Primo compitino per il corso di Analisi Matematica 2 con soluzioni
corso di laurea in Matematica
Università di Pisa
22/11/2024

Esercizio 1 (12 punti)**.** *Sia* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\, y \geq x^2 + x\}$*, e sia* $f : D \to \mathbb{R}$ *la funzione definita da*

$$f(x, y) = \frac{y^2 + 3y + x + 4 + \operatorname{sen}(x^2 - y + x)}{2 + x^2}.$$

(i) Discutere la limitatezza di f *dall'alto e dal basso;*

(ii) dire se f *ammette massimi e/o minimi globali;*

(iii) dire quanti sono i massimi ed i minimi locali o globali di f*, e se possibile trovarli.*

(i) La funzione f non è limitata superiormente in D, infatti, presa la successione di punti $P_n = (0, n) \in D$ si ha

$$f(P_n) = \frac{n^2 + 3n + \operatorname{sen}(-n)}{2} \to +\infty.$$

Questo fatto implica che f non ha massimo assoluto in D.

La funzione f è limitata inferiormente in D, infatti, usando dapprima $y^2 \geq 0$ e $\operatorname{sen}(\cdot) \geq -1$, e poi $y \geq x^2 + x$, troviamo

$$f(x, y) \geq \frac{3y + x + 3}{2 + x^2} \geq \frac{3x^2 + 4x + 3}{2 + x^2} \geq \min_{t \in \mathbb{R}} \varphi(t), \quad \varphi(t) := \frac{3t^2 + 4t + 4}{2 + t^2}.$$

Studiando la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dimostra che essa ha minimo in $\mathbb{R}$.

(ii) L'insieme D è la regione di piano delimitata inferiormente dalla parabola $y = x^2 + x$. Deduciamo quindi che una qualsiasi successione di punti di D con norma divergente, soddisfa, fuori da una palla, le seguenti proprietà:

$$y \to +\infty, \quad y \geq |x|.$$

La seconda condizione segue dal fatto che fuori da una palla, il sopragrafico di $y = x^2 + x$ contenuto nel sopragrafico di $y = |x|$. Possiamo quindi dire che, fuori da una palla,

$$x \geq -|x| \geq -y, \quad x^2 \leq y - x \leq y + |x| \leq 2y.$$

Concludiamo quindi che, fiori da una palla,

$$f(x, y) \geq \frac{y^2 + 2y + 3}{2 + 2y}.$$

Da cui, passando al limite per $y \to +\infty$,

$$\lim_{\substack{\|(x,y)\| \to \infty \\ (x,y) \in D}} f(x, y) \geq \lim_{y \to +\infty} \frac{y^2 + 2y + 3}{2 + 2y} = +\infty.$$

(iii) Come già osservato in (i), la funzione non ammette massimo assoluto in D. Il limite calcolato in (ii) ci permette di dire che la funzione ammette invece minimo assoluto in D,

utilizzando opportunamente il Teorema di Weierstrass. Osserviamo che $f(0,0) = 2$. Grazie a (ii) otteniamo che esiste R tale che

$$f(x,y) \geq 3 \quad \forall (x,y) \in D \setminus B_R \,,$$

dove B_R indica la palla chiusa di raggio R e centro l'origine. Per Weierstrass, nell'insieme $D \cap B_R$ (compatto perché intersezione di chiuso e compatto) la funzione f (continua) ammette minimo assoluto. Inoltre,

$$\min_{D\cap B_R} f \leq f(0,0) = 2 < f(x,y) \quad \forall (x,y) \in D \setminus B_R \,.$$

Deduciamo che il minimo in $D \cap B_R$ è il minimo assoluto in D.

I punti di massimo e minimo locale e/o globale (tra i quali senz'altro deve esserci il minimo assoluto) vanno cercati tra i punti di non differenziabilità di f interni a D (e non ce ne sono perché la f è C^1 sul suo dominio), i punti critici di f interni a D, ed i punti di bordo.

Punti critici: condizione necessaria per avere $\nabla f = (0,0)$ è che la derivata parziale rispetto ad y sia zero: poiché

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y + 3 - \cos(x^2 - y + x)}{2 + x^2} \,,$$

la coordinata y del punto critico deve soddisfare

$$y = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos(x^2 - y + x) \leq -1 \,.$$

Questa disuguaglianza non è verificata da nessun punto di D, visto che il vertice della parabola $y = x^2 + x$ è in $(-1/2, -1/4)$. Deduciamo che non esistono punti critici di f interni a D, e quindi tutti gli eventuali punti di massimo e minimo locale devono stare sul bordo di D.

