

Autovalori, autovettori

61

Def. Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{R} , $\dim V < \infty$, $\varphi: V \rightarrow V$ appl. lineare. $\lambda \in \mathbb{R}$ è autovalore di φ se $\exists \underline{v \neq 0}$ in V :
$$\varphi(v) = \lambda \cdot v.$$

In questo caso v è un autovettore associato a λ .

Oss. 1) v può essere autovettore per un solo λ . Infatti, se v è autovettore per λ_1, λ_2 ,

$$\lambda_1 v = \varphi(v) = \lambda_2 v \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \text{ come } v \neq 0.$$

2) Fissando λ , possiamo avere molti autovettori associati allo stesso λ . Caso estremo: $\varphi = \text{id}$. In questo caso $\varphi(v) = v \quad \forall v \in V \Rightarrow \forall v \in V$ autovettore per $\lambda = 1$.

Esempio simile: $\varphi(v) = d v \quad \forall v$, quindi $\varphi = d \cdot \text{id}$.

Allora $\forall v \in V$ è autovettore per d .

Prop. a) Se $\lambda \in \mathbb{R}$, gli autovettori per λ ^{insieme con 0} formano un sottospazio di V . [Notazione: V_λ , terminologia: autospazio.]

b) Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0\}$.

Dim. a) Se $v_1, v_2 \in V$ tali che $\varphi(v_1) = \lambda v_1$, $\varphi(v_2) = \lambda v_2$
 $\Rightarrow \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$
 $\varphi(\alpha v_1) = \alpha \varphi(v_1) = \alpha \lambda v_1 = \lambda(\alpha v_1)$.

b) risulta da 1) sopra.

Perché sono interessanti?

Def. φ è diagonalizzabile se \exists base di V dove la matrice di φ è diagonale.

[Se $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ data da $v \mapsto A \cdot v$, diciamo anche che la matrice A è diagonalizzabile.]

Prop. φ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow \exists$ base di V costituita di autovettori di φ .

Dim. \Rightarrow : Se e_1, \dots, e_n è una base dove la matrice di φ è

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad [\text{i } \lambda_i \text{ non necessariamente distinti!}]$$

$\Rightarrow \varphi(e_1) = \lambda_1 e_1, \dots, \varphi(e_n) = \lambda_n e_n$.

\Leftarrow : Viceversa, se e_1, \dots, e_n è una base di V dove $\varphi(e_1) = \lambda_1 e_1, \dots, \varphi(e_n) = \lambda_n e_n$, la matrice è come sopra.

Non tutte le φ sono diagonalizzabili! Esempio più semplice:

Esempio. $V = \mathbb{R}^2$, $\varphi: v \mapsto Av$ dove $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\text{Se } v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \varphi(v) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi(v) = \lambda v \text{ vale, se } \begin{cases} x_1 + x_2 = \lambda x_1 \\ \text{per } v \neq 0 & x_2 = \lambda x_2 \end{cases}$$

$$\text{Seconda eq.} \Rightarrow \lambda = 1 \text{ o } x_2 = 0.$$

Se $\lambda = 1$, $x_2 = 0$ dalla prima eq. e viceversa.

$$\text{Quindi } \varphi(v) = \lambda v \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ e } x_2 = 0 \text{ per } v \neq 0$$

Ma allora solo i multipli di $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ sono autovettori

$\Rightarrow \nexists$ base di autovettori per φ .

Come decidere se φ è diagonalizzabile? La chiave è data da:

Prop. Se $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sono autovalori distinti di φ
 v_i autovettore associato a λ_i $i = 1, \dots, r$
 $\Rightarrow v_1, \dots, v_r$ sono linearmente indipendenti.

Cor. 1) Ci sono un numero finito di autovalori
 distinti. [Perché $\dim V < \infty$]

2) φ è diagonalizzabile \Leftrightarrow se $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sono gli autovalori distinti di φ , $\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \dots + \dim V_{\lambda_r} = \dim V$.

[Infatti, sia e_{11}, \dots, e_{1m_1} base di V_{λ_1}
 e_{21}, \dots, e_{2m_2} " " " " V_{λ_2}
 \vdots
 e_{r1}, \dots, e_{rm_r} " " " " V_{λ_r}

Prop $\Rightarrow e_{11}, \dots, e_{1m_1}, e_{21}, \dots, e_{2m_2}, \dots, e_{r1}, \dots, e_{rm_r}$ lin. indipendenti perchè se $\underbrace{\alpha_{11}e_{11} + \dots + \alpha_{1m_1}e_{1m_1}}_{\in V_{\lambda_1}} + \dots + \underbrace{\alpha_{r1}e_{r1} + \dots + \alpha_{rm_r}e_{rm_r}}_{\in V_{\lambda_r}} = 0$

$\Rightarrow \alpha_{11}e_{11} + \dots + \alpha_{1m_1}e_{1m_1} = -\alpha_{r1}e_{r1} - \dots - \alpha_{rm_r}e_{rm_r} = 0$
dopo la Prop., ma allora $\forall \alpha_{ij} = 0$ perchè gli e_{ij} sono elementi di basi. Finalmente, gli e_{ij} formano una base di V se il loro numero è $= \dim V$.]

3) Se $n = \dim V$ e φ ha n autovalori distinti $\Rightarrow \varphi$ è diagonalizzabile. [Dopo la Prop. ha n autovettori indip!]
Il reciproco è falso! Esempio: $\varphi = id$.

In somma, metodo per decidere se φ è diagonalizzabile:

- 1) Trovare gli autovalori.
Se ci sono $n = \dim V$ distinti \Rightarrow siamo HAPPY.
Se no,
- 2) Trovare gli autovettori per ogni λ_i e calcolare $\dim V_{\lambda_i}$.
Se $\sum \dim V_{\lambda_i} = \dim V$, φ è diagonalizzabile.
Se $\sum \dim V_{\lambda_i} < \dim V$, φ non è diagonalizzabile.

Nell'esempio $\varphi(v) = Av$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = 1$ solo autovalore, $\dim V_{\lambda} = 1 < 2$.

Dim. della Prop. Siano v_1, \dots, v_r autvettoni per $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$)

Supponiamo $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = 0$. (*)

Dimostriamo $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$ con induzione su r . $r=1$ ovvio.

Applichiamo φ a (*): $\alpha_1 \varphi(v_1) + \dots + \alpha_r \varphi(v_r) = 0$.

