

Prova scritta per il corso di Analisi Matematica 2
corso di laurea in Matematica
Università di Pisa
20/02/2026

Tempo a disposizione: 120 minuti

Esercizio 1 (10 punti). *Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da*

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + e^y}.$$

- (i) *Dimostrare che f non ammette minimo globale;*
- (ii) *dimostrare che f ammette massimo globale;*
- (iii) *dimostrare che per ogni punto $(\bar{x}, \bar{y})$ di massimo globale si ha $\bar{x} > 0$;*
- (iv) *dimostrare che vi è un unico punto $(\bar{x}, \bar{y})$ di massimo globale, e per tale punto si ha $\bar{y} > 0$.*

Si osserva subito che $f(0, -t) = -te^t$, quindi $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0, -t) = -\infty$: questo assicura che f non ammette minimo globale.

D'altra parte, si consideri la zona in cui f è positiva, ossia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y \geq 0\}$. Si può mostrare che

$$\lim_{|(x,y)| \rightarrow +\infty, (x,y) \in A} f(x, y) = 0.$$

Infatti, dove $x \geq |y|$ si ha $x \geq |(x, y)|/2$ e quindi

$$f(x, y) \leq \frac{2x}{x^2} \leq \frac{4}{|(x, y)|},$$

e quest'ultima quantità ovviamente tende a 0 se $|(x, y)| \rightarrow +\infty$. Invece, dove $y \geq |x|$ si ha $y \geq |(x, y)|/2$ e quindi, purché $y \geq 1$,

$$f(x, y) \leq \frac{2y}{e^y} \leq |(x, y)| e^{-\frac{|(x,y)|}{2}},$$

ed anche questa quantità tende a 0 se $|(x, y)| \rightarrow +\infty$. Si è dunque dimostrato che f tende a 0 all'infinito nella zona in cui è positiva. Visto che esistono punti in cui f è strettamente positiva, si deduce che f ammette un massimo globale.

Visto che f è regolare, ogni punto di massimo globale è un punto critico, e quindi risolve il sistema

$$\begin{cases} x^2 + e^y = (x + y)2x, \\ x^2 + e^y = (x + y)e^y. \end{cases}$$

Visto che per un massimo globale di certo $f > 0$, e quindi $x + y > 0$, deduciamo che per ogni punto $(\bar{x}, \bar{y})$ di massimo globale deve essere $e^{\bar{y}} = 2\bar{x}$, e quindi in particolare $\bar{x} > 0$.

Sostituendo la proprietà $e^y = 2x$ nel sistema, si ottiene l'equazione

$$x^2 + 2x = (x + \ln(2x))2x,$$

che visto che ogni massimo globale verifica $x > 0$ si riduce a

$$2 - 2\ln(2x) = x,$$

equazione che deve essere verificata da $\bar{x}$ per ogni punto di massimo globale $(\bar{x}, \bar{y})$. Osserviamo che la funzione $2 - 2\ln(2x)$ è decrescente, mentre x è crescente: l'equazione ha quindi un'unica soluzione $\bar{x}$, e visto che necessariamente $\bar{y} = \ln(2\bar{x})$ si ha che c'è un unico punto di massimo globale. Inoltre, poiché per $x = 1/2$ si ha $2 - 2\ln(2x) = 2 > x$, si deduce $\bar{x} > 1/2$, e quindi $\bar{y} > 0$.

Esercizio 2 (10 punti). *Si consideri la forma differenziale*

$$\omega = (x^2 + 2xy + 2y^2 - 1) \left((x + y)dx + (x + 2y)dy \right).$$

Rispondere alle seguenti domande:

- (i) *dire se la forma differenziale ω è esatta;*
- (ii) *trovare il potenziale f di ω tale che $f(0, 0) = -1$;*
- (iii) *dimostrare che l'insieme dei punti critici di f è formato da una curva e da un punto isolato;*
- (iv) *caratterizzare la natura dei punti critici di f .*

(i) La forma differenziale è chiusa in $\mathbb{R}^2$, quindi esatta: infatti, posto

$$g(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 1,$$

si ha

$$d\omega = \left[-\frac{\partial}{\partial y}(g(x, y)(x + y)) + \frac{\partial}{\partial x}(g(x, y)(x + 2y)) \right] dx \wedge dy = 0.$$

(ii) Il potenziale cercato è

$$f(x, y) = \frac{(g(x, y))^2 - 5}{4}.$$

(iii) I punti critici di f annullano il gradiente

$$\nabla f(x, y) = g(x, y) ((x + y), (x + 2y))$$

e sono quindi i punti di $\Sigma = \{g = 0\}$ e il punto $(0, 0)$. L'insieme Σ è un'ellisse (in alternativa, si può usare il teorema del Dini per dimostrare che si tratta di una curva localmente C^1) e il punto $(0, 0)$ è un punto isolato perché non appartiene al chiuso Σ . (iv) La matrice Hessiana di f in $(0, 0)$ è definita negativa, quindi l'origine è un punto di massimo relativo (non si tratta di un massimo assoluto perché $\sup f = +\infty$); i punti di Σ sono invece punti di minimo assoluti perché in $\mathbb{R}^2$ vale

$$f = \frac{g^2}{4} - \frac{5}{4} \geq -\frac{5}{4}$$

e in Σ vale l'uguaglianza.

