

Prova scritta per il corso di Analisi Matematica 2
 corso di laurea in Matematica
 Università di Pisa
 21/1/2026

Tempo a disposizione: 120 minuti.

Esercizio 1 (10 punti). *Si definisca l'insieme*

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \cosh(\sqrt{x^2 + y^2}) \right\}.$$

(i) *Si calcoli il volume di Ω .*

(ii) *Si calcoli il perimetro di Ω .*

L'insieme Ω è il sottografico della funzione $f(x, y) = \cosh(\sqrt{x^2 + y^2})$ definita sul cerchio unitario di \mathbb{R}^2 , quindi il suo volume, usando le coordinate polari, è semplicemente

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \int_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} \cosh(\sqrt{x^2 + y^2}) \, dx \, dy = 2\pi \int_{\rho=0}^1 \cosh(\rho) \rho \, d\rho = 2\pi \left[\rho \sinh(\rho) - \cosh(\rho) \right]_{\rho=0}^1 \\ &= 2\pi \left(\sinh 1 - \cosh 1 + 1 \right) = 2\pi \left(1 - \frac{1}{e} \right). \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il perimetro di Ω , la base inferiore è un cerchio di raggio 1, che quindi ha area π ; invece la parte laterale è la superficie laterale di un cilindro di raggio 1 e altezza $\cosh 1$, che quindi è $2\pi \cosh 1$. La parte superiore, infine, è il grafico della funzione $f(x, y) = \cosh(\sqrt{x^2 + y^2})$ sul cerchio unitario, che è quindi, usando ancora le coordinate polari,

$$\begin{aligned} \int_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} \sqrt{1 + |\nabla f(x, y)|^2} \, dx \, dy &= 2\pi \int_{\rho=0}^1 \sqrt{1 + \sinh^2(\rho)} \rho \, d\rho = 2\pi \int_{\rho=0}^1 \cosh(\rho) \rho \, d\rho \\ &= 2\pi \left(1 - \frac{1}{e} \right). \end{aligned}$$

Mettendo tutto insieme, si trova quindi

$$P(\Omega) = 2\pi + 2\pi \cosh 1 + 2\pi \left(1 - \frac{1}{e} \right) = 2\pi \left(2 + \cosh 1 - \frac{1}{e} \right) = (4 + 2e + e^{-1}) \pi.$$

Esercizio 2 (10 punti). *Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come*

$$f(x, y, z) = x^2 + xyz - y^2 z.$$

(i) *Si discuta l'esistenza di massimi/minimi globali di f su \mathbb{R}^3 ;*

(ii) *si discuta l'esistenza di massimi/minimi globali e locali di f nell'insieme*

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z \geq 0 \};$$

(iii) *si trovino tutti i punti di massimo/minimo globale e locale di f nell'insieme*

$$B = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2 \};$$

(iv*) *si discuta l'esistenza di massimi/minimi locali di f su \mathbb{R}^3 .*

(i) La funzione, ben definita ovunque, non è limitata, né superiormente né inferiormente, infatti:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 0, 0) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(0, t, 1) = -\infty.$$

In particolare non esistono né massimo né minimo globali.

(ii) Grazie ad (i) si ottiene immediatamente che f ristretta ad A non ha né massimo né minimo globale. Poiché f è C^∞ , gli eventuali punti di massimo/minimo locale vanno cercati tra i punti critici interni ad A e sulla frontiera di A . I punti critici sono tutti e soli i punti della forma $(0, 0, z_0)$ con $z_0 > 0$. Osserviamo che in tali punti la funzione vale $f(0, 0, z_0) = 0$. Un'analisi locale porta a concludere che i punti critici non sono né di massimo né di minimo locale: per $z_0 > 0$ fissato, consideriamo i punti della forma $(t, 0, z_0)$ e $(0, t, z_0)$, $t \in \mathbb{R}$; tali punti possono essere presi arbitrariamente vicini a $(0, 0, z_0)$; infine $f(t, 0, z_0) = t^2 > 0$, $f(0, t, z_0) = -t^2 z_0 < 0$. I punti di ∂A sono della forma $(x_0, y_0, 0)$ e in tali punti la funzione si annulla. Anche qui è immediato verificare che tali punti non sono né di massimo né di minimo locale:

