DESCRIZIONE DEL CORSO *CALCOLO DELLE VARIAZIONI B*

Il corso di *Calcolo delle Variazioni B* per l'A.A. 2024–25 sarà incentrato su questioni classiche e più recenti di regolarità per superfici minime; può essere un'interessante applicazione della teoria degli insiemi di perimetro finito per chi ha partecipato al corso di Analisi Superiore A. L'avvenuta frequenza a tale corso non è però un prerequisito, anzi il corso di Calcolo delle Variazioni B può essere seguito da qualunque studente di laurea specialistica o del terzo anno che abbia seguito (o stia seguendo) i corsi obbligatori di Analisi.

La questione che ci si pone, in breve, è capire la regolarità minima che deve avere un insieme che risolve un determinato problema, spesso un problema "di tipo isoperimetrico" con qualche vincolo. Un esempio classico è la questione di minimizzare l'area per una superficie che abbia il bordo prescritto (per esempio, due cerchi in $\mathbb{R}^3$). Un altro esempio è il problema di curvatura prescritta, ossia la minimizzazione del funzionale

$$P(E) + \int_E f(x)\,dx$$

tra tutti gli insiemi $E \subseteq \mathbb{R}^N$. Il nome "curvatura prescritta" è dato dal fatto che se E è una soluzione a questo problema allora la curvatura del bordo di E (definita nel modo opportuno) vale f.

Nello studiare la regolarità delle soluzioni di questi o altri problemi, si scopre che non è importante concentrarsi sulle caratteristiche del problema specifico, ma su condizioni di ottimalità soddisfatte dalle soluzioni. Questo è particolarmente utile perché insiemi che risolvono problemi anche molto diversi soddisfano le stesse condizioni, e dunque i risultati di regolarità valgono per un'ampia classe di problemi e non per uno specifico.

La condizione più importante è quella di essere un Λ-minimo, per un qualche $\Lambda \in \mathbb{R}^+$. Precisamente, si dice che un insieme E è un Λ-minimo (del perimetro) se per ogni insieme F tale che la differenza simmetrica $E\Delta F$ sia contenuta in una palla di raggio $r > 0$ (ossia, E ed F coincidono al di fuori di quella palla) si ha

$$P(E) \leq P(F) + \Lambda r^N\,.$$

Si può vedere che le soluzioni di molti problemi effettivamente soddisfano questa condizione; si noti che la proprietà più forte di tutte, ossia quando $\Lambda = 0$, non è verificata nel caso degli insiemi isoperimetrici (ossia quelli che minimizzano il perimetro a volume fissato).

Nella prima parte del corso, quella di tipo "classico", oltre a descrivere e trattare vari esempi importanti ci occuperemo di studiare e mostrare le proprietà di regolarità di tipo $\mathrm{C}^{1,\alpha}$ dei Λ-minimi. La seconda parte, invece, sarà dedicata a problemi studiati e risolti negli ultimi pochi anni, e che utilizzano in modo importante le idee e le tecniche viste nella prima parte; i problemi da trattare verranno scelti da una piccola rosa insieme agli studenti, in base ai loro interessi.