Quindi per ipotesi $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_r \lambda_r v_r = 0$.

Moltiplichiamo (*) per λ_1 : $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_r \lambda_1 v_r = 0$ } -

[se $\lambda_1 = 0$, scegliamo un altro λ_i] $\alpha_1 (\lambda_2 - \lambda_1) v_2 + \dots + \alpha_r (\lambda_r - \lambda_1) v_r = 0$.

Per ipotesi di induzione, v_2, \dots, v_r sono indipendenti.

Quindi $\alpha_i (\lambda_i - \lambda_1) = 0 \quad i = 2, \dots, r$. Ma $\lambda_i - \lambda_1 \neq 0 \quad \forall i \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_r = 0 \Rightarrow$ dopo (*) $\alpha_1 v_1 = 0$.

Ma $v_1 \neq 0 \Rightarrow$ anche $\alpha_1 = 0$.

Come trovare gli autovalori?

v autvettore di φ $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \varphi(v) = \lambda v \Leftrightarrow \varphi(v) - \lambda v = 0$
 $\neq 0$ per $\lambda \Leftrightarrow (\varphi - \lambda \cdot \text{id})v = 0$.

Quindi λ autovalore di $\varphi \Leftrightarrow \text{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \text{id}) \neq 0$.

Ma abbiamo visto: se A è la matrice di φ rispetto ad una base

$\Rightarrow A - \lambda I$ è la matrice di $\varphi - \lambda \cdot \text{id}$, e

$\text{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \text{id}) \neq 0 \Leftrightarrow \text{Ker}(A - \lambda I) \neq 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$.

Def. Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, il polinomio caratteristico di A è

$P_A(t) := \det(A - t \cdot I) \in \mathbb{R}[x]$ [t è una variabile]

[Spesso $P_A(t)$ si definisce come $\det(t \cdot I - A)$; la differenza è solo un segno.]

Conclusione: λ è autovalore di $\varphi \Leftrightarrow \lambda$ radice di $P_A(t)$

dove $A =$ matrice di φ rispetto ad una base.

Oss. Infatti, $P_A(t)$ dipende solo da φ , non da A .

La matrice di φ rispetto ad un'altra base è PAP^{-1}

[P = matrice di cambiamento di basi]

$$\begin{aligned}
 P_{PAP^{-1}}(t) &= \det(PAP^{-1} - t \cdot I) = \det(PAP^{-1} - t \cdot PP^{-1}) \\
 &= \det(P(A - t \cdot I)P^{-1}) = \det(P) \det(A - tI) \det(P^{-1}) \\
 &= \det(A - tI) = P_A(t).
 \end{aligned}$$

Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow P_A(t) = \det \begin{bmatrix} a_{11}-t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-t & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-t \end{bmatrix}$

Vediamo: $\deg P_A(t) = n$.

Esempi. 1.) $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P_A(t) = \det \begin{bmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 0 & -t & 1 \\ 0 & 0 & -1-t \end{bmatrix} = (1-t)(-t)(-1-t)$$

Autovale: 1, 0, -1. Distinti $\Rightarrow \varphi$ diagonalizzabile.

Cerchiamo gli autovettori per trovare la "buona" base:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y = x \\ z = y \\ -z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e multipli.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \\ -z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e multipli.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y = -x \\ z = -y \\ -z = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ +2 \end{bmatrix} \text{ e multipli.}$$

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P_A(t) = \det \begin{bmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 0 & 1-t & 1 \\ 0 & 0 & 1-t \end{bmatrix} = (1-t)^3$

1 solo autovale!

3)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad P_A(t) = \det \begin{bmatrix} -t & 3 & 0 \\ 1 & -2-t & 0 \\ 1 & -3 & 1-t \end{bmatrix} =$$

$$= (1-t) \begin{vmatrix} -t & 3 \\ 1 & -2-t \end{vmatrix} = (1-t)(t^2 + 2t - 3) =$$

$$= (1-t)(t-1)(t+3) = -(t-1)^2(t+3)$$

Autovalori: 1, -3

Autovettori per 1: $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} 3y = x \\ x - 2y = y \\ x - 3y + z = z \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 3y \Rightarrow \dim(V_1) = \dim(\text{Ker}(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto x - 3y)) = 3 - 1 = 2$$

Una base di V_1 : $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Autovettori per -3: $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x \\ -3y \\ -3z \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} 3y = -3x \\ x - 2y = -3y \\ x - 3y + z = -3z \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = -y, -4y = -4z \Rightarrow x = -y = -z \Rightarrow \dim V_{-3} = 1$$

Una base di V_{-3} : $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Insomma: A è diagonalizzabile

nella base $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, dove diventa $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

2) [cont.] Autovettori per 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \left. \begin{matrix} x + y = x \\ y + z = y \\ z = z \end{matrix} \right\} \Rightarrow y = z = 0$$

\Rightarrow autovettori multipli di $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ NON DIAGONALIZZABILE

4) Per quali valori del parametro a è la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

diagonalizzabile?

$$P_A(t) = \det \begin{bmatrix} 2a-t & 1 & 1 \\ 1 & a-t & 1 \\ -1 & 1 & a-t \end{bmatrix} = (2a-t)[(a-t)^2 - 1] -$$

$$- [a-t+1] + [1+a-t] = (2a-t)[(a-t)^2 - 1]$$

\Rightarrow autovalori: $2a, a+1, a-1$

Se $a \neq \pm 1$, autovalori distinti \Rightarrow diagonalizzabile.

$a=1$ autovalori: $2, 2, 0$

$$* \text{ autovettori per } 2: \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + z = 2x \\ x + y + z = 2y \\ -x + y + z = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y = -z \\ x = 2y = -2z \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mu \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dim V_2 = 1$$

$$* \text{ autovettori per } 0: \left. \begin{array}{l} 2x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y = -z \\ x = 0 \end{array} \mu \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dim V_0 = 1$$

$\dim V_2 + \dim V_0 = 2 < 3 \Rightarrow$ non diagonalizzabile!

$a=-1$ autovalori: $-2, 0, -2$

$$* \text{ autovettori per } -2: \left. \begin{array}{l} -2x + y + z = -2x \\ x - y + z = -2x \\ -x + y - z = -2z \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y = -z \\ x = -2y \end{array}$$

\Rightarrow come sopra $\dim V_{-2} = 1$ & $\dim V_0 = 1$

\Rightarrow non diagonalizzabile!

La considerazione seguente può semplificare i calcoli:

Def. Sia λ un autovalore di φ .

