Teorema (Stone–Weierstrass). *Sia X uno spazio metrico compatto, e sia $\mathscr{F} \subseteq C(X,\mathbb{R})$ una algebra (cioè una famiglia chiusa per somma, prodotto per scalare e prodotto), che separi i punti, e che approssimi le funzioni costanti (dotando $C(X,\mathbb{R})$ della norma del sup). Allora $\mathscr{F}$ è densa, ossia $\overline{\mathscr{F}} = C(X,\mathbb{R})$.*

Per dimostrare il teorema, possiamo intanto notare che sia sufficiente che la famiglia $\overline{\mathscr{F}}$ sia chiusa per massimo e minimo. Abbiamo cioè il primo risultato intermedio.

Lemma 1. *Nelle ipotesi del teorema, supponiamo che per ogni $f, g \in \mathscr{F}$ si abbia $f \wedge g \in \overline{\mathscr{F}}$ e $f \vee g \in \overline{\mathscr{F}}$. Allora vale la tesi del teorema.*

Dimostrazione. Sia $\varphi \in C(X,\mathbb{R})$ una generica funzione. Per ogni coppia di punti $z \neq w \in X$, prendiamo $f \in \mathscr{F}$ tale che $f(z) \neq f(w)$. Visto che $\mathscr{F}$ è chiusa per somma e prodotto, definendo

$$f_{zw}(x) = \varphi(z) + \frac{f(x) - f(z)}{f(w) - f(z)}\big(\varphi(w) - \varphi(z)\big)$$

si ha una funzione $f_{zw} \in \mathscr{F}$ che coincide con φ in z ed in w. Sia ora $\varepsilon > 0$; per continuità, l'insieme

$$A(z,w) = \big\{x \in X : f_{zw}(x) > \varphi(x) - \varepsilon\big\}$$

è un aperto che contiene sia z che w. Lasciamo adesso z fissato e facciamo variare w: gli aperti $A(z,w)$ al variare di $w \in X \setminus \{z\}$ sono una famiglia di aperti che ricopre X, visto che z è contenuto in ogni $A(z,w)$ e che ogni $A(z,w)$ contiene w. Per compattezza di X, troviamo un numero finito di elementi $w_1, w_2, \ldots, w_K$ tali che l'unione degli $A(z,w_i)$ per $i \in \{1, 2, \ldots, K\}$ sia l'intero X. Per ipotesi, se definiamo

$$g_z = \max\Big\{f_{zw_i},\, i \in \{1, 2, \ldots, K\}\Big\}$$

abbiamo quindi $g_z \in \overline{\mathscr{F}}$ (si osservi che banalmente si avrà $f \wedge g \in \overline{\mathscr{F}}$ e $f \vee g \in \overline{\mathscr{F}}$ anche se $f, g \in \overline{\mathscr{F}}$, visto che è vero se $f, g \in \mathscr{F}$). Inoltre, per costruzione si ottiene subito che $g_z(z) = \varphi(z)$ e che $g_z > \varphi - \varepsilon$. Definiamo allora

$$B(z) = \big\{x \in X : g_z(x) < \varphi(x) + \varepsilon\big\};$$

anche $B(z)$ è un aperto e contiene z. Di nuovo per compattezza, troviamo un numero finito di elementi $z_1, z_2, \ldots, z_H$ tali che gli aperti $B(z_j)$ con $j \in \{1, 2, \ldots, H\}$ ricoprono X. Definiamo finalmente

$$h = \min\Big\{g_{z_j},\, j \in \{1, 2, \ldots, K\}\Big\},$$

e si ha che $h \in \overline{\mathscr{F}}$ e che $\varphi - \varepsilon < h < \varphi + \varepsilon$. Abbiamo quindi mostrato la tesi. $\square$

Per dimostrare il Teorema di Stone–Weierstrass dobbiamo quindi far solo vedere che una famiglia che rispetta le ipotesi del teorema è chiusa per massimo e minimo. Visto che

$$f \wedge g = \frac{f + g - |f - g|}{2}, \qquad\qquad f \vee g = \frac{f + g + |f - g|}{2},$$

si deve in effetti solo far vedere che la famiglia sia chiusa per passaggio al modulo, ossia che se $f \in \mathscr{F}$ allora $|f| \in \overline{\mathscr{F}}$. In realtà, viene più comodo dimostrare che sia contenuta in $\overline{\mathscr{F}}$ ogni funzione del tipo $\sqrt{f}$ per $0 \leq f \in \mathscr{F}$. Si ha cioè il