Studiamo infine f ristretta al bordo di D: parametrizzando ∂D con $\{(x, x^2 + x) \ : \ x \in \mathbb{R}\}$, ci riconduciamo a studiare la funzione di una variabile

$$\begin{aligned} p(x) := f(x, x^2 + x) &= \frac{x^4 + x^2 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + x + 4}{2 + x^2} = \frac{x^4 + 4x^2 + 2x^3 + 4x + 4}{2 + x^2} \\ &= x^2 + 2x + 2 \,. \end{aligned}$$

Questa funzione non ha massimi locali ed ha un solo minimo, assoluto, in $x = -1$. Quindi il minimo assoluto di f in D è

$$\min_D f = f(-1, 0) = 1 \,,$$

ed a parte il punto di minimo globale non vi sono altri punti di massimo e/o minimo locale o globale.

Esercizio 2 (12 punti)**.** *Si definisca* $\mathcal{E} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + 3x + y^2 + yz + z^2 = 1\big\}$.

(i) Dimostrare che $\mathcal{E}$ è localmente grafico di una funzione di classe C^1 da $\mathbb{R}^2$ ad $\mathbb{R}$;

(ii) discutere la compattezza di $\mathcal{E}$;

(iii) dire se esistono punti di $\mathcal{E}$ di minima e massima norma e, in caso affermativo, determinarli.

(i) L'insieme $\mathcal{E}$ è descritto da

$$\mathcal{E} = \{g = 0\}$$

con $g(x,y,z) = x^2+3x+y^2+yz+z^2-1$. La funzione g è di classe C^1 ed in ogni punto di $\{g=0\}$ la matrice jacobiana Dg, qui data dal gradiente ∇g, ha rango massimo. Infatti gli unici punti in cui il gradiente non ha rango massimo sono i punti in cui il gradiente è identicamente nullo, e questi non appartengono a $\{g=0\}$:

$$\nabla g(x,y,z) = (2x+3\,,\ 2y+z\,,\ y+2z) = (0,0,0) \quad \Leftrightarrow \quad (x,y,z) = (-3/2,0,0) \notin \{g=0\}\,.$$

Si può quindi applicare il Teorema della Funzione Implicita si applica, ottenendo che l'insieme $\mathcal{E}$ è localmente grafico di una funzione C^1.

(ii) L'insieme $\mathcal{E}$ è un compatto di $\mathbb{R}^2$: è chiuso perché luogo di zeri di una funzione continua; è limitato perché, utilizzando le uguaglianze e stime in $\mathbb{R}^3$

$$x^2+3x = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}, \quad yz \le \frac{y^2+z^2}{2}\,, \quad yz \ge -|yz| \ge -\frac{(y^2+z^2)}{2}\,,$$

otteniamo che per $(x,y,z) \in \mathcal{E}$,

$$1 = x^2+3x+y^2+yz+z^2 \ge \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{y^2+z^2}{2} \ge \frac{1}{2}\left(\left(x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right)^2 + y^2+z^2\right) - \frac{9}{4}\,,$$

da cui

$$\left\|(x,y,z) - \left(-\frac{3}{2},0,0\right)\right\|^2 \le \frac{13}{2}\,.$$

In altre parole $\mathcal{E}$ è contenuto nella palla di raggio $\sqrt{13/2}$ centrata in $(-3/2,0,0)$.

(iii) La funzione norma è continua, l'insieme $\mathcal{E}$ è compatto. Quindi, per Weierstrass, esistono punti di $\mathcal{E}$ di massima norma e di minima norma.

Grazie allo studio fatto al punto (i), possiamo utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per determinare i punti di massimo e minimo. Senza perdita di generalità, possiamo ottimizzare il quadrato della norma. Si tratta quindi di ottimizzare

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

con vincolo $g(x,y,z)=0$.

I punti di massimo e minimo soddisfano

$$\begin{cases} x = \lambda(2x+3) \\ y = \lambda(2y+z) \\ z = \lambda(y+2z) \\ x^2+3x+y^2+yz+z^2 = 1 \end{cases}$$

per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$.

