Prova scritta per il corso di Analisi Matematica 2
corso di laurea in Matematica
Università di Pisa
4/7/2025

Esercizio 1 (8 punti)**.** *Per un qualunque $n \in \mathbb{N}$, si definisca*

$$X_n = \Big\{ f : [0,3] \to \mathbb{R},\ f \text{ è un polinomio di grado } n \Big\} .$$

Si definiscano poi d, $\tilde{d} : X_n \times X_n \to \mathbb{R}^+$ come

$$d(f,g) = \sup \Big\{ |f(t) - g(t)|,\ t \in (0,3) \Big\} ,$$
$$\tilde{d}(f,g) = |f(0) - g(0)| + |f(1) - g(1)| + |f(2) - g(2)| + |f(3) - g(3)| .$$

(i) Si dimostri che d è una distanza su X_n;
(ii) si dica per quali n la $\tilde{d}$ è una distanza su X_n;
(iii) si dica se X_n è uno spazio metrico completo con la distanza d e, per gli n del punto (ii), con la distanza $\tilde{d}$;
(iv) per gli n del punto (ii), si dica se d e $\tilde{d}$ sono equivalenti.

Esercizio 2 (8 punti)**.** *Si definisca $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ come*

$$f(x,y,z) = x^2 + 4yz - e^{x^2+y^2+z^2} .$$

(i) Si dica se f ammette massimo e/o minimo globale;
(ii) si dimostri che f ammette un numero finito di punti critici;
(iii) si descrivano i punti critici di f e si studi la loro natura.

La funzione f, definita su tutto $\mathbb{R}^3$, è chiaramente continua e differenziabile su tutto il suo dominio. Notiamo subito che, detto $P = (x,y,z)$ il generico punto di $\mathbb{R}^3$, si ha

$$f(P) = f(x,y,z) \leq |P|^2 + 4|P|^2 - e^{|P|^2} ,$$

e quindi

$$\lim_{|P|\to+\infty} f(P) \leq \lim_{|P|\to+\infty} 5|P|^2 - e^{|P|^2} = -\infty .$$

Questo assicura subito che f non ammette minimo globale, e che ammette invece un massimo globale (grazie alla sua continuità).

Osserviamo ora che

$$\nabla f(x,y,z) = \Big(2x\big(1 - e^{x^2+y^2+z^2}\big), 4z - 2ye^{x^2+y^2+z^2}, 4y - 2ze^{x^2+y^2+z^2} \Big) .$$

E' immediato notare che l'origine sia un punto critico; cerchiamo dunque i punti critici diversi dall'origine. Se un punto è diverso dall'origine, allora si ha che $e^{x^2+y^2+z^2} > 1$, e quindi $\partial f / \partial x$ si annulla se e solo se $x = 0$.

Se un punto critico è diverso dall'origine, allora, visto che $x = 0$ deve essere $y \neq 0$ oppure $z \neq 0$; ma se una tra y e z si annulla, si deve annullare anche l'altra (visto che l'esponenziale non può annullarsi). Si deve cioè avere $y \neq 0$ e $z \neq 0$. L'annullarsi della seconda e della terza componente del gradiente di f assicura quindi

$$2\,\frac{z}{y} = e^{x^2+y^2+z^2}\,, \qquad\qquad 2\,\frac{y}{z} = e^{x^2+y^2+z^2}\,.$$

Questo assicura che $z/y = y/z$, ossia che $y = \pm z$; visto poi che il rapporto tra y e z è un'esponenziale, e dunque positivo, si deduce $y = z$.