La molteplicità algebraica di λ è la molteplicità di λ come radice di $P_A(t)$

La molteplicità geometrica di λ è $\dim V_\lambda$.

Prop. molteplicità geometrica di $\lambda \leq$ molteplicità algebrica di λ .

Dim. Sia $\dim V = n$, $\dim V_\lambda = r$. Sia e_1, \dots, e_r una base di V_λ .

Completiamola in una base di V : $e_1, \dots, e_r, v_{r+1}, \dots, v_n$.

Rispetto a questa base la matrice di φ è così:

$$r \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda & \dots & \lambda \\ \hline 0 & & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} * \\ \hline B \end{matrix} \\ \hline \underbrace{\quad}_r & \underbrace{\quad}_{n-r} \end{array} \right\} \rightsquigarrow P_A(t) = \det \begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda-t & \dots & \lambda-t \\ \hline 0 & & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} * \\ \hline B-tI \end{matrix} \\ \hline & \end{array} \\ = \det (\lambda-t)^r \det (B-tI) = (\lambda-t)^r P_B(t).$$

[sviluppo rispetto alla prima colonna + induzione]

Quindi molt. algebrica di $\lambda \geq r = \dim V_\lambda$.

Se $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sono gli autovalori distinti di φ , la somma

delle molt. algebriche è $\leq n = \dim V$. Quindi $n \geq \sum_{i=1}^m \dim V_{\lambda_i}$

[già visto!] è l'uguaglianza vale $\Leftrightarrow \varphi$ è diagonalizzabile.

Conclusione: φ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow \forall$ autovalore λ di φ e reale, e molt. algebrica = molt. geometrica.

In particolare, se troviamo λ con molt. geom. $<$ molt. alg $\Rightarrow \varphi$ non è diagonalizzabile.

Nell'esempio precedente: per $a=1$ basta guardare $\lambda=2$
 $a=-1$ $\lambda=-2$.

5) Per quali valori di k è $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ k & 0 & 2 \end{bmatrix}$ diagonalizzabile?

$$P_A(t) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ k & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda) [(3-\lambda)^2 - 1] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) \\ = (2-\lambda)^2(4-\lambda)$$

Autovettori per $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ k & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y = 2x \\ x + 3y = 2y \\ kx + 2z = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -y \\ kx = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{se } k \neq 0, \dim V_\lambda = 1 \\ \text{[multiplici di } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{]}$$

Se invece $k=0$, $\dim V_\lambda = 2$. Una base: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Quindi per $k \neq 0$, A non è diagonalizzabile [molt. geom. di 2
per $k=0$ A è diagonalizzabile, $= 1 < 2$]

perché $\exists \geq 1$ autovettore per $\lambda=4$ [trovarli!]
che insieme con $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ forma una base di autovettori.

6) Sia $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo con matrice

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ rispetto alla base standard. È possibile che
la matrice di φ rispetto ad un'altra base è

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$?

$P_A(t) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & 0 \\ 5 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$

$P_B(t) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$ uguali!

Cerchiamo gli autov^{et}tori di A per 1.

$$\left. \begin{array}{l} 2x = x \\ 3x + y = y \\ 5x + y + z = z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \dim V_1 = 1 < 2 \\ \text{non diagonalizzabile!}$$

Invece per B:
$$\left. \begin{aligned} x + 3z &= x \\ y + 4z &= y \\ 2z &= z \end{aligned} \right\} \Rightarrow z = 0$$

 x, y arbitrari

$\Rightarrow \dim V_1 = 2$ e B è diagonalizzabile [] anche autovalore per 2!]

Quindi B non può essere la matrice di φ rispetto a nessuna base perché φ non è diagonalizzabile.

7) Per quali valori di a la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$ è diagonalizzabile su \mathbb{R} ?

$$P_A(t) = \det \begin{bmatrix} 1-t & -1 \\ 1 & a-t \end{bmatrix} = (1-t)(a-t) + 1 = t^2 - (a+1)t + a+1$$

Discriminante di $P_A(t)$:
$$\Delta = (a+1)^2 - 4(a+1) = (a+1)(a-3)$$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow a > 3$ o $a < -1 \Leftrightarrow$ due radici distinte di $P_A(t) \Leftrightarrow A$ diagonalizzabile

$\Delta < 0 \Leftrightarrow -1 < a < 3 \Leftrightarrow \nexists$ radice reale di A
 $\Rightarrow a$ non è diagonalizzabile su \mathbb{R} .

$\Delta = 0 \Leftrightarrow a = -1$ o $a = 3$.

$a = -1$ $\Rightarrow \lambda = 0$ autovalore di mult. algebrica 2.

Autovettoni:
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = y$$

$\Rightarrow \dim V_0 = 1 < 2$ non diagonalizzabile

$a = 3$ $\Rightarrow \lambda = 2$ autovalore di mult. alg. 2

Autovettoni:
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

$x - y = 2x$
 $x + 3y = 2y \Leftrightarrow x = -y \Rightarrow \dim V_2 = 1$
 \Rightarrow non diaq.

Esercizio. Sia $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Trovare [se esistono] una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $A = P D P^{-1}$.

Soluzione. P, D esistono $\Leftrightarrow A$ è diagonalizzabile.

Decidiamo se è vero.

$$P_A(t) = \det \begin{bmatrix} -t & 2 & 1 \\ 2 & 3-t & 2 \\ 1 & 2 & -t \end{bmatrix} = -t[-t(3-t)-4] - 2[-2t-2] + 1+t = -t^3 + 3t^2 + 9t + 5$$

$$t = -1 \text{ radice} \Rightarrow P_A(t) = (t+1)[-t^2 + 4t + 5] = -(t+1)^2(t-5)$$

\Rightarrow 5 autovalore di mult. alg. 1, -1 di mult. alg. 2

Autovettori per -1:
$$\begin{cases} 2y + z = -x \\ 2x + 3y + 2z = -y \\ x + 2y = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Una base di V_{-1} :
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \Rightarrow \underline{\text{diagonalizzabile.}}$$

$v_1 \quad v_2$

Autovettori per 5:
$$\begin{cases} 2y + z = 5x \\ 2x + 3y + 2z = 5y \\ x + 2y = 5z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 2z \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ base di V_5

v_3

Rispetto alla base v_1, v_2, v_3 la matrice di $v \mapsto Av$ è
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} =: D.$$

Matrice di cambiamento di base dalle base ~~standard~~

* $\{v_1, v_2, v_3\}$:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =: P$$

alla base standard:

Numeri complessi

NC1

Un numero complesso è un'espressione $z = a + bi$ dove $a, b \in \mathbb{R}$ ed i è un parametro formale con la proprietà $i^2 = -1$.

