightarrow$ c'è sempre una soluzione non banale.

Cor. 1. Sia $e_1, \dots, e_n$ una base di V.
Se $v_1, \dots, v_n$ è un sistema lin. indipendente
$\Rightarrow$ anche $v_1, \dots, v_n$ è una base di V.

Dim. Dobbiamo dimostrare: $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n) = V$.
Sia $v \in V$. Dopo la proposizione, il sistema di $n+1$ vettori $v_1, \dots, v_n, v$ è lin. dipendente.
Quindi $\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ non tutti $= 0$ tali che
$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} v = 0$. $(*)$
Se $\lambda_{n+1} = 0$, allora $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ perchè $v_1, \dots, v_n$ sono indipendenti
$\Rightarrow$ ↯ con $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ non tutti $= 0$.
Quindi $\lambda_{n+1} \neq 0$. Ma allora $(*)$ mi dà

$$v = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}} v_1 + \dots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) v_n \Rightarrow v \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n).$$

Questo vale per ogni $v \in V \Rightarrow V = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$.

Cor. 2. Se $v_1, \dots, v_r$ ed $e_1, \dots, e_n$ sono due basi di V
$\Rightarrow \boxed{r = n}$

Dim. Se $r > n$, $v_1, \dots, v_r$ è lin. dipendente dopo la prop. se $e_1, \dots, e_n$ è una base. Quindi $r \leq n$.
Se $r < n$ e $v_1, \dots, v_r$ è una base $\Rightarrow e_1, \dots, e_n$ è lin. dipendente ↯. Dunque $r = n$.

Def. Se V ammette una base $e_1, \dots, e_n$,
n è la dimensione di V. [ben definita secondo Cor. 2.]

Cor. 3 Se la dimensione di V è n [NOTAZIONE: $\dim V = n$] e $v_1, \dots, v_m$ sono vettori lin. indipendenti con $\boxed{m < n}$ $\Rightarrow \exists\, w_{m+1}, w_{m+2}, \dots, w_n$: $v_1, \dots, v_m, w_{m+1}, \dots, w_n$ sono una base di V.

Dim. $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_m)$ non può essere V, perchè se $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_m) = V \Rightarrow v_1, \dots, v_m$ è una base, ma $m < n$ e $\dim V = n$ ↯

Quindi $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_m) \neq V \Rightarrow \exists\, w_{m+1} \in V$: $w_{m+1} \notin \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_m)$. Ma allora $v_1, \dots, v_m, w_{m+1}$ sono lin. indipendenti: se

$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m + \lambda_{m+1} w_{m+1} = 0$,

$\lambda_{m+1} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$ ~~non può essere 0~~ come nella dim. del Cor. 1.

~~Ma allora~~ Se $\lambda_{m+1} \neq 0 \Rightarrow v_{m+1} = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_{m+1}}\right) v_1 + \dots + \left(\frac{-\lambda_m}{\lambda_{m+1}}\right) v_m \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_m)$ ↯

Per ricapitolare: Se $\dim V = n$ e $v_1, \dots, v_r \in V$

$\boxed{r > n} \Rightarrow v_1, \dots, v_r$ sono lin. dipendenti.

$\boxed{r = n}$ e $v_1, \dots, v_n$ lin. indipendente $\Rightarrow$ è una base.

$\boxed{r < n}$ e $v_1, \dots, v_r$ lin. indipendente $\Rightarrow$ si completa in una base di V.

Esempio: a) Decidiamo se
$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
è una base di $\mathbb{R}^3$.

$\dim \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow$ se sono indipendenti, formano una base.

Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2 pivots $\Rightarrow$ vettori dipendenti. Però i pivots sono nelle colonne 1, 3 $\Rightarrow$ $v_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 := \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ indipendenti!

b) Completiamo questo sistema indipendente in una base. $\dim \operatorname{Span}(v_1, v_2) = 2$, $\dim \mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ basta trovare un vettore di $\mathbb{R}^3$ non contenuto in $\operatorname{Span}(v_1, v_2)$.

Come trovarlo? Idea: $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ è la base standard.