Lemma 2. *Nelle ipotesi del teorema, supponiamo che per ogni $0 \le f \in \mathscr{F}$ si abbia $\sqrt{f} \in \overline{\mathscr{F}}$. Allora vale le tesi del teorema.*

Dimostrazione. Per ogni $f \in \mathscr{F}$, si ha $f^2 \in \mathscr{F}$, e allora $\sqrt{f^2} \in \overline{\mathscr{F}}$, ossia $|f| \in \overline{\mathscr{F}}$. Se i moduli di funzioni di $\mathscr{F}$ sono in $\overline{\mathscr{F}}$, allora come osservato sopra il massimo ed il minimo di funzioni in $\mathscr{F}$ stanno in $\overline{\mathscr{F}}$, e quindi per il Lemma 1 si conclude. □

Per dimostrare che le radici di funzioni positive di $\mathscr{F}$ stanno in $\overline{\mathscr{F}}$, basta mostrare che si riesce ad approssimare con dei polinomi la funzione $\sqrt{t}$ (in realtà approssimeremo la funzione $\sqrt{1-t}$ per semplificare i conti). Più precisamente, enunciamo il seguente fatto.

Lemma 3. *Esiste una successione $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tale che la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n t^n$ converge uniformemente a $\sqrt{1-t}$ su $[0,1]$.*

Prima di dimostrare questo risultato, osserviamo che da esso si potrà mostrare il teorema di Stone–Weierstrass.

Dimostrazione (del Teorema di Stone–Weierstrass). Grazie al Lemma 2, è sufficiente prendere una funzione positiva $f \in \overline{\mathscr{F}}$ e mostrare che $\sqrt{f} \in \overline{\mathscr{F}}$. Visto che f è una funzione continua definita su un compatto, ha un massimo ed un minimo; dal momento che $\overline{\mathscr{F}}$ è chiusa per prodotti per numeri scalari, possiamo supporre che $0 \le f \le 1$. Se infatti mostriamo che $\sqrt{f} \in \overline{\mathscr{F}}$ per ogni $0 \le f \le 1 \in \overline{\mathscr{F}}$, allora presa una $0 \le f \in \overline{\mathscr{F}}$ qualsiasi e detto $K = \max\{f(x),\, x \in X\}$, si ha che $0 \le f/K \le 1$ e che $f/K \in \overline{\mathscr{F}}$, per cui $\sqrt{f/K} \in \overline{\mathscr{F}}$, e dunque sta in $\overline{\mathscr{F}}$ anche $\sqrt{K} \cdot \sqrt{f/K} = \sqrt{f}$. Definiamo adesso

$$f_k = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n (1-f)^n \,,$$

dove i coefficienti α_n sono dati dal Lemma 3. Si tratta di una funzione che sta in $\overline{\mathscr{F}}$, visto che $\overline{\mathscr{F}}$ è un'algebra che contiene le funzioni costanti, e d'altra parte per ogni $x \in X$ si ha

$$f_k(x) - \sqrt{f(x)} = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n (1-f(x))^n - \sqrt{f(x)} \le \max_{t\in[0,1]} \sum_{n=1}^{k} \alpha_n t^n - \sqrt{1-t}\,,$$

e quest'ultimo massimo tende a 0 per $k \to +\infty$ visto che la serie di potenze converge uniformemente a $\sqrt{1-t}$. In altre parole, la successione $\{f_k\}$ converge uniformemente a $\sqrt{f}$, e dunque si conclude che $\sqrt{f} \in \overline{\mathscr{F}}$. Come notato sopra, per il Lemma 2 questo conclude la dimostrazione. □

A questo punto si deve quindi solo dimostrare il Lemma 3 per finire davvero tutta la dimostrazione.

Dimostrazione (del Lemma 3). La funzione $\varphi(t) = \sqrt{1-t}$ è continua su $(-\infty, 1]$, ed è derivabile infinite volte su $(-\infty, 1)$. Possiamo quindi scrivere lo sviluppo di Taylor centrato in 0, sfruttando il fatto che, come mostra una banale induzione, per ogni $n \ge 2$ si ha

$$\varphi^{(n)}(t) = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-3)}{2^n}\,(1-t)^{-\frac{2n-1}{2}}\,. \tag{1}$$

Ma allora, per ogni $t \in [0,1]$, per un qualsiasi $k \gg 1$ si ha l'uguaglianza

$$\varphi(t) = 1 + \sum_{n=1}^{k} \frac{t^n}{n!}\,\varphi^{(n)}(0) + \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}\,\varphi^{(k+1)}(\xi)$$

per un qualche $\xi \in (0,t)$. Definiamo allora, anche ricordando (1),

$$\alpha_0 = 1\,, \qquad \alpha_1 = -\frac{1}{2}\,, \qquad \alpha_n = \frac{1}{n!}\,\varphi^{(n)}(0) = -\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-3)}{2^n n!} \quad \forall\, n \geq 2\,,$$

così che

$$\sqrt{1-t} = \varphi(t) = \sum_{n=0}^{k} \alpha_n t^n + \alpha_{k+1} t^{k+1} (1-\xi)^{-\frac{2k+1}{2}}\,. \tag{2}$$