Esempi: $1 + 2i$, $3 - \sqrt{2}i$, $\pi - \sqrt{\frac{2}{3}}i$ etc.

Ogni $a \in \mathbb{R}$ è anche un numero complesso: $a = a + 0 \cdot i$.

Notazione: \mathbb{C} è l'insieme dei numeri complessi. [Quindi $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$]

Operazioni su \mathbb{C} : * se $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$

$$z + z' := (a + a') + (b + b')i.$$

$$* \text{ se } \lambda \in \mathbb{R}, \lambda z = \lambda(a + bi) := \lambda a + \lambda bi$$

Osservazione: Con queste operazioni \mathbb{C} ha una struttura di spazio vettoriale su \mathbb{R} . Una base è data da $\{1, i\}$.
Dunque $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

[Infatti, $a + bi \mapsto (a, b)$ definisce un isomorfismo tra \mathbb{C} [come \mathbb{R} -spazio vettoriale] e \mathbb{R}^2 .]

Prodotto di numeri complessi:

$$z \cdot z' = (a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i.$$

In particolare, se $z = a \in \mathbb{R}$, $az' = aa' + ab'i$ come sopra.

Esempi: * $i^2 = (0 + 1 \cdot i)(0 + 1 \cdot i) = -1$.

* $(1 + i)(1 - i) = 1 - i^2 = 2$.

* $(1 + i)^2 = 2i$, $(1 + i)^4 = -4$

* $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

* Se $\Delta \in \mathbb{R}$, $\Delta < 0$, $(\sqrt{-\Delta}i)^2 = \Delta$.

\Rightarrow \forall polinomio $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$ ha radici in \mathbb{C} .

Def. Se $z = a + bi \in \mathbb{C}$, il suo coniugato è $\bar{z} := a - bi$.

Si osserva: $z + \bar{z} = 2a \in \mathbb{R}$, $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$

In particolare, $z \cdot \bar{z} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow z = 0$, e $t = \bar{t} \Leftrightarrow t \in \mathbb{R}$.

Quindi se $z \neq 0$, si può definire $\frac{1}{z} := \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2}$.

E se $z' = a' + b'i \in \mathbb{C}$, $\frac{z'}{z} = \frac{z' \bar{z}}{z \bar{z}} = \frac{aa' + bb' + (-ab' - a'b)i}{a^2 + b^2}$.

Quindi le 4 operazioni di base $+, -, \cdot, \div$ si possono fare in \mathbb{C} .

Oss. $\overline{(z + z')} = \bar{z} + \bar{z}'$, $\overline{(z \cdot z')} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$. In fatti:

$a + a' - (b + b')i = a - bi + a' - b'i$,

$aa' - bb' - (ab' + a'b)i = (a - bi)(a' - b'i)$.

In particolare, $z \mapsto \bar{z}$ è un'applicazione lineare su \mathbb{C} come spazio vettoriale su \mathbb{R} !

Abbiamo visto: ogni polinomio quadratico $f \in \mathbb{R}[x]$ ammette una radice in \mathbb{C} . Più generalmente:

Teorema. Ogni polinomio $f \in \mathbb{C}[x]$ a coefficienti complessi ammette una radice in \mathbb{C} : $\exists z_1 \in \mathbb{C}, f(z_1) = 0$.

Ma allora la divisione con resto come in $\mathbb{R}[x]$ dà:

$f = (x - z_1) f_1$, dove $f_1 \in \mathbb{C}[x]$, $\deg f_1 = \deg f - 1$.

Continuando con f_1 : $f_1 = (x - z_2) f_2$ per un $z_2 \in \mathbb{C}$, ecc. \Rightarrow

Cor. Se $f \in \mathbb{C}[x]$, $\exists z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C}, m_1, \dots, m_r > 0$:

$f = (x - z_1)^{m_1} (x - z_2)^{m_2} \dots (x - z_r)^{m_r}$.

In particolare, ogni $f \in \mathbb{R}[x]$ ammette una fattorizzazione di questo tipo, con alcuni z_i reali, ma altri complessi (in generale).

Esempio: $x^3 - 1 = (x - 1)(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$.

Si osserva: in questo esempio $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ è il coniugato di $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
In generale: se $f \in \mathbb{R}[x]$, $z \in \mathbb{C}$ tale che $f(z) = 0 \Rightarrow$ anche $f(\bar{z}) = 0$.

In fatti, se $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$,
 $0 = \bar{0} = \overline{f(z)} = \overline{a_n z^n + \dots + a_0} = a_n \bar{z}^n + a_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \dots + a_0 = f(\bar{z})$.
 Quindi le radici di $f \in \mathbb{R}[x]$ sono o reali, o vengono in coppie di numeri complessi coniugati.

Esempio: $f = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\Delta = b^2 - 4ac$.
 Se $\Delta \geq 0$, le radici sono reali, se $\Delta < 0$,
 coppie $\frac{1}{2a} [-b \pm \sqrt{-\Delta} i]$.

Osservazione: \mathbb{C} è una teoria di spazi vettoriali e appl. lineari su \mathbb{C} (stesse definizioni, teoremi...) Una matrice $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ definisce anche un appl. lineare $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, $v \mapsto A \cdot v$ (perché $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$). Il polinomio caratteristico $P_A(t)$ ha sempre radici complessi \Rightarrow su \mathbb{C} ci sono sempre autovalori e autovettori.

Esempi. 1) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $P_A(t) = \det \begin{bmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{bmatrix} = t^2 + 1$.

Non ci sono autovalori su \mathbb{R} ! Ma su \mathbb{C} $t^2 + 1 = (t+i)(t-i) \Rightarrow i, -i$ autovalori distinti \Rightarrow diagonalizzabile.

2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ $P_A(t) = \det \begin{bmatrix} 2-t & 0 & 0 \\ 1 & 2-t & 1 \\ 0 & -1 & 2-t \end{bmatrix} =$

$(2-t) \underbrace{((2-t)^2 + 1)}_{\text{non ha radici su } \mathbb{R}}$

Su \mathbb{R} $\lambda = 2$ solo autovalore, con molteplicità 1 $\Rightarrow A$ non è diagonalizzabile.