Esercizio 3 (10 punti). *Si consideri il problema di Cauchy per tempi positivi*

$$\begin{cases} u'(t) = u^2(t) - t, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

- (i) *Si discutano, al variare di u_0 , esistenza e unicità di soluzioni massimali $u \in C^1([0, T])$;*
- (ii) *si dimostri che esistono soluzioni che divergono a $+\infty$ in tempo finito;*
- (iii) *si dimostri che ogni soluzione esplode o a $+\infty$ o a $-\infty$ per $t \rightarrow T$;*
- (iv) *si dimostri che ogni soluzione che tende a $-\infty$ è globale;*

(v) si dimostri che esistono soluzioni globali che tendono a $+\infty$;

(*) si dimostri che se u è una soluzione che tende a $-\infty$, allora $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) + \sqrt{t} = 0$.

Il problema è del tipo $u'(t) = F(t, u(t))$ con $F(t, y) = y^2 - t$; essendo F una funzione C^1 sappiamo che per ogni dato iniziale esiste un'unica soluzione massimale.

Sappiamo che le soluzioni del problema $v'(t) = v(t)^2 - 1$ con $v_0 > 1$ esplodono tutte in tempo finito. Essendo tale problema autonomo, esiste $\bar{v}_0$ abbastanza grande per il quale la corrispondente soluzione $\bar{v}$ esplode per un qualche tempo $T < 1$. Consideriamo allora il nostro problema con un qualsiasi dato iniziale $u_0 > \bar{v}_0$: la soluzione u parte sopra alla $\bar{v}$, e quindi o esplode prima del tempo T oppure deve esistere un primo istante positivo $t < T$ nel quale $u = \bar{v}$. Questo tuttavia è impossibile, perché dovrebbe essere $u'(t) \leq \bar{v}'(t)$, ma $u'(t) = u^2(t) - t > u^2(t) - 1 = \bar{v}^2(t) - 1 = \bar{v}'(t)$. Abbiamo quindi mostrato che tale u diverge a $+\infty$ in tempo finito.

Si consideri adesso una qualunque soluzione del problema che per un qualche $t > 0$ si trovi nella zona in cui $u' < 0$, ossia nella zona $A = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2, y^2 < t\}$. Finché il grafico di u si trova dentro A , la u è decrescente; tuttavia, il grafico non può uscire da A , perché dovrebbe farlo in un punto del tipo $(t, -\sqrt{t})$ con derivata minore di $-(2\sqrt{t})^{-1} < 0$, ma in tale punto la derivata sarebbe 0. Di conseguenza, tutte le soluzioni che entrano dentro A vi rimangono intrappolate, e in particolare sono soluzioni globali. Sia u una tale soluzione: visto che definitivamente è decrescente, esiste il limite di u per $t \rightarrow +\infty$: se tale limite fosse finito, si avrebbe che il limite di $u'(t)$ esisterebbe e sarebbe $-\infty$; visto che questo è incompatibile col fatto che u abbia un limite finito, si deduce che tutte le funzioni che ad un certo punto si trovano dentro A sono globali e tendono a $-\infty$.

Consideriamo ora una qualsiasi soluzione: se parte con un dato $u_0 \leq 0$, deve necessariamente trovarsi ad un certo punto dentro A , perché finché non entra dentro A è crescente ma negativa, e quindi prima del tempo $t = \sqrt{-u_0} + 1$ deve trovarsi in A . Se invece parte con un dato $u_0 > 0$, potrebbe entrare dentro A oppure non farlo mai: se però non lo fa mai deve essere sempre maggiore di $\sqrt{t}$, e quindi deve esplodere all'infinito (in un tempo finito o infinito). Di conseguenza, tutte le soluzioni esplodono a $+\infty$ (in tempo finito o infinito) oppure finiscono dentro A e quindi esplodono a $-\infty$ (necessariamente in tempo infinito).

Con gli usuali argomenti di confronto si scopre che l'insieme dei valori di u_0 per i quali una soluzione entra in A sono un intervallo aperto del tipo $(-\infty, \alpha)$, e l'insieme dei valori per quali una soluzione esplode in tempo finito sono un intervallo aperto del tipo $(\beta, +\infty)$, necessariamente con $\beta \geq \alpha$. Per qualunque valore di $u_0 \in [\alpha, \beta]$, allora, la soluzione non esplode in tempo finito ma non entra in A (e quindi tende a $+\infty$). Deve quindi trattarsi di una soluzione globale che tende a $+\infty$.

Sia infine u una soluzione che tende a $-\infty$, e definiamo $v = u + \sqrt{t}$, che è positiva per tutti i tempi abbastanza grandi (in particolare, quelli per i quali il grafico di u si trova in A). Usando l'equazione, si trova allora che

$$v'(t) = (u(t) - \sqrt{t})v(t) + \frac{1}{2\sqrt{t}} < -1000v(t) + \frac{1}{2\sqrt{t}},$$

dove l'ultima disuguaglianza è vera per tempi abbastanza grandi (perché v è positiva e tende a $-\infty$). Questo tuttavia assicura che $v(t) \rightarrow 0$, che è la nostra tesi: infatti, per ogni $\varepsilon > 0$, se v diventa minore di ε per tempi abbastanza grandi, allora non potrà mai tornare superiore ad ε ; se invece v fosse maggiore di ε per tutti i tempi abbastanza grandi, allora si avrebbe $\limsup_{t \rightarrow +\infty} v'(t) \leq -1000\varepsilon$. Questo implicherebbe che v è definitivamente decrescente, quindi ammetterebbe un limite all'infinito; ma tale limite sarebbe necessariamente maggiore o uguale a ε , e questo direbbe che il limsup della derivata sarebbe strettamente negativo, il che è impossibile in presenza di un asintoto orizzontale. In altre parole, $\limsup_{t \rightarrow +\infty} v(t) \leq \varepsilon$ per qualsiasi $\varepsilon > 0$, ed essendo v definitivamente positiva si deduce che v tende a 0.