Tutti i punti critici sono quindi del tipo $(0, t, t)$ con un qualche $t \in \mathbb{R}$; e inoltre, t deve essere un punto critico della funzione

$$g(t) = f(0, t, t) = 4t^2 - e^{2t^2}\,.$$

Si ha che

$$g'(t) = 8t - 4te^{2t^2} = 4t\big(2 - e^{2t^2}\big)\,,$$

e quindi $g'(t) = 0$ se e solo se $t = 0$, oppure $t = \pm\bar{t}$ con

$$\bar{t} = \sqrt{\frac{\ln 2}{2}}\,.$$

Si è quindi trovato che i punti critici di f sono 3, ossia l'origine, $(0, \bar{t}, \bar{t})$ e $(0, -\bar{t}, -\bar{t})$. E' facile notare che l'origine sia un punto di sella: si può ad esempio notare che per ogni $\varepsilon \ll 1$ si ha $f(0, \varepsilon, 0) < -1$ e $f(0, \varepsilon, \varepsilon) > -1$, oppure si può calcolare l'Hessiano di f rispetto alle sole variabili y e z nell'origine, trovando

$$H_{yz} f(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\,,$$

e quest'ultima matrice ha un autovalore positivo ed uno negativo.

Avendo già osservato che f deve ammettere dei massimi globali, e visto che $f(x, y, z) = f(x, -y, -z)$, si deduce che gli altri due punti critici trovati prima sono i due punti di massimo globale.

Esercizio 3 (8 punti). *Si consideri il problema di Cauchy per tempi positivi*

$$\begin{cases} u'(t) = \ln\left(u^2(t) + t^2 + \dfrac{1}{3}\right)\,, \\ u(0) = u_0\,. \end{cases}$$

(i) Si discutano, al variare di $u_0 \in \mathbb{R}$, esistenza e unicità di soluzioni massimali $u \in \mathrm{C}^1([0, T))$;

(ii) si dica se esistono soluzioni massimali che non sono globali, oppure soluzioni globali che esplodono a $+\infty$ o a $-\infty$, oppure soluzioni globali che ammettono un limite finito, oppure soluzioni globali che non rientrano nelle suddette categorie;

(iii) si dimostri che se $u'(t) > 0$ per qualche soluzione u per un tempo t per il quale $u(t) > 0$, allora si ha $u'(\tau) > 0$ per tutti i tempi $\tau > t$.

Dal momento che la funzione $F(t, y) = \ln\big(y^2 + t^2 + 1/3\big)$ è regolare, in particolare continua in entrambe le variabili e Lipschitziana nella seconda, per qualunque $u_0 \in \mathbb{R}$ si ha esistenza e unicità di una soluzione massimale.

Sia u una qualunque soluzione massimale: si ha sicuramente $u'(t) \geq \ln(1/3)$, e quindi la pendenza di u è limitata dal basso; di conseguenza, la u non può esplodere a $-\infty$ in un tempo finito. Inoltre, $u'(t) \geq 0$ per ogni $t \geq \sqrt{2/3}$, e quindi ogni soluzione u è crescente per tempi successivi a $\sqrt{2/3}$ (se ancora esiste). Di conseguenza, tutte le soluzioni massimali sono crescenti da un certo momento in poi, e quindi ammettono un limite. Si noti che se $u(t) \to L$ per $t \to \infty$ per un qualche $L \in \mathbb{R}$, allora si deduce $u'(t) \to +\infty$ per $t \to +\infty$, e questo rende impossibile il fatto di avere un asintoto orizzontale. Perciò, qualunque soluzione massimale deve esplodere all'infinito per $t \to \infty$; le soluzioni non massimali, invece, come già osservato devono tendere a $+\infty$ in un tempo finito. Per adesso abbiamo quindi notato che tutte le soluzioni, globali o non globali, devono esplodere a $+\infty$.

Notiamo ora che le soluzioni sono effettivamente globali. Per fare questo, consideriamo la funzione $v(t) = \big(|u(0)| + 20\big)e^t$: è chiaro che $v(0) > u_0 = u(0)$, e vogliamo dimostrare che rimanga $v(t) > u(t)$ per ogni $t > 0$. Una conseguenza di questo fatto sarà ovviamente che la soluzione u è globale. Supponiamo che non sia così, e sia $\sigma > 0$ il più piccolo tempo tale che $u(\sigma) = v(\sigma)$; chiamiamo per brevità $K = u(\sigma) = v(\sigma)$. Notiamo intanto che $K \geq e^\sigma$, ossia che $\sigma \leq \ln K \leq K$; inoltre, per definizione $K \geq 20$. Visto che $u \leq v$ su $[0, \sigma]$ mentre