Il determinante

Il determinante sarà una funzione det: $M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ con la proprietà fondamentale:

$$\det(A) = 0 \overset{(*)}{\iff} \text{le righe di } A \text{ sono lin. dipendenti}$$
$$\iff \text{le colonne} \quad -''- \quad -''-$$

Esempi. 1) $n=1$ $\quad A = [a] \quad \det(A) := a.$

2) $n=2$ $\quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \det(A) := ad - bc$

Verifichiamo la proprietà fondamentale $(*)$ per $n=2$.

$\Rightarrow$: Se $ad - bc = 0$, allora:

* Se $a=0$, allora $b=0$ o $c=0$
  - Se $a=b=0$, la prima riga è $0 \Rightarrow$ righe dipendenti
  - se $a=c=0$, ma $b\neq 0$, $[0 \ d] = \frac{d}{b}[0 \ b]$
* Se $a\neq 0$, sia $\lambda := \frac{b}{a}$

  $ad = bc \Rightarrow d = \lambda c \Rightarrow [a \ b] = a[1 \ \lambda]$

  $[c \ d] = c[1 \ \lambda]$ dipendenti!

[Dipendenza delle colonne simile.]

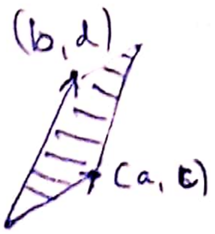
$\Leftarrow$: Se $a=c=0$, $ad - bc = 0$.

* Se $a\neq 0$ e le righe sono dipendenti,

  $c = \lambda a$, $d = \lambda b$ per $\lambda = \frac{c}{a} \Rightarrow ad - bc = \lambda(ab - ab) = 0.$
* Se $c \neq 0$, argomento simile, anche per le colonne.

Il determinante ha un'interpretazione geometrica:

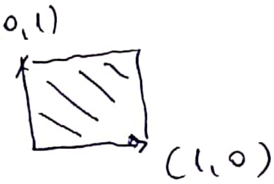
Teorema. $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$ area della parallelogramma definita da $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$



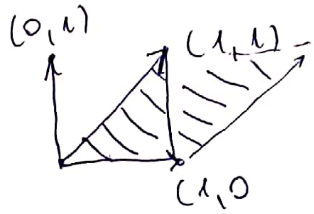
se $a, b, c, d \geq 0$ e $ad - bc \geq 0$.

Esempi.

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \det(A) = 1$

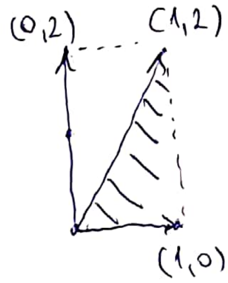


2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \det(A) = 1$



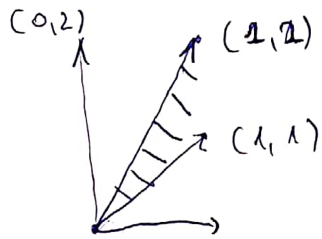
area della par. = area del quadro

3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \det(A) = 2$



area della par. = area del rettangolo = 2

4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \det(A) = 2 - 1 = 1$



Qui area della par. = area della par. di 3) −
− 〃 − di 2 = 2 − 1 = 1.

Oss. Lo stesso argomento che dimostra 4) dimostra il teorema per il caso dove $a = b$ (e $c < d$).