Se $e_1, e_2, e_3 \in \operatorname{Span}(v_1, v_2) \Rightarrow \operatorname{Span}(e_1, e_2, e_3) \subset$
$\subset \operatorname{Span}(v_1, v_2)$.

Ma $\operatorname{Span}(e_1, e_2, e_3) = \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ impossibile!

Quindi (almeno) uno di $e_1, e_2, e_3 \notin \operatorname{Span}(v_1, v_2)$.

Cerchiamo quello.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 pivots $\Rightarrow$ e_3 buono!

Ma per esempio e_1 non è buono!

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Solo due pivots!

Questa idea funziona in generale!

Prop. [$\dim V < \infty$] Sia $W \subset V$ un sottospazio. Allora
1) $\dim W \leq \dim V$.
2) Se $W \neq V$, allora $\dim W < \dim V$.

Dim. 1) Sia $w_1, \dots, w_r$ una base di W. Se $r > \dim V$
[Prop. p. 18] $\Rightarrow$ $w_1, \dots, w_r$ dipendenti in V $\Rightarrow$ anche in W.

2) Se $r = \dim V \Rightarrow w_1, \dots, w_r$ base anche di V
$\Rightarrow \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_r) = V \Rightarrow V = W$.

La prop. è molto utile per calcolare dimensioni di sottospazi.

Esempio: Sia $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : b = c \right\}$ matrici simmetrici

$\dim M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$ [base standard!]

$V \neq M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \Rightarrow \dim V \leq 3$. Ma

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ sono indipendenti [facile] $\Rightarrow \dim V = 3$.

Esempio: a) $V = \{ f \in \mathbb{R}[x] : \deg(f) \leq 3,\ f(1) = 0 \}$ sottospazio di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$

$V \subsetneq \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \Rightarrow \dim V < \dim \mathbb{R}[x]_{\leq 3} = 4$
[$1, x, x^2, x^3$ base]

Ma $x-1, x^2-1, x^3-1 \in V$ e sono indipendenti [facile] $\Rightarrow \dim V \geq 3 \Rightarrow \dim V = 3$,

b) $W = \{ f \in \mathbb{R}[x] : \deg(f) \leq 3,\ f(1) = f(2) = 0 \}$

$W \subsetneq V$ sottospazio $\Rightarrow \dim W \leq 2$.

Ma $(x-1)(x-2),\ (x-1)^2(x-2) \in W$
e sono indipendenti [ovvio] $\Rightarrow \dim W = 2$.

$(x-1)(x-2),\ (x-1)^2(x-2)$ è una base di W
Si completa in una base di V:
$x-1,\ (x-1)(x-2),\ (x-1)^2(x-2)$

E di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$: $1,\ x-1,\ (x-1)(x-2),\ (x-1)^2(x-2)$.

Esempio:

Sia $V \subset M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ il sottospazio delle matrici dove la somma di ogni ~~rango~~ riga è 0.
[V è infatti un sottospazio.] Calcoliamo $\dim V$.

Si ricorda: $\dim M_{3\times 3}(\mathbb{R}) = 9$. Quindi $\dim V < 9$.

Si verifica:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

lin. indipendenti
[ciascuna ha un elemento $\neq 0$ dove gli altri sono $= 0$]

Quindi $\dim V \geq 6$. Dimostriamo che infatti $\dim V = 6$.

Siano $V_1 = \{ A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) :$ la somma della prima riga $= 0\}$

$V_2 = \{ A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) :$ la somma della prima e seconda riga $= 0\}$

Allora $M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \supsetneq V_1 \supsetneq V_2 \supsetneq V \implies$

$$9 = \dim M_{3\times 3}(\mathbb{R}) > \dim V_1 > \dim V_2 > \dim V \geq 6$$

$$\implies \dim V = 6.$$

Intersezioni di sottospazi: se $W_1, W_2 \subset V$ sottospazi $\implies W_1 \cap W_2$ sottospazio. [infatti, $w, w' \in W_1 \cap W_2 \implies w + w' \in W_1 \cap W_2$, $\lambda w \in W_1 \cap W_2$.]