Ma su \mathbb{C} : $P_A(t) = (2-t)(2+i-t)(2-i-t)$

\Rightarrow autovalori distinti $2, 2+i, 2-i \Rightarrow A$ diagonalizzabile

Autovettoni:

$\lambda = 2$

$$\left. \begin{aligned} 2x &= 2x \\ x + 2y + z &= 2y \\ -y + 2z &= 2z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} y &= 0 \\ x &= -z \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e multipli}$$

$\lambda = 2+i$

$$\left. \begin{aligned} 2x &= (2+i)x \\ x + 2y + z &= (2+i)y \\ -y + 2z &= (2+i)z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 0 \\ z &= iy \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix} \text{ e multipli}$$

$\lambda = 2-i$ di maniera simile $x=0, z=iy \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{bmatrix}$ e multipli

In questa base la matrice diventa $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{bmatrix}$

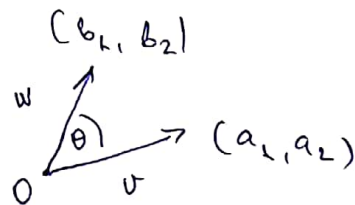
Prodotto scalare

Alla scuola abbiamo visto il prodotto scalare di due vettori piani:

$v \cdot w := \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos \theta$

dove θ è l'angolo tra v, w

e $\|v\| =$ lunghezza di v .



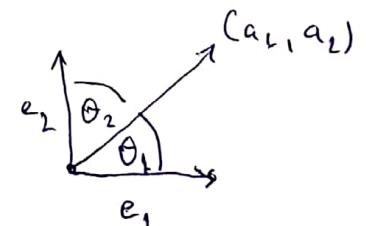
Si osserva: $v \cdot w \in \mathbb{R}$ e $\|v\| = \sqrt{(v \cdot v)} \geq 0$. Inoltre, $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow v \cdot w = 0$.

Se v ha coordinate $\begin{matrix} (a_1, a_2) \\ w \quad \quad \quad -||- \quad (b_1, b_2) \end{matrix} \Rightarrow v \cdot w = a_1 b_1 + a_2 b_2$

[Dimostrazione: se $e_1 = (0, 1), e_2 = (1, 0)$ è la base standard,

$v \cdot e_1 = \|v\| \cdot 1 \cdot \cos \theta_1 = a_1$

$v \cdot e_2 = \|v\| \cdot 1 \cdot \cos \theta_2 = a_2$



dove $v = a_1 e_1 + a_2 e_2$. Di maniera simile, $w = b_1 e_1 + b_2 e_2 \Rightarrow w \cdot e_1 = b_1, w \cdot e_2 = b_2$.

Quindi $v \cdot w = (a_1 e_1 + a_2 e_2) \cdot (b_1 e_1 + b_2 e_2) = a_1 (e_1 \cdot w) + a_2 (e_2 \cdot w) = a_1 b_1 + a_2 b_2$

Def. Siano $v := \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, $w := \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ due vettori in \mathbb{R}^n .

Il loro prodotto scalare è
 $\langle v, w \rangle := a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \in \mathbb{R}$

$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si chiama prodotto scalare standard.

Proprietà

1) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$

2) Per $v \in \mathbb{R}^n$ fisso la funzione $w \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ è un'applicazione lineare $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Di maniera simile, per w fisso $v \mapsto \langle v, w \rangle$ è lineare.

3) $\forall v \in \mathbb{R}^n \quad \langle v, v \rangle \geq 0$, e $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$.

[Infatti, per v come sopra $\langle v, v \rangle = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$.]

Def. Se $v \in \mathbb{R}^n$, la sua norma è $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Complemento: In generale, se V è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} , un prodotto scalare su V si definisce come una funzione $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$ con le proprietà 1), 2), 3).

In generale ci sono molti prodotti scalari su V . Per esempio, se $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$ e $V = \mathbb{R}^n$,

$(v, w) \mapsto \lambda_1 a_1 b_1 + \dots + \lambda_n a_n b_n$

è un prodotto scalare. Il prodotto standard è il caso

$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$. Noi lavoreremo sempre con il prod. standard.

La nozione generale di perpendicolarità è:

Def. $v, w \in \mathbb{R}^n$ sono ortogonali se $\langle v, w \rangle = 0$.

v_1, \dots, v_r è un sistema ortogonale se

$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$.

v_1, \dots, v_r è un sistema ortonormale se è ortogonale e $\langle v_i, v_i \rangle = 1 \quad \forall i$.

Prop. Un sistema ortogonale di vettori è lin. indipendente.

Dim. Sia v_1, \dots, v_n un sistema ortogonale.

Supponiamo $d_1 v_1 + d_2 v_2 + \dots + d_n v_n = 0 \quad / \langle \cdot, v_1 \rangle$

$$d_1 \underbrace{\langle v_1, v_1 \rangle}_{=\lambda \neq 0} + d_2 \underbrace{\langle v_2, v_1 \rangle}_{=0} + \dots + d_n \underbrace{\langle v_n, v_1 \rangle}_{=0} = 0$$

$\Rightarrow d_1 \lambda = 0 \Rightarrow d_1 = 0$. Di maniera simile, facendo il prodotto scalare con v_2, v_3, \dots, v_n , si ottiene $d_2 = d_3 = \dots = d_n = 0$.

Esempio. Se $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ è la base standard di \mathbb{R}^n , allora e_1, \dots, e_n è un sistema ortonormale.

Osservazione: Abbiamo visto che per v fisso la funzione

$\varphi_v: W \mapsto \langle v, w \rangle$ è lineare.

Se $v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n, \langle v, e_i \rangle = a_i \quad i = 1, \dots, n$.

Viceversa, ogni funzione lineare $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ è determinata da $\varphi(e_1) =: a_1, \varphi(e_2) =: a_2, \dots, \varphi(e_n) =: a_n$ perchè se $w = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n$, allora $\varphi(w) = b_1 \varphi(e_1) + b_2 \varphi(e_2) + \dots + b_n \varphi(e_n) = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$.

Quindi $\varphi(w) = \langle v, w \rangle$, dove $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}!$

Conclusione: Per ogni funzione lineare $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \exists v \in \mathbb{R}^n$ tale che $\varphi(w) = \langle v, w \rangle \quad \forall w \in \mathbb{R}^n$, quindi $\varphi = \varphi_v$.