Dim. del teorema. Se $a = 0$, allora come $a, d, b, c \geq 0$ e $ad - bc \geq 0 \Rightarrow ad - bc = 0$ & $b = 0$ o $c = 0$.
Ma se $a = b = 0$ o $a = c = 0$, i vettori sono dipendenti e l'area $= 0$.
Quindi supponiamo $a \neq 0$. Se $b = a \Rightarrow$ osservazione sopra. Altrimenti,

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b \cdot \frac{a}{b} \\ c & d \cdot \frac{a}{b} \end{bmatrix} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{a} \cdot \det \begin{bmatrix} a & a \\ c & \frac{ad}{b} \end{bmatrix}$$

Infatti, $\frac{b}{a}\left(ad \cdot \frac{a}{b} - ac\right) = ad - bc$. $\quad$ [se $b \neq 0$]

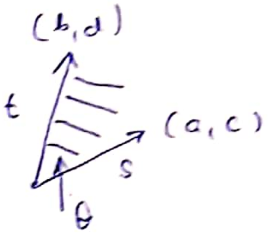
Scanned with CamScanner

D'altra parte, sappiamo dalla scuola:

Se P = parallelogramma con lati di lunghezza s, t e angolo θ, $\text{area}(P) = s \cdot t \cdot \sin(\theta)$

Quindi, se non cambio s, θ, ma cambio $t \rightsquigarrow \lambda \cdot t$ $\quad (\lambda > 0)$

$\text{area}(P) \rightsquigarrow \lambda \cdot \text{area}(P)$. Nel nostro caso:



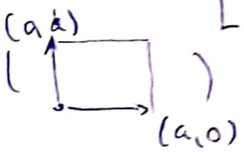
se cambio $(b, d) \rightsquigarrow (\lambda b, \lambda d)$

$t \rightsquigarrow \lambda t$

$\text{area}(P) \rightsquigarrow \lambda \cdot \text{area}(P)$.

Sopra abbiamo utilizzato $\lambda = \frac{b}{a}$, e la stessa sostituzione fa $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow \lambda \cdot \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$! Quindi abbiamo ridotto il caso generale al caso $a = b$.

[Caso $b = 0$:
* se anche $c = 0$, abbiamo $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ facile!

  $\det = a \cdot d$, area() $= ad$.

* se anche $d = 0$,
  allora $\det = \text{area} = 0$.
* se $c, d \neq 0$, moltiplichiamo per $\frac{d}{c} \rightsquigarrow$
  si riduce al caso $\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & c \end{bmatrix}$ – simile al caso sopra.]

Def. generale del determinante: induzione su n.

$n = 1, 2$: abbiamo visto. Se det è già definita per $n-1$:

Per $A = [a_{ij}]$ sia A_{ij} la matrice ottenuta cancellando la riga № i e la colonna № j, per i, j fisso.

Fatto: i numeri

* $\sum_j (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$ per i fisso
* $\sum_i (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$ per j fisso

sono tutti uguali $\forall\, i, j$.

Def. det(A) := uno ($\Rightarrow$ tutti) dei numeri sopra.

Se i è fisso, parliamo dello sviluppo secondo la riga N° i

Se j —"— —"— —"— —"— colonna N° j.

Non verifichiamo il fatto sopra in generale.

Ma per $n=2$: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \det(A) &= a \cdot d + b(-c) && \text{sviluppo secondo la prima riga} \\ &= c(-b) + d \cdot a && \text{—"— seconda —"—} \\ &= a \cdot d + c \cdot (-b) && \text{—"— prima colonna} \\ &= b(-c) + d \cdot a && \text{—"— seconda colonna} \end{aligned}$$

Promemoria dei segni $(-1)^{i+j}$: $\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & - & + & \cdots \\ & \vdots & & & & & \end{bmatrix}$

Notazione: $|A| := \det(A)$

Esempio $n=3$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Sviluppo secondo la prima riga:

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 + (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 - (-1) = 3.$$

Sviluppo secondo la seconda colonna:

$$0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 = 2 + 1 = 3.$$

Caso generale $n=3$:

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

sviluppo secondo la prima riga:

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Osserviamo: in ogni prodotto $\exists!$ elemento di ogni riga & colonna.

Questo è così per n generale, solo i segni sono da determinare.

Scanned with CamScanner

Esempio: Sia $A = [a_{ij}]$ una matrice triangolare superiore, i.e. $a_{ij} = 0$ se $i > j$.