Anche $W_1 \cap \ldots \cap W_r \subset V$ è un sottospazio se $W_1, \ldots, W_r$ lo sono.

Esempio. Sia $W_i \subset \mathbb{R}^n$ il sottospazio delle soluzioni dell'equazione omogenea $E_i : a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n = 0$

$i = 1, \ldots, r$.

Allora $W_1 \cap W_2 \cap \ldots \cap W_r$ è il sottospazio delle soluzioni comuni di $E_1, E_2, \ldots, E_r$.

La formula di Grassmann

Def. Siano $V_1, V_2 \subset V$ due sottospazi.

$$V_1 + V_2 := \{ v_1 + v_2 : v_1 \in V_1, \ v_2 \in V_2 \}$$ la somma di V_1, V_2

Oss. $V_1 + V_2 \subset V$ è un sottospazio.

Dim. Se $v, w \in V_1 + V_2$,

$$\left.\begin{array}{ll} v = v_1 + v_2 & (v_i \in V_i) \\ w = w_1 + w_2 & (w_i \in V_i) \end{array}\right\} \Rightarrow v + w = \underbrace{(v_1 + w_1)}_{\in V_1} + \underbrace{(w_2 + w_2)}_{\in V_2} \in V_1 + V_2$$

Se $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda v = \lambda(v_1 + v_2) = \underbrace{\lambda v_1}_{\in V_1} + \underbrace{\lambda v_2}_{\in V_2} \in V_1 + V_2$.

Altre notazioni: $\langle V_1, V_2 \rangle$, $\mathrm{Span}(V_1, V_2)$. Infatti:

Prop. Se $v^1, v^2, \dots, v^n \in V_1 + V_2 \Rightarrow \mathrm{Span}(v^1, \dots, v^n) \subset V_1 + V_2$.

Dim. $V_1 + V_2$ è un sottospazio che contiene $v^1, \dots, v^n \Rightarrow$ contiene le loro combinazioni lineari.

Esempi. 1) $V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$, $V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ sottospazi:

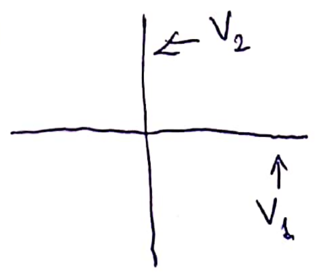
$$V_1 + V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2.$$

2) $V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} : a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$, $V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix} : a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$.

$V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$, ma anche $V_1 \cap V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix} : a_2 \in \mathbb{R} \right\}$

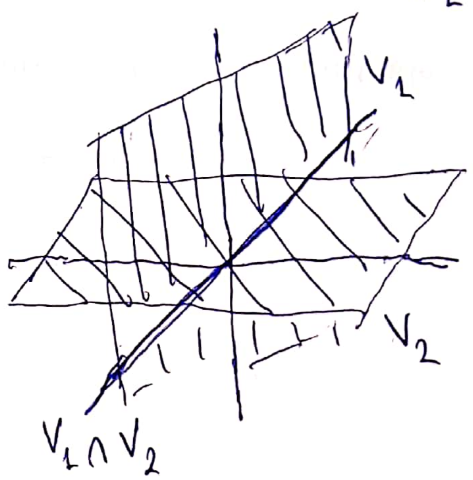
Geometricamente:

1)



$V_1 + V_2$ **non** è una **riunione**!!

2)

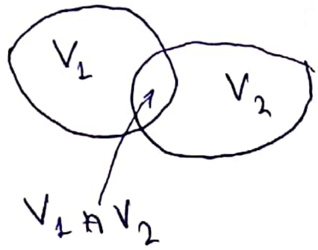


V_1, V_2 due piani in $\mathbb{R}^3$, $V_1 \cap V_2$ una retta, $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$

Teorema. Se $\dim V < \infty$, $V_1, V_2 \subset V$ sottospazi,
$$\dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$
[Formula di Grassmann.]

Negli esempi precedenti: 1) $2 = 1+1-0$, 2) $3 = 2+2-1$.