Osservazione: Sia $v \in \mathbb{R}^n$. Consideriamo $\varphi_v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Allora

$$\text{Ker}(\varphi_v) = \{w \in \mathbb{R}^n : \langle v, w \rangle = 0\}$$

Notazione: $\text{Ker}(\varphi_v) =: \langle v \rangle^\perp$.

Terminologia: $\langle v \rangle^\perp$ è il sottospazio ortogonale a v .

Se $v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$,

$$\langle v \rangle^\perp = \left\{ \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n : a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = 0 \right\}$$

quindi $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ è soluzione di $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$.

Generalizzazione: Se $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \langle v_1, \dots, v_r \rangle^\perp &:= \text{Ker}(\varphi_1) \cap \dots \cap \text{Ker}(\varphi_r) \\ &= \{ w \in \mathbb{R}^n : \langle v_1, w \rangle = \langle v_2, w \rangle = \dots = \langle v_r, w \rangle = 0 \} \\ &= \{ w \in \mathbb{R}^n : \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall v \in \text{Span}(v_1, \dots, v_r) \} \end{aligned}$$

[In fatti, se $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r$,
 $\langle v, w \rangle = \alpha_1 \langle v_1, w \rangle + \dots + \alpha_r \langle v_r, w \rangle = 0$]

Se $v_i = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{bmatrix} \quad i=1, \dots, r \quad v_r = \begin{bmatrix} a_{r1} \\ a_{r2} \\ \vdots \\ a_{rn} \end{bmatrix}$

$\langle v_1, \dots, v_r \rangle^\perp =$ soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n &= 0. \end{aligned}$$

Esempio. Siano $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Troviamo il sottospazio

$\langle v, w \rangle^\perp$. Dopo la ricetta sopra, è il sottospazio delle soluzioni di

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Troviamo una base:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} x_1 &= x_4 \\ x_2 &= -x_3 - x_4 \end{aligned}$$

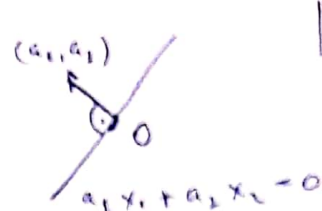
Soluzione generale: $\begin{bmatrix} s \\ -s-t \\ t \\ s \end{bmatrix} = s \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=: v_1} + t \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=: v_2}$

$\Rightarrow v_1, v_2$ è una base di $\langle v, w \rangle^\perp$.

Interpretazione geometrica: se $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

$\langle v \rangle^\perp =$ retta di equazione $a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$

[perpendicolare a $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$]



Se $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\langle v \rangle^\perp =$ piano di equazione $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$
(perpendicolare a v)

Teorema. Ogni sottospazio $V \subset \mathbb{R}^n$ ammette una base ortonormale.
[=: ON]

Dim. Induzione su $\dim V$.

$\dim V = 0, 1$: ovvio. Supponiamo $\dim V = m$ e il teorema conosciuto per $m-1$. Sia $v \neq 0$ un vettore di V . Poniamo:

$\forall \langle v \rangle^\perp := \{ w \in V : \langle v, w \rangle = 0 \}$. Allora

$\langle v \rangle^\perp = \ker(\varphi_v)$, dove $\varphi_v: w \mapsto \langle v, w \rangle \quad \forall w \in V$.

Come $v \neq 0$, $\text{Im}(\varphi_v) = \mathbb{R} \Rightarrow \dim \langle v \rangle^\perp = m-1$.

Per ipotesi di induzione, $\langle v \rangle^\perp$ ammette una base ortonormale

v_2, \dots, v_m . Sia $v_1 = \frac{v}{\|v\|}$. Allora $\|v_i\| = 1 \quad \forall i$

e v_1, \dots, v_m è una base ortonormale di V [infatti, $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ $i > j$ perché $v_i \in \langle v \rangle^\perp$ $i > 1$ e $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ $i \neq j > 1$ per ipotesi.]

Quindi v_1, \dots, v_m è un sistema ortogonale \Rightarrow lin. indipendente di m vettori su V .]

Cor. Sia v_1, \dots, v_r un sistema ortonormale in \mathbb{R}^n . Allora

$\exists v_{r+1}, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n : v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n$ è una base ON di \mathbb{R}^n

Dim. Dopo il teorema $\langle v_1, \dots, v_r \rangle^\perp$ ammette una base ON

v_{r+1}, \dots, v_n . Sia $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$, $v \mapsto \begin{bmatrix} \langle v, v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, v_r \rangle \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^r$

Allora $\varphi(v_{r+1}), \dots, \varphi(v_n)$ è la base standard di \mathbb{R}^r .

Quindi $\dim \ker(\varphi) = n - \dim \text{Im}(\varphi) = n - r$.

Ma $\ker(\varphi) = \langle v_1, \dots, v_r \rangle^\perp \Rightarrow m = n$ e $v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n$ è una base ON di \mathbb{R}^n .

La dimostrazione dà anche:

Cor. $\dim \langle v_1, \dots, v_r \rangle^\perp = n - r$.

Se $V \subset \mathbb{R}^n$ è un sottospazio, sia $V^\perp := \{w \in \mathbb{R}^n : \langle v, w \rangle = 0 \forall v \in V\}$

Cor. $V \cap V^\perp = \{0\}$ e $\text{Span}(V, V^\perp) = \mathbb{R}^n$. In particolare, $\dim V + \dim V^\perp = n$.

Dim. Se $v \in V \cap V^\perp$, $\langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = 0$. Per il resto, sia v_1, \dots, v_r una base ON di V . Allora $V^\perp = \langle v_1, \dots, v_r \rangle^\perp$ e si applica il Cor. precedente.

A che serve una base ON di \mathbb{R}^n ?

Prop. Se v_1, \dots, v_n è una base ON di \mathbb{R}^n , allora $\forall v \in \mathbb{R}^n$:

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle v_i \quad [L'abbiamo già visto nel caso della base standard]$$

Dim. Come v_1, \dots, v_n è una base, $\exists! d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R}$:

$$v = d_1 v_1 + \dots + d_n v_n. \text{ Ma allora}$$

$$\langle v, v_i \rangle = \langle d_1 v_1 + \dots + d_n v_n, v_i \rangle = d_1 \langle v_1, v_i \rangle + \dots + d_n \langle v_n, v_i \rangle = d_i$$

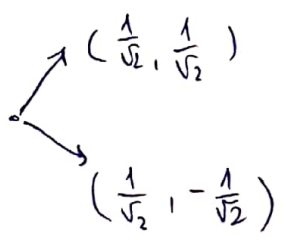
perchè $\langle v_j, v_i \rangle = 0 \quad i \neq j \quad e = 1 \quad i = j$.