Allora $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Dimostrazione: induzione su n. $n = 1$ ✓

Sviluppo secondo la prima colonna:

$\det(A) = a_{11} \det(A_{11})$. Ma A_{11} è triangolare di taglia $n-1$

$\Rightarrow \det(A_{11}) = a_{22} \dots a_{nn} \Rightarrow \det(A) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$.

Un risultato simile vale per le matrici triangolari inferiori.

Ricordiamo: L'algoritmo di Gauss, applicato a una matrice $n \times n$, produce una matrice triangolare superiore.

Qual è l'effetto delle operazioni elementari dell'algoritmo sul det?

1) Cambio di due righe: $\det(A) \rightsquigarrow -\det(A)$

Infatti, se si scambiano due righe adiacenti $i \leftrightarrow i+1$ le sottomatrice $A_{ij} \leftrightarrow A_{i+1,j}$ dopo lo scambio.

Ma $(-1)^{(i+1)+j} = -(-1)^{i+j} \Rightarrow$ nella formula $\sum_j (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$ si cambiano tutti i segni.

Poi, scambiare le righe № i e j $\Leftrightarrow$ cambiare righe adiacenti $(i-j) + (i-j-1) = 2(i-j) - 1$ volte.

Questo è un numero dispari!

2) Sostituzione della riga R_i con $R_i + \lambda R_j$ $(j \neq i)$: il determinante non si cambia.

La verifica si fa così:

I) Se A ha due righe uguali $\Rightarrow \det(A) = 0$.

[Infatti, quando si cambiano questi due righe, $\det(A) \rightsquigarrow -\det(A)$, ma non si cambia nulla.]

II) Se alla riga R_i si sostituisce $\lambda \cdot R_i$ $(\lambda \neq 0)$

$\det(A) \rightsquigarrow \lambda \cdot \det(A)$.

[Facciamo lo sviluppo rispetto alla riga R_i: $a_{ij} \rightsquigarrow \lambda \cdot a_{ij}$ $\forall j$, ma A_{ij} non si cambia.]

III) Se in A $\cancel{\exists}$ $R_i = \lambda \cdot R_j \Rightarrow \det(A) = 0$.

[Infatti, dopo II) $\det(A) = \lambda \cdot \det(B)$ dove in B $R_i = R_j$, ma allora $\det(B) = 0$ secondo I).]

IV) Sia B la matrice ottenuta da A sostituendo la riga $R_i = [a_{i1}\ a_{i2}\ \dots\ a_{in}]$ con $[b_{i1}\ b_{i2}\ \dots\ b_{in}]$

Allora $\det(A) + \det(B) = \det(C)$, dove C è ottenuta da A sostituendo R_i con $[a_{i1}+b_{i1}\ \ a_{i2}+b_{i2}\ \dots\ a_{in}+b_{in}]$

[Fare lo sviluppo rispetto alla riga N° i]

Finalmente, sia C la matrice ottenuta da A sostituendo R_i con $R_i + \lambda R_j$. Allora dopo IV)

$\det(C) = \det(A) + \det(B)$

dove B è la matrice ottenuta con la sostituzione $R_i \rightsquigarrow \lambda R_j$.

Ma $\det(B) = 0$ secondo III).

<u>Conclusione</u>: se facciamo l'algoritmo di Gauss,

$\det(A) \rightsquigarrow (-1)^r \det(A)$, dove r = numero di scambi di righe

Questo si può utilizzare per calcolare $\det(A)$, riducendola in forma triangolare.

<u>Esempio</u>: calcoliamo il determinante di $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ con questo metodo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} =: B$$

$\det(B) = 25$, ma abbiamo fatto uno scambio di righe

$\Rightarrow \det(A) = -25$.