Risolviamo il sistema. Se $\lambda = 0$ oppure $\lambda = 1/2$ il sistema non ha soluzione. Quindi $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1/2$ e

$$\begin{cases} x = \dfrac{3\lambda}{1-2\lambda} \\[2ex] y = \dfrac{\lambda}{1-2\lambda}\, z \\[2ex] y = \dfrac{1-2\lambda}{\lambda}\, z \\[2ex] x^2 + 3x + y^2 + yz + z^2 = 1 \end{cases}$$

La seconda e terza equazione sono soddisfatte per $y = z = 0$ e per

$$3\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1 \quad \text{oppure} \quad \lambda = \frac{1}{3}\,.$$

Studiamo separatamente i 3 casi.

Caso $y = z = 0$: dalla quarta equazione si ottiene

$$x^2 + 3x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}\,.$$

La prima equazione fornisce il λ corrispondente, $\lambda = x/(2x+3)$, che non siamo interessati a scrivere esplicitamente (ci basta che esista). Abbiamo quindi trovato i punti critici vincolati

$$P_{1,2} = \left(\frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}, 0, 0 \right)\,.$$

Caso $\lambda = 1$: le prime tre equazioni danno

$$x = -3\,, \quad y = -z\,.$$

Inserendo questi valori nella quarta equazione si ha

$$9 - 9 + z^2 - z^2 + z^2 = 1 \quad \Rightarrow z = \pm 1\,.$$

Abbiamo quindi trovato i punti critici vincolati

$$P_{3,4} = (-3, \mp 1, \pm 1)\,.$$

Caso $\lambda = 1/3$: le prime tre equazioni danno

$$x = 3\,, \quad y = z\,.$$

Inserendo questi valori nella quarta equazione si ha

$$18 + 3z^2 = 1\,,$$

che non ha soluzione.

Calcoliamo la norma dei 4 punti critici vincolati:

$$\|P_1\| = \frac{\sqrt{13} - 3}{2}\,, \quad \|P_2\| = \frac{\sqrt{13} + 3}{2}\,, \quad \|P_{3,4}\| = \sqrt{11}\,.$$

Quindi il punto di minima norma è P_1 e i punti di massima norma sono $P_{3,4}$, visto che

$$\frac{\sqrt{13}+3}{2} < \sqrt{11} \iff 22 + 6\sqrt{13} < 44 \iff 3\sqrt{13} < 11 \iff 117 < 121 \,.$$

Esercizio 3 (12 punti)**.** *Si definisca A lo spazio di tutte le successioni reali (e quindi un elemento $x \in A$ è una successione $x = (x_1, x_2, \dots)$ di numeri reali). Si definisca $d : A \times A \to \mathbb{R}^+$ la funzione data da*

$$d(x,y) = \Big(\sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n| \Big) \wedge 1 \,.$$

Infine, si definisca X il sottospazio di A formato da tutte le successioni che sono convergenti.

(i) Si dimostri che d è una distanza su A (e quindi d'ora in poi si consideri A come uno spazio metrico con tale distanza);

(ii) si dimostri che se $x = (x_1, x_2, \dots)$ e $y = (y_1, y_2, \dots)$ sono due elementi di X, e $x_n \to \ell$, $y_n \to \ell'$ con $\ell \neq \ell'$, allora $d(x,y) = 1$;

(iii) si dimostri che X è un sottoinsieme chiuso di A;

(iv) si dica se X è compatto e/o completo.

La funzione d è chiaramente definita da $A \times A$ in $\mathbb{R}^+$; per mostrare che sia una distanza dobbiamo osservare che valgano le tre proprietà che la definiscono. Il fatto che $d(x,y) = 0$ se e solo se le due successioni x ed y coincidono è ovvio, così come il fatto che $d(x,y) = d(y,x)$. Se x, y e z sono tre successioni, allora si possono distinguere due casi: se $d(x,y) = 1$ oppure $d(y,z) = 1$, allora si ha immediatamente che $d(x,y) \le 1 \le d(x,y) + d(y,z)$, e quindi la disuguaglianza triangolare vale in questo caso. Se invece $d(x,y) < 1$ e $d(y,z) < 1$, allora basta sommare su tutti i numeri naturali $n \in \mathbb{N}$ la disuguaglianza $|x_n - z_n| \le |x_n - y_n| + |y_n - z_n|$, che vale grazie alla disuguaglianza triangolare in $\mathbb{R}$, e si ottiene che

$$\begin{aligned} d(x,z) \le \sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}} |x_n - z_n| &\le \sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n| + |y_n - z_n| = \sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n| + \sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}} |y_n - z_n| \\ &= d(x,y) + d(y,z) \,, \end{aligned}$$

e quindi la disuguaglianza triangolare vale anche in questo caso.