- se $x_0 \neq 0$, i punti della forma $(x_0 + t, y_0, 0)$ appartengono ad A , possono essere presi arbitrariamente vicini a $(x_0, y_0, 0)$ e, a seconda del segno di t , la loro immagine è maggiore o minore di $f(x_0, y_0, 0)$;
- se $x_0 = 0$ e $y_0 \neq 0$, i punti della forma $(t, y_0, 0)$ e $(0, y_0, t)$, con $t > 0$, appartengono ad A , possono essere presi arbitrariamente vicini a $(0, y_0, 0)$ e $f(t, y_0, 0) = t^2 > 0$, $f(0, y_0, t) = -y_0^2 t < 0$;
- se $x_0 = y_0 = 0$, cioè se consideriamo l'origine, i punti della forma $(t, 0, 0)$ e $(0, t, t)$, per $t > 0$, appartengono ad A , possono essere presi arbitrariamente vicini a $(0, 0, 0)$ e $f(t, 0, 0) = t^2 > 0$, $f(0, t, t) = -t^3 < 0$.

(iii) Per il teorema di Weierstrass (f continua e B compatto), la funzione f ammette massimo e minimo globale. Poiché $B \subset A$, dall'analisi fatta in (ii) deduciamo che non ci sono punti critici interni e che i punti di $\partial B \cap \{z = 0\}$ non sono né di massimo né di minimo locale. Dobbiamo quindi analizzare la parte di frontiera $\partial B \cap \{z > 0\} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, con

$$\Sigma_1 := \{x^2 + y^2 = 1, 0 < z < 2\}, \quad \Sigma_2 := \{x^2 + y^2 \leq 1, z = 2\}.$$

Utilizzando le coordinate cilindriche, osserviamo che su Σ_1 la funzione è data da

$$h(t, z) = f(\cos t, \sin t, z) = \cos^2 t + (\cos t \sin t - \sin^2 t)z.$$

Poiché $\nabla h \neq (0, 0)$ in $[0, 2\pi] \times]0, 2[$, deduciamo che f non ammette né massimo né minimo locale in Σ_1 .

Per esclusione, i punti di massimo e minimo globale (ed eventualmente altri max/min locali) appartengono a Σ_2 . Sostituendo $z = 2$ nell'espressione di f , ci riconduciamo a studiare

$$g(x, y) = f(x, y, 2) = x^2 + 2xy - 2y^2$$

nel disco unitario $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$. Questa funzione ha un unico punto critico in $(0, 0)$, che è punto di sella. Il massimo e il minimo di g vanno quindi cercati sul bordo del disco. La restrizione di g alla circonferenza di bordo è descritta in coordinate polari da

$$\varphi(t) = g(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + 2 \sin t \cos t - 2 \sin^2 t$$

in $[0, 2\pi]$. Ricordando le formule trigonometriche di duplicazione, otteniamo

$$\varphi(t) = \frac{3}{2} \cos(2t) + \sin(2t) - 1.$$

Poiché

$$\varphi'(t) = -3 \sin(2t) + 2 \cos(2t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tan(2t) = \frac{2}{3},$$

otteniamo che i punti critici soddisfano

$$\sin(2t) = \frac{2}{3} \cos(2t), \quad \cos^2(2t) = \frac{9}{13},$$

quindi

$$\cos(2t) = \pm \frac{3}{\sqrt{13}}, \quad \sin(2t) = \pm \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Deduciamo che i punti di massimo di φ corrispondono a

$$t = \arccos(3/\sqrt{13})/2, \quad t = \arccos(3/\sqrt{13})/2 + \pi;$$

i punti di minimo corrispondono a

$$t = \arccos(3/\sqrt{13})/2 + \pi/2, \quad t = \arccos(3/\sqrt{13})/2 + 3\pi/2.$$