<u>Altro esempio</u>:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4&0&0&1\\ 1&1&2&0\\ 0&2&1&1\\ 1&1&0&1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1&1&0&1\\ 1&1&2&0\\ 0&2&1&1\\ 4&0&0&1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1&1&0&1\\ 0&0&2&-1\\ 0&2&1&1\\ 0&-4&0&-3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1&1&0&1\\ 0&2&1&1\\ 0&0&2&-1\\ 0&-4&0&-3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1&1&0&1\\ 0&2&1&1\\ 0&0&2&-1\\ 0&0&2&-1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1&1&0&1\\ 0&2&1&1\\ 0&0&2&-1\\ 0&0&0&0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 0$$

Questo metodo è pratico se la matrice è grande, con molti elementi $\neq 0$. Ma quando la matrice ha molti elementi $= 0$, lo sviluppo è più pratico:

Esempio. $A = \begin{bmatrix} 1&0&0&4\\ 0&2&0&1\\ 3&0&1&2\\ 1&0&0&5 \end{bmatrix}$ La terza colonna ha solo un elemento $\neq 0$, con segno $+$.

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1&0&4\\ 0&2&1\\ 1&0&5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2&1\\ 0&5 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 0&2\\ 1&0 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 - 4 \cdot 2 = 2.$$

Def. Se $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, la sua matrice trasposta è $A^t = [a_{ji}] \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Quindi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \rightsquigarrow A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Si nota: $\det(A) = \det(A^t)$
perché lo sviluppo rispetto alla colonna N° i di A
= —"— —"— alla riga N° i di A^t.

Teorema. $\det(A) = 0 \iff$ le righe di A sono lin. dipendenti
$\iff$ le colonne —"— —"—

Dim. Righe di A = colonne di A^t. Come $\det(A) = \det(A^t)$
$\Rightarrow$ basta fare la dimostrazione per le colonne.

Facciamo l'algoritmo di Gauss per A: $A \sim B$
dove B è una matrice a scalini $\Rightarrow$ triangolare superiore.

* Se $\det(A) = 0$ $\Rightarrow$ la diagonale contiene un elemento $= 0$ in B [$\Rightarrow \det(B) = 0$]
$\Rightarrow$ una colonna non contiene di pivot in B $\rightarrow$ le colonne di B sono dipendenti $\Rightarrow$ anche le colonne di A.

* Se le colonne sono dipendenti $\Rightarrow$ una colonna di B non contiene di pivot $\Rightarrow$ questa colonna ha 0 nella diagonale $\rightarrow \det(B) = 0$
$\Rightarrow \det(A) = 0$.

Cor. Sia $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare data da $v \mapsto A \cdot v$.
Allora $\ker(A) \neq 0 \iff \mathrm{Im}(A) \neq \mathbb{R}^n \iff \det(A) = 0$.

Addesso generalizziamo questo cor. a $\varphi: V \to V$, $\dim V = n$.

Teorema. Se $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

Verifica solo per $n=2$ [caso generale difficile]:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{bmatrix}$$

$$(ad - bc)(a'd' - b'c') = aa'dd' + bb'cc' - a'bcd' - ab'c'd$$

$$(aa' + bc')(cb' + dd') - (ab' + bd')(ca' + dc') =$$

$$= \cancel{aa'cb'} + aa'dd' + bb'cc' + \cancel{bc'dd'} - \cancel{aa'b'c} - ab'c'd$$
$$- a'bcd' + \cancel{bc'dd'}$$

Cor. Se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, A^{-1} esiste $\iff \det(A) \neq 0$
e allora $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Dim. A^{-1} esiste $\iff$ $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo
$\iff \ker(A) = 0$ & $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^n \iff \det(A) \neq 0$ [Cor. precedente]
$A \cdot A^{-1} = I$ $\quad \det(I) = 1$ [matrice triangolare]
Teorema $\Rightarrow \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$.

Prop. Sia $\varphi: V \to V$ una mappa lineare, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ due basi di V, A la matrice di φ rispetto a $\mathcal{B}$, A' rispetto a $\mathcal{B}'$.