Dim.



Sia $e_1, \dots, e_r$ una base di $V_1 \cap V_2$.
Si completa in una base
$e_1, \dots, e_r, v_{r+1}, \dots, v_n$ di V_1
$e_1, \dots, e_r, w_{r+1}, \dots, w_m$ di V_2.

Quindi $\dim V_1 = n$, $\dim V_2 = m$, $\dim V_1 \cap V_2 = r$.

Verifichiamo: $e_1, \dots, e_r, v_{r+1}, \dots, v_n, w_{r+1}, \dots, w_m$ è una base di V_1+V_2. Se vero $\Rightarrow \dim(V_1+V_2) = n+m-r$ ✓

Indipendenza lineare: Sia
$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r + \mu_1 v_{r+1} + \dots + \mu_{n-r} v_n + \nu_1 w_{r+1} + \dots + \nu_{m-r} w_m = 0$$
Tutti i coefficienti $\lambda_i, \mu_i, \nu_i \in \mathbb{R}$. Dobbiamo vedere: tutti $=0$.
$$\underbrace{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r + \mu_1 v_{r+1} + \dots + \mu_{n-r} v_n}_{\in V_1} = \underbrace{-\nu_1 w_{r+1} - \dots - \nu_{m-r} w_m}_{\in V_2}.$$

Quindi $-\nu_1 w_{r+1} - \dots - \nu_{m-r} w_m \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow$
come $e_1, \dots, e_r$ è una base di $V_1 \cap V_2$, $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_r$:
$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r = -\nu_1 w_{r+1} - \dots - \nu_{m-r} w_m$. Quindi
$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r + \nu_1 w_{r+1} + \dots + \nu_{m-r} w_m = 0.$$
Ma $e_1, \dots, e_r, w_{r+1}, \dots, w_m$ base di $V_2 \Rightarrow$ lin. indipendenti $\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_r = \boxed{\nu_1 = \dots = \nu_{m-r} = 0.}$

Ma allora
$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r + \mu_1 v_{r+1} + \dots + \mu_{n-r} v_n = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = \dots = \lambda_r = \mu_1 = \dots = \mu_{n-r} = 0}$$
perché $e_1, \dots, e_r, v_{r+1}, \dots, v_n$ base di V_1. OK!

$\mathrm{Span}(e_1, \dots, e_r, v_1, \dots, v_{n-r}, w_1, \dots, w_{m-r}) = V_1 + V_2$:

Se $v \in V_1 + V_2$, $v = v^1 + v^2$: $v^1 \in V_1$, $v^2 \in V_2$.

Ma allora $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$:

$v^1 = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r + \alpha_{r+1} v_1 + \dots + \alpha_n v_{n-r}$

$v^2 = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_r e_r + \beta_{r+1} w_1 + \dots + \beta_m w_{m-r}$

perchè $e_1, \dots, e_r, v_1, \dots, v_{n-r}$ base di V_1

$e_1, \dots, e_r, w_1, \dots, w_{m-r}$ base di V_2

$\Rightarrow v_1 = v^1 + v^2 = (\alpha_1 + \beta_1) e_1 + \dots + (\alpha_r + \beta_r) e_r +$

$+ \alpha_{r+1} v_{r+1} + \dots + \alpha_n v_n + \beta_{r+1} w_1 + \dots + \beta_m w_m$ ✓

Esempi (vecchi esercizi di compito)

1) In $\mathbb{R}^4$ consideriamo i sottospazi

$$V = \left\{ \text{soluzioni di } \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

$$W = \mathrm{Span}\left(w_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Calcoliamo $\dim(V \cap W)$, $\dim(V + W)$.

$\dim W = 2$ perchè ovviamente $w_1 \neq \lambda w_2$.

Calcoliamo $\dim V$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{array}$$

x_3, x_4 variabili liberi $\Rightarrow$ $\begin{array}{l} x_2 = -x_3 - 3x_4 \\ x_1 = -2(-x_3 - 3x_4) - x_3 \\ \quad = x_3 + 6x_4 \end{array}$

Sol. generale: $\begin{bmatrix} x_3 + 6x_4 \\ -x_3 - 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_3 + 6x_4 \\ -x_3 - 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{w_1} + x_4 \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{w_2}$$

Quindi $\dim V = 2$ e v_1, v_2 è una base.