In particolare,

$$\max \varphi = \frac{\sqrt{13}}{2} - 1, \quad \min \varphi = -\frac{\sqrt{13}}{2} - 1.$$

Associati a questi 4 valori di t troviamo i due punti di massimo globale e i due punti di minimo globale di f in B , della forma $(\cos t, \sin t, 2)$. Non ci sono altri punti di massimo/minimo locale. (iv*) I punti critici di f in \mathbb{R}^3 sono tutti e soli i punti della forma $(0, 0, z_0)$ con $z_0 \in \mathbb{R}$. Il caso $z_0 \geq 0$ è già stato analizzato in (ii). Vediamo gli altri casi:

- i punti della forma $(0, 0, z_0)$ con $z_0 < -4$ non sono né di massimo né di minimo locale: $f(t, 0, z_0) = t^2 > 0$ e il punto $(t, 0, z_0)$, per t piccolo, è arbitrariamente vicino a $(0, 0, z_0)$; $f(2t, t, z_0) = (4 + z_0)t^2 < 0$ e il punto $(2t, t, z_0)$, per t piccolo, è arbitrariamente vicino a $(0, 0, z_0)$.
- il punto $(0, 0, -4)$ non è né di massimo né di minimo locale: $f(t, 0, -4) = t^2 > 0$ e il punto $(t, 0, -4)$, per t piccolo, è arbitrariamente vicino a $(0, 0, -4)$; $f(2t, t, -4 - t) = -t^3 < 0$ per $t > 0$ e il punto $(2t, t, -4 - t)$, per t piccolo, è arbitrariamente vicino a $(0, 0, -4)$.
- i punti della forma $(0, 0, z_0)$ con $-4 < z_0 < 0$ sono minimi locali. Consideriamo l'intorno $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times]-4, 0[$ di $(0, 0, z_0)$. Mostriamo che in tale intorno la funzione è maggiore o uguale di zero. Per comodità, indichiamo con $k = -z$, in modo tale che $k \in]0, 4[$. Vogliamo dimostrare che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, per ogni $k \in]0, 4[$ vale

$$x^2 - xyk + y^2k = x^2 + ky(y - x) \geq 0.$$

Osserviamo innanzitutto che se $y(y - x) \geq 0$ oppure se $x = 0$, allora la stima è ovvia. Supponiamo quindi, senza perdita di generalità, che x e y siano entrambi strettamente positivi e che $y < x$. In altre parole, consideriamo (x, y) della forma

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad \rho \in \mathbb{R}^+, \quad \theta \in]0, \pi/4[.$$

La stima che stiamo cercando è equivalente a

$$(\cos \theta)^2 \geq k \sin \theta (\cos \theta - \sin \theta).$$

Osservando che per $\theta \in]0, \pi/4[$ vale $\cos \theta > \sin \theta$, possiamo dividere ambo i membri della disequazione precedente per $\cos \theta - \sin \theta$, senza cambiarne il verso:

$$\psi(\theta) := \frac{(\cos \theta)^2}{\sin \theta (\cos \theta - \sin \theta)} \geq k.$$

Lo studio (conto di Analisi 1) della funzione ψ mostra che nell'intervallo $]0, \pi/4[$ tale funzione assume minimo pari a 4. Deduciamo quindi che la stima cercata è vera:

$$\psi(\theta) \geq \min_{[0, \pi/4]} \psi = 4 > k.$$

Esercizio 3 (10 punti). *Si consideri il problema di Cauchy per tempi positivi*

$$\begin{cases} u'(t) = \ln(u(t) + t^2), \\ u(0) = u_0 > 0. \end{cases}$$

- (i) *Si discutano, al variare di $u_0 > 0$, esistenza e unicità di soluzioni massimali $u \in C^1([0, T])$;*
- (ii) *si dimostri che esistono soluzioni che divergono a $+\infty$, e che tali soluzioni sono tutte globali;*
- (iii) *si dimostri che ogni soluzione non globale deve essere necessariamente limitata;*
- (iv) *si dimostri che esistono soluzioni non globali.*

Definito $\Omega = \{(t, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} : y > -t^2\}$, e posta $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ come $F(t, y) = \ln(y + t^2)$, il problema di Cauchy è del tipo $u'(t) = F(t, u(t))$ e la funzione F è regolare, quindi sappiamo che c'è esistenza ed unicità di soluzioni massimali per ogni dato iniziale $u_0 > 0$ (visto che, per tali u_0 , si ha che $(0, u_0)$ appartiene ad Ω).