Allora $\det(A) = \det(A')$.

Quindi $\det(A)$ dipende solo da φ, non della base!

Dim. Sappiamo: $\exists P$ matrice invertibile: $A' = PAP^{-1}$.

Teorema $\Rightarrow \det(A') = \det(P)\det(A)\det(P^{-1}) = \det(A)\det(P)\det(P^{-1})$
$= \det(A) \cdot 1$.

Cor. Se $\varphi: V \to V$ è un'applicazione lineare, A la matrice di φ rispetto ad una [qualsiasi] base
$\mathrm{Ker}(\varphi) \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(\varphi) \neq V \Leftrightarrow \det(A) = 0$.

Def. Se $\underset{[a_{ij}]}{\overset{}{A}} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, la matrice aggiunta di A è $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$

dove $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$

[si nota lo scambio di i e j!]

Formula di Cramer: $A \cdot \tilde{A} = \det(A) \cdot I$

dove $I \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ è la matrice identità.

Cor. Se $\det(A) \neq 0$, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}$.

Esempio: $n = 2$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightsquigarrow \tilde{A} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ se $ad - bc \neq 0$, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

[formula già vista]

Esempio concreto per $n = 3$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det(A) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -22$$

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ [sviluppo rispetto alla seconda riga/colonna]

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 0 & -11 & 0 \\ -8 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{22}\tilde{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{11} & 0 & \frac{3}{11} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{4}{11} & 0 & -\frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

Dim. della formula di Cramer: calcoliamo $A \cdot \tilde{A}$.

* [prima riga di A] $\times$ [prima colonna di $\tilde{A}$]

$(-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12} \det(A_{12}) + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det(A_{1n})$

$= \det(A)$ [sviluppo rispetto alla prima riga]

* di maniera simile,

[riga N° i di A] $\times$ [~~riga~~ colonna N° i di $\tilde{A}$] $= \det(A)$

[sviluppo rispetto alla riga N° i di A]

* [prima riga di A] $\times$ [seconda colonna di A]:

$(-1)^{1+2} a_{11} \det(A_{21}) + (-1)^{2+2} a_{12} \det(A_{22}) + \ldots + (-1)^{2+n} a_{1n} \det(A_{2n})$

Si osserva: questo è il determinante della matrice

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

dove abbiamo sostituita la seconda riga di A con la prima riga.
Ma allora ci sono due righe uguali
$\Rightarrow \det(A) = 0$.

* Di maniera simile,

[riga N° i di A] $\times$ [colonna N° $j \neq i$ di A] $= 0$.

Con la formula di Cramer si può dare una seconda dimostrazione del teorema "$\det(A) = 0 \Leftrightarrow$ le colonne di A sono dipendenti."

$\Rightarrow$: Se $\det(A) = 0$, allora dopo Cramer $A\tilde{A} = 0$. Fissando una colonna $C_i \neq 0$ di $\tilde{A}$, la relazione $AC_i = 0$ dà una relazione lineare $\neq 0$ tra le colonne di A.

$\Leftarrow$: Se le colonne di A sono dipendenti, $\mathrm{Im}(A) \neq \mathbb{R}^n$, ma un sottospazio di dim. $< n$. Ma allora $\mathrm{Im}(A\tilde{A}) \subset \mathrm{Im}(A) \neq \mathbb{R}^n$.
Se $\det(A) \neq 0$, ~~Im~~ $A\tilde{A} = \det(A) \cdot I \Rightarrow \mathrm{Im}(A\tilde{A}) = \mathbb{R}^n$ ↯

Richiami sui polinomi

Un polinomio $f \in \mathbb{R}[x]$ è un'espressione $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$, dove $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. $n := \deg(f)$ è il grado di f.