Cerchiamo $\dim(V+W)$:

$V + W = \text{Span}(v_1, v_2, w_1, w_2)$

Troviamo una base con Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{R_3 - R_1}{\overset{R_2 + R_1}{\rightsquigarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_3 + 2R_1}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_4 - 3R_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \tfrac{1}{3} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3 pivots $\Rightarrow$ le prime 3 colonne sono indipendenti, ma v_1, v_2, w_1, w_2 dipendenti $\Rightarrow \dim(V+W) = 3$.

Grassmann: $\dim V \cap W = \underbrace{\dim V}_{2} + \underbrace{\dim W}_{2} - \underbrace{\dim(V+W)}_{3} = 1$.

Ma possiamo anche calcolare $\dim(V \cap W)$ direttamente.

$$V \cap W = \left\{ \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ che soddisfano } \begin{matrix} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} (2\lambda_1 + 3\lambda_2) + 2(-2\lambda_2) + (\lambda_1 - 2\lambda_2) &= 0 \\ -(2\lambda_1 + 3\lambda_2) + (-2\lambda_2) + 3\lambda_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} 3\lambda_1 - 3\lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \dim(V \cap W) = 1$

perché $V \cap W = \{ \lambda(w_1 + w_2) : \lambda \in \mathbb{R} \}$.

2) Siano

$$V = \mathrm{Span}\left(\overset{v_1}{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}} \right), \quad W = \mathrm{Span}\left(\overset{w_1}{\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}}, \overset{w_2}{\begin{bmatrix}1\\2\\0\\2\end{bmatrix}} \right)$$

Trovare basi di $V+W$, $V \cap W$.

Per $V+W$:

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-1&0&2\\1&1&1&0\\1&-1&0&2\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-2&-1&1\\0&0&0&-1\\0&-2&-1&1\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-2&-1&1\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

3 pivots $\Rightarrow$ $\dim(V+W) = 3$, base: v_1, v_2, w_2.

Grassmann: $\dim(V\cap W) = \dim V + \dim W - \dim(V+W) = 2+2-3$ $\boxed{= 1}$.

Quindi ogni vettore di $V \cap W$ è una base se $\neq 0$.

$0 \neq w_1 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \Rightarrow w_1 \in V \cap W$ ed è una base.

Come calcolare $V \cap W$ direttamente? Trovare equazioni per $V, W, V\cap W$.

Per V:

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&1&x_1\\1&-1&x_2\\1&1&x_3\\1&-1&x_4\end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{bmatrix}1&1&x_1\\0&-2&x_2-x_1\\0&0&x_3-x_1\\0&-2&x_4-x_1\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}1&1&x_1\\0&-2&x_2-x_1\\0&0&x_3-x_1\\0&0&x_4-x_2\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x_3 - x_1 = 0, \quad x_4 - x_2 = 0 \qquad (*)$

Per W:

$$\begin{bmatrix}1&1&x_1\\0&2&x_2\\1&0&x_3\\0&2&x_4\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}1&1&x_1\\0&2&x_2\\0&-1&x_3-x_1\\0&2&x_4\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}1&1&x_1\\0&2&x_2\\0&0&x_3-x_1+\frac{x_2}{2}\\0&0&x_4-x_2\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x_3 - x_1 + \frac{x_2}{2} = 0, \quad x_4 - x_2 = 0 \qquad (**)$

Per $V \cap W$: $(*)$ & $(**)$ $\Rightarrow$ $x_3 = x_1$, $x_4 = x_2$

$x_2 = 0$

$\Rightarrow x_3 = x_1, \quad x_2 = x_4 = 0.$

Quindi $V \cap W = \{\lambda w_1 : \lambda \in \mathbb{R}\}$ come l'abbiamo visto.

Metodo con Grassmann più veloce!!