Definiamo ora, più in generale, $\Omega_a = \{(t, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} : y > -t^2 + a\}$; in particolare, F è positiva su Ω_1 . Sia allora (t_0, y_0) un qualunque punto in Ω_a , e si consideri il problema di Cauchy in avanti con dato iniziale y_0 al tempo t_0 : esiste una unica soluzione massimale, e tale soluzione è necessariamente sempre crescente. Infatti, visto che $(t_0, y_0) \in \Omega_1$, la soluzione è strettamente crescente per tempi vicini a t_0 ; se non fosse sempre crescente, esisterebbe un primo istante \bar{t} in cui $u'(\bar{t}) = 0$: ma questo è impossibile, perché si avrebbe

$$u(\bar{t}) > u(t_0) = y_0 > -t_0^2 + 1 > -\bar{t}^2 + 1,$$

contro al fatto che deve essere $u(\bar{t}) = -\bar{t}^2 + 1$ essendo $u'(\bar{t}) = 0$. Abbiamo quindi verificato che tutte le soluzioni che ad un certo istante si trovano in Ω_1 devono essere sempre crescenti. Possiamo escludere subito che una tale soluzione sia limitata dall'alto: se lo fosse, la formula assicura che la derivata dovrebbe esplodere all'infinito, il che è incompatibile con il restare limitata. Qualunque soluzione si trovi in Ω_1 , quindi, resta sempre crescente e diverge a $+\infty$; qualunque soluzione esploda all'infinito, d'altra parte, ovviamente deve prima o poi trovarsi in Ω_1 . Appurato che tali soluzioni esistono, ad esempio tutte quelle con dato iniziale $u_0 > 1$, dobbiamo ora far vedere che tali soluzioni siano globali. E questo è immediato, ad esempio per confronto con le soluzioni del problema $v' = v$.

Consideriamo adesso una soluzione non globale $u : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$. Intanto osserviamo che tale soluzione deve essere sempre decrescente, dove è definita: per diventare crescente, infatti, dovrebbe trovarsi in Ω_1 , e allora sarebbe una soluzione globale divergente come appena visto. Essendo sempre decrescente, è chiaro che u sia limitata dall'alto. Per essere definita, d'altra parte, deve essere $(t, u(t)) \in \Omega$ per ogni $t < T$, e quindi per ogni $t \in (0, T)$ si deve avere

$$u(t) > -t^2 > -T^2,$$

e quindi anche la limitatezza dal basso segue.

Infine, dimostriamo che effettivamente esistono soluzioni non globali: consideriamo un dato iniziale $0 < u_0 < e^{-10}$; chiamato per brevità $D = \Omega \setminus \overline{\Omega_{e^{-10}}}$, si ha quindi $(0, u_0) \in D$. Per definizione, $u'(t) < -10$ finché $(t, u(t)) \in D$, e quindi il grafico di una soluzione che si trova in D può uscire da D solo dove la derivata di $-t^2$ è minore di -10 , ossia per $t > 5$. In altre parole, con un dato iniziale $0 < u_0 < e^{-10}$, o la soluzione smette di esistere prima del tempo $t = 5$, e quindi non è globale, oppure fino a tale tempo il suo grafico rimane in D , e quindi la sua derivata è minore di -10 . Questo però darebbe $u(5) < u_0 - 50 < -49$, il che è impossibile perché allora $(5, u(5)) \notin \Omega$. Abbiamo cioè mostrato che tutte le soluzioni con dato iniziale positivo ma minore di e^{-10} sono non globali, e in particolare il loro tempo di esistenza è minore di 5.