Osserviamo adesso che

$$|\alpha_n| = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} 2j-1}{\prod_{j=1}^{n} 2j} \leq \frac{1}{2n}\,.$$

Se $t \in [0,1/2]$, allora, si ha che anche $0 \leq \xi \leq t \leq 1/2$, e quindi

$$|\alpha_{k+1}|\, t^{k+1}(1-\xi)^{-\frac{2k+1}{2}} \leq |\alpha_{k+1}| 2^{-1/2} \leq \frac{1}{2(k+1)}\,.$$

Di conseguenza, per la (2) deduciamo che la serie $\sum \alpha_n t^n$ converge uniformemente a $\sqrt{1-t}$ per $t \in [0,1/2]$. Si deve far vedere che la stessa convergenza uniforme vale in effetti in tutto $[0,1]$, il che richiede un minimo di attenzione in più. Innanzitutto, possiamo notare che grazie al fatto che $|\alpha_n| \leq 1/(2n)$ allora di sicuro la serie $\sum \alpha_n t^n$ ha raggio di convergenza almeno 1, e quindi converge puntualmente su $[0,1)$ e uniformemente su $[0,1-\varepsilon]$ per un qualunque $\varepsilon > 0$. Inoltre, dalla definizione di α_n e con una banale induzione si può notare che in effetti

$$|\alpha_n| \leq \frac{1}{n^{3/2}}\,,$$

e quindi la serie $\alpha_n t^n$ converge puntualmente anche per $t = 1$. Esiste dunque una funzione $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ con la proprietà che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n t^n = g(t) \qquad \forall\, t \in [0,1]\,.$$

Per concludere, dobbiamo far vedere che la convergenza è uniforme e che $g(t) = \sqrt{1-t}$, cosa che per il momento sappiamo solo se $t \in [0,1/2]$. Il fatto che la convergenza sia uniforme (che tra l'altro assicura che g è continua) è immediato visto che per ogni $0 \leq t \leq 1$ si ha

$$\sum_{n>k} |\alpha_n| t^n \leq \sum_{n>k} |\alpha_n| 1^n\,,$$

e quindi la convergenza puntuale in $t = 1$ assicura la convergenza uniforme su tutto $[0,1]$.

Mostriamo adesso che g coincide con $\sqrt{1-t}$ non solo su $[0,1/2]$, ma in effetti su tutto $[0,1]$. Per fare questo, osserviamo che ogni funzione $\alpha_n t^n$ è di classe C^1, e la sua derivata è $n\alpha_n t^{n-1}$. Si ha quindi che

$$g'(t) = \Bigg(\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n t^n \Bigg)' = \sum_{n\in\mathbb{N}} n\alpha_n t^{n-1}$$

dovunque l'ultima serie converge uniformemente, cioè sicuramente in ogni intervallo $[0, 1-\varepsilon]$ con un qualunque $\varepsilon > 0$. Vorremmo che fosse $g(t) = \sqrt{1-t}$, e quindi dovrebbe essere $2(1-t)g'(t) = -g(t)$. D'altra parte, su $[0, 1-\varepsilon]$ si ha

$$2(1-t)g'(t) = 2(1-t)\sum_{n\in\mathbb{N}} n\alpha_n t^{n-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2n\alpha_n t^{n-1} - 2n\alpha_n t^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2\big((n+1)\alpha_{n+1} - n\alpha_n\big)t^n\,.$$

Dobbiamo allora controllare che questa serie coincida con la serie $-\sum \alpha_n t^n$, ovvero che per ogni n sia

$$2\big(n\alpha_n - (n+1)\alpha_{n+1}\big) = \alpha_n\,. \tag{3}$$

Se questo è vero, allora g è una funzione che in 0 vale 1 e che verifica l'equazione $2(1-t)g'(t) + g(t) = 0$, e l'unica soluzione di tale equazione è proprio $g(t) = \sqrt{1-t}$. E infine, la verifica di (3) è banale, e in realtà non c'è nemmeno bisogno di effettuarla, perché se fosse falsa allora la funzione $g(t)$ non potrebbe coincidere con $\sqrt{1-t}$ nemmeno in $[0, 1/2]$. $\square$