Quindi il prodotto scalare dà le coordinate di un vettore rispetto ad una base ON.

Esempi. 1) La base standard di \mathbb{R}^n è ON, notiamo e_1, \dots, e_n

$$\text{Se } v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad a_i = \langle v, e_i \rangle.$$

2) $\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{=: u_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{=: u_2}$ è una base ON di \mathbb{R}^2



[In fatti, $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$ e $\langle u_1, u_1 \rangle = \langle u_2, u_2 \rangle = 1$.]

Cerchiamo le coordinate di $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ rispetto a

$$u_1, u_2: \langle e_1, u_1 \rangle = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle e_1, u_2 \rangle = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Di maniera simile, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$

Come trovare esplicitamente una base ON in $V \subset \mathbb{R}^n$?

dim $V = 1$: se $V = \langle v \rangle$, $\bar{v}_1 := \frac{v}{\|v\|}$ è una base ON.

dim $V = 2$: se v_1, v_2 base di V , $\bar{v}_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$ come sopra

$$w_2 := v_2 - \langle \bar{v}_1, v_2 \rangle \bar{v}_1 \text{ soddisfa}$$

$$\langle w_2, \bar{v}_1 \rangle = \langle v_2, \bar{v}_1 \rangle - \langle v_2, \bar{v}_1 \rangle \underbrace{\langle \bar{v}_1, \bar{v}_1 \rangle}_{1} = 0.$$

Quindi se $\bar{v}_2 := \frac{w_2}{\|w_2\|}$, \bar{v}_1, \bar{v}_2 è una base ON

dim $V = 3$: se v_1, v_2, v_3 base di V , cambiamo $v_1 \rightsquigarrow \bar{v}_1, v_2 \rightsquigarrow \bar{v}_2$ tali che \bar{v}_1, \bar{v}_2 base ON di $\langle v_1, v_2 \rangle$

[possibile, l'abbiamo visto nel caso dim $V = 2$.] Sia

$$w_3 := v_3 - \langle v_3, \bar{v}_1 \rangle \bar{v}_1 - \langle v_3, \bar{v}_2 \rangle \bar{v}_2. \text{ Allora}$$

$$\langle w_3, \bar{v}_1 \rangle = \langle v_3, \bar{v}_1 \rangle - \langle v_3, \bar{v}_1 \rangle \underbrace{\langle \bar{v}_1, \bar{v}_1 \rangle}_{1} - \langle v_3, \bar{v}_2 \rangle \underbrace{\langle \bar{v}_2, \bar{v}_1 \rangle}_{0} = 0,$$

$$\langle w_3, \bar{v}_2 \rangle = \langle v_3, \bar{v}_2 \rangle - \langle v_3, \bar{v}_1 \rangle \underbrace{\langle \bar{v}_1, \bar{v}_2 \rangle}_{0} - \langle v_3, \bar{v}_2 \rangle \underbrace{\langle \bar{v}_2, \bar{v}_2 \rangle}_{1} = 0$$

\Rightarrow se $\bar{v}_3 := \frac{w_3}{\|w_3\|}$, $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ base ON

Caso generale dim $V = n$: se v_1, \dots, v_n base di V

possiamo successivamente modificarla:

$$v_1 \rightsquigarrow \bar{v}_1 \text{ base ON di } \langle v_1 \rangle$$

$$v_1, v_2 \rightsquigarrow \bar{v}_1, \bar{v}_2 \quad \text{---} \quad \langle v_1, v_2 \rangle$$

⋮

$$v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \rightsquigarrow \bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_{n-1} \text{ base ON di } \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$$

$$w_n := v_n - \langle v_n, \bar{v}_1 \rangle \bar{v}_1 - \langle v_n, \bar{v}_2 \rangle \bar{v}_2 - \dots - \langle v_n, \bar{v}_{n-1} \rangle \bar{v}_{n-1}.$$

Come sopra, si verifica che con $\bar{v}_n := \frac{w_n}{\|w_n\|}$

$\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ è una base ON di V .

Questo è l'algoritmo di Gram-Schmidt.

Esempi. 1) Sia $V = \text{Span} \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2} \right) \subset \mathbb{R}^3$

Gram-Schmidt:

$$\|v_1\| = \sqrt{2} \Rightarrow \bar{v}_1 := \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\langle v_2, \bar{v}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow w_2 := v_2 - \langle v_2, \bar{v}_1 \rangle \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\|w_2\| = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \bar{v}_2 := \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ e } \bar{v}_1, \bar{v}_2 \text{ base ON}$$

2) $V = \text{Span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^3$. Gram-Schmidt dà una base ON di V abbastanza brutta (si può provare!) (*)

Ma si può anche osservare che

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0 \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ base ON}$$

Quindi Gram-Schmidt produce una base ON, non necessariamente la più semplice!

3) $V = \text{Span}(u_1, u_2) \subset \mathbb{R}^3$, $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ Gram-Schmidt:

$$\|u_1\| = \sqrt{2}, \bar{v}_1 := \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ come sopra.}$$

$$\langle u_2, \bar{v}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle u_2, u_1 \rangle = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$w_2 := \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \|w_2\| = 3$$

$$\Rightarrow \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} \text{ soddisfa } \|\bar{v}_2\| = 1 \text{ e } \bar{v}_1, \bar{v}_2 \text{ base ON.}$$

Cerchiamo di completarla in una base ON di \mathbb{R}^3 :

V^\perp è il sottospazio dei soluzioni di $x_1 + x_2 = 0$

$$4x_2 - x_3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -x_2 = \frac{x_3}{4} \Rightarrow w = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ base di } V^\perp.$$

$$\|w\| = 3\sqrt{2} \Rightarrow \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 := \begin{bmatrix} 1/3\sqrt{2} \\ -1/3\sqrt{2} \\ 4/3\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ base ON di } \mathbb{R}^3.$$

(*) Soluzione:

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{28-18\sqrt{2}}} \cdot \begin{bmatrix} 2\sqrt{2}-3 \\ \sqrt{2}-3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il teorema spettrale

Def. $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ è simetrica se $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j$.

"
[a_{ij}] Formulazione equivalente: $A = A^T$ dove $A^T =$ matrice trasposta.