Divisione con resto: se $g = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \in \mathbb{R}[x]$ è un'altro polinomio con $\boxed{m \leq n}$, esistono $q, r \in \mathbb{R}[x]$ tali che $f = q \cdot g + r$, e $\deg(r) < \deg(g)$. Tali q, r sono unici.

q, r si trovano utilizzando l'algoritmo di Euclide:

Si considera $f_1 := f - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} g$.

Si osserva: $\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} g = a_n x^n + \frac{a_n b_{m-1}}{b_m} x^{n-1} + \ldots$

Quindi $\deg(f_1) \leq n-1$. Se $\deg(f_1) < m$, allora $f_1 = r$ e FINITO.

Se no, il processo si ripeta con f_1 al posto di f.

Esempio: 1) $f = x^4 + 2$, $g = x^3 + 2$.

$f_1 = f - xg = x^4 + 2 - (x^4 + 2x) = 2 - 2x =: r$
$q = x$.

2) $f = x^4 + 2$, $g = x^3 + 3x^2$

$f_1 = f - xg = x^4 + 2 - x^4 - 3x^3 = -3x^3 + 2$

$f_2 = f_1 + 3g = -3x^3 + 2 + 3x^3 + 9x^2 = 9x^2 + 2 =: r$

$\Rightarrow f_1 = -3g + r \Rightarrow f = f_1 + xg = (x-3)g + r$.

Def. $a \in \mathbb{R}$ è radice di f se $f(a) = 0$.

Prop. Se a è radice di f, allora $f = (x-a)q$, dove $q \in \mathbb{R}[x]$, $\deg(q) = \deg(f) - 1$.

Dim. Si fa la divisione con resto: $f = (x-a)q + r$ dove $\deg(r) < \deg(x-a) = 1 \Rightarrow r$ è una costante!

Ma allora $\underset{0}{\underset{\parallel}{f(a)}} = (a-a)q + r = r \Rightarrow r = 0$.

Cor. Se $f(a) = 0$, esiste $m > 0$ tale che $f = (x-a)^m g$ dove $g(a) \neq 0$. Qui $m \leq \deg(f)$.

Dim. Sappiamo: $f = (x-a)q$ dove $\deg(q) = \deg(f) - 1$.
Se $q(a) \neq 0$, FINITO. Se no, $q = (x-a)q_1$
$\Rightarrow f = (x-a)^2 q_1$ dove $\deg(q_1) = \deg(f) - 2$.
Il processo si ripeta: troviamo $q_1, q_2, \dots, q_i$ finché $q_i(a) \neq 0$. [Può essere: q_i = costante!]

Def. Il numero m si chiama la molteplicità della radice a di f.

Oss. Se $b \neq a$ è un'altra radice di f e $f = (x-a)^m g$ allora $\underset{0}{\underset{\parallel}{f(b)}} = (b-a)^m g(b) \Rightarrow g(b) = 0$.

Quindi $g = (x-b)^{m'} h \Rightarrow f = (x-a)^m (x-b)^{m'} h$
dove $\deg(h) = \deg(f) - (m+m')$, $h(a) \neq 0$, $h(b) \neq 0$.
A questo punto ci sono due casi:
- o h non ammette radici in $\mathbb{R}$ [esempio: $h = x^2+1$]
- o h ammette una radice $c \in \mathbb{R}$ diversa da a, b, e il processo può essere continuato.

Finalmente, arriviamo al teorema seguente:

Teorema. Ogni $f \in \mathbb{R}[x]$ ha un numero finito di radici $a_1, a_2, \dots, a_s \in \mathbb{R}$. Se m_i = molteplicità di a_i, allora $m_1 + m_2 + \dots + m_s \leq \deg(f)$ e
$$f = (x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2} \dots (x-a_s)^{m_s}\, g$$
dove $g \in \mathbb{R}[x]$ non ammette radici in $\mathbb{R}$.

NB: Se $\deg(f) \geq 5$, non abbiamo metodi esatti per trovare le radici, solo metodi ad hoc o approssimativi.