Siano ora x ed y due elementi di X, e chiamiamo ℓ ed ℓ' i limiti delle due successioni (che esistono appunto perché le due successioni sono in X). Ma allora si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} |x_n - y_n| = |\ell - \ell'| > 0 \,,$$

e quindi

$$\sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n| = +\infty \,,$$

da cui per definizione $d(x,y) = 1$.

Vogliamo ora dimostrare che X sia chiuso. Per farlo, basta modificare leggermente l'argomento appena presentato: siano infatti $x \in X$ ed $y \in A \setminus X$, cioè x è una successione reale che converge, ed y è una successione reale che non converge. Ma allora, la successione $|x_n - y_n|$ non tende a zero, e quindi la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|$ diverge, e dunque $d(x,y) = 1$. Cioè, ogni elemento di X ha distanza 1 da ogni elemento di $A \setminus X$. Questo assicura che se una successione di elementi di X converge, il limite deve per forza essere anch'esso in X. Ossia, X è chiuso.

Discutiamo infine la compattezza e la completezza di X. Prima di tutto, prendiamo dei numeri reali α_n qualsiasi, tutti diversi, e per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo $x^n \in X$ la successione che vale costantemente α_n, che chiaramente sta in X. Per quanto osservato al punto (ii), la distanza tra due qualunque di queste successioni è sempre pari ad 1. Ma allora lo stesso vale per qualunque sottosuccessione, e quindi la successione $\{x^n\}$ non può ammettere sottosuccessioni convergenti; in altre parole, X non è compatto per successioni, e quindi non è compatto.

Per concludere, possiamo vedere che X è completo. Per farlo, sia $\{x^n\}$ una successione di Cauchy in X (e quindi, in particolare, una successione di successioni), e cerchiamo di mostrare che converge. Si noti che possiamo anche limitarci a mostrare che converga in A, perché questo per il punto (iii) assicura che in realtà converge in X. Sia j un numero naturale fissato; per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\bar{n}$ tale che per ogni n, $n' > \bar{n}$ si ha $d(x^n, x^{n'}) < \varepsilon$; purché $\varepsilon < 1$, questo vuol dire che la serie $\sum_{h\in\mathbb{N}} |x^n_h - x^{n'}_h|$ converge ad un numero minore di ε, e quindi in particolare $|x^n_j - x^{n'}_j| < \varepsilon$. In altre parole, per j fissato la successione x^n_j è una successione reale di Cauchy, e quindi converge; possiamo chiamare z_j il limite, e visto che questo si può fare per qualunque j abbiamo ottenuto una successione $z = (z_1, z_2, z_3, \dots)$. Come detto sopra, la completezza di X seguirà se mostreremo che $d(x^n, z)$ tende a 0 per $n \to \infty$.

Sia allora $0 < \varepsilon < 1$: visto che la successione $\{x^n\}$ è di Cauchy, come già usato prima esiste un $\bar{n}$ tale che per ogni n, $n' > \bar{n}$ si ha $d(x^n, x^{n'}) < \varepsilon$, e quindi in particolare

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |x^n_j - x^{n'}_j| < \varepsilon\,.$$

Fissiamo ora un qualunque $h \in \mathbb{N}$: ovviamente

$$\sum_{j=1}^{h} |x^n_j - x^{n'}_j| < \varepsilon\,.$$

Se teniamo fisso $n > \bar{n}$ e mandiamo n' all'infinito, visto che $x^{n'}_j$ tende a z_j per qualunque j e visto che la somma è finita abbiamo

$$\lim_{n'\to\infty} \sum_{j=1}^{h} |x^n_j - x^{n'}_j| = \sum_{j=1}^{h} |x^n_j - z_j|\,,$$

e quindi si ha

$$\sum_{j=1}^{h} |x^n_j - z_j| \le \varepsilon\,.$$

Visto che questa disuguaglianza è vera per qualunque $n > \bar{n}$ e qualunque h si può mandare h all'infinito ottenendo

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}^{h} |x^n_j - z_j| \le \varepsilon\,.$$

Ossia, per ogni $\varepsilon < 1$ abbiamo trovato $\bar{n}$ tale che $d(x^n, z) < \varepsilon$ per ogni $n > \bar{n}$: questo vuol dire appunto che $\{x^n\}$ tende a z, e quindi la completezza è mostrata.