Lemma. Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ è simetrica, allora $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$ vale
 $\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle$ con il prodotto scalare standard.

Dim. Siano $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ $w = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$

$$Av = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + \dots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + \dots + a_{2n}b_n \\ \vdots \\ a_{n1}b_1 + \dots + a_{nn}b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \langle Av, w \rangle = \begin{cases} a_{11}b_1c_1 + \dots + a_{1n}b_nc_1 + \\ a_{21}b_1c_2 + \dots + a_{2n}b_nc_2 + \dots \\ \vdots \\ a_{n1}b_1c_n + \dots + a_{nn}b_nc_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \langle Av, w \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_j c_i$$

$$\text{In modo simile, } \langle v, Aw \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} c_j b_i$$

Come $a_{ij} = a_{ji}$, questi sono uguali.

Teorema spettrale per matrici simetriche:

Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ è simetrica, ogni autovalore di A è reale, ed A è diagonalizzabile in una base ON di autovettori.

Quindi una matrice simetrica è sempre diagonalizzabile!

Un'applicazione:

Cor. Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matrice simetrica tale che ogni autovalore di A è ≥ 0 . Allora $\exists \sqrt{A} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$:

$$(\sqrt{A})^2 = A.$$

Dim. Se $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ è diagonale, si prende

$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} \quad [\text{possibile perchè } \forall \lambda_i \geq 0]$$

Nel caso generale $\exists P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ invertibile: $D = P^{-1}AP$ è diagonale (dopo il teorema spettrale). Abbiamo appena visto:

\sqrt{D} esiste. Quindi $\sqrt{A} := P \sqrt{D} P^{-1}$ soddisfa

$$(\sqrt{A})^2 = P \sqrt{D} P^{-1} P \sqrt{D} P^{-1} = P \sqrt{D} \sqrt{D} P^{-1} = P D P^{-1} = A.$$

Oss. \sqrt{A} non esiste sempre! Infatti, se $n=1$, $A=[a]$ e \sqrt{A} esiste solo se $a \geq 0$. In generale, se $A = B^2 \Rightarrow \det(A) = \det(B)^2 \Rightarrow \sqrt{A}$ non esiste se $\det(A) < 0$.

Una parte della dimostrazione del teorema è data dalla

Prop. Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ha autovalori reali e soddisfa

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle \quad \forall v, w \Rightarrow \exists \text{ base ON di autovettori di } A.$$

Si ricorda che se A è simmetrica, $\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle$ vale (Lemma).

Dim. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalore di A e v autovettore: $Av = \lambda v$.

Scambiando $v \rightsquigarrow \frac{v}{\|v\|}$ si può supporre $\|v\| = 1$.

Induzione su n : per $n=1$ v base ON. Se $n > 1$, sia

$V := \langle v \rangle^\perp$. Si osserva: $\forall w \in V$ $Aw \in V$. Infatti,

$$\langle v, Aw \rangle = \langle Av, w \rangle = \langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle = 0 \text{ perchè } w \in \langle v \rangle^\perp.$$

Ma allora $Aw \in \langle v \rangle^\perp$, i.e. $Aw \in V$.

Come $\dim V = n-1$, \exists base ON di autovettori v_2, \dots, v_n

per A come applicazione lineare su $V (\cong \mathbb{R}^{n-1})$. Allora

v_1, v_2, \dots, v_n è base ON per A su \mathbb{R}^n .

Resta da dimostrare che gli ^{auto}valori di una matrice simmetrica sono reali. Per questo bisogna passare a \mathbb{C}^n .

Def. Prodotto scalare standard su \mathbb{C}^n :

$$\text{Se } v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

$$\langle v, w \rangle := a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2 + \dots + a_n \bar{b}_n \quad [\bar{\quad} = \text{coniugazione complessa } a+bi \mapsto a-bi]$$

Norma di $v \in \mathbb{C}^n$:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2}$$

Da notare: se $v, w \in \mathbb{R}^n$, questo è il prodotto scalare stand. su \mathbb{R}^n .

Proprietà: simili al prodotto scalare su \mathbb{R}^n , ma:

* $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$

* $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$ per $\lambda \in \mathbb{C}$, ma $\langle v, \lambda w \rangle = \bar{\lambda} \langle v, w \rangle$.

Prop. Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ simmetrica, considerata come matrice in $M_{n \times n}(\mathbb{C})$.

Allora $\forall v, w \in \mathbb{C}^n \quad \langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle$.

Dimostrazione: come nel caso di \mathbb{R}^n , utilizzando che $a_{ij} = a_{ji} = \bar{a}_{ji}$.

Cor. Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ simmetrica, ogni autovalore di A è reale.

Dim. Lavoriamo su \mathbb{C}^n : sia $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalore, $v \in \mathbb{C}^n$ un autovettore. Allora $Av = \lambda v$, quindi

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle Av, v \rangle = \langle v, Av \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle$$

Come $v \neq 0, \langle v, v \rangle \neq 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$.

Complemento: Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ una matrice tale che $a_{ij} = \bar{a}_{ji} \forall i, j$.

[Tale matrice si chiama autoaggiunta o Hermitiana]. Allora

i stessi argomenti mostrano: gli autovalori di A sono reali ed A è diagonalizzabile in una base ON di \mathbb{C}^n .

[Forma complessa del teorema spettrale.]

Esempio: $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 4 \\ -2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$ Vediamo subito: A simmetrica \Rightarrow diagonalizzabile

Di più, colonne di A dipendenti $\Rightarrow \text{rank}(A) < 3$ (infatti = 1) $\Rightarrow \text{Ker}(A) \neq 0 \Rightarrow 0$ autovalore.

\Downarrow
 $\dim \text{Ker}(A) = 2$

Quindi c'è un terzo autovalore. Troviamolo insieme con un autovettore:

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda y = -2\lambda x = -\lambda z \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ autovettore}$$

$$\|w\| = 3 \Rightarrow \frac{w}{\|w\|} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} \text{ ha norma } 1. \quad \Rightarrow \lambda = -1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 7$$

Resta da trovare una base ON di $\text{Ker}(\varphi) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : -x + 2y - 2z = 0 \right\}$

Una base: $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (sono lin. indep. e Ker ha dimensione 2)

Gram-Schmidt: $\bar{v}_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \langle \bar{v}_1, v_2 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow w_2 = v_2 - \langle v_2, \bar{v}_1 \rangle \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{v}_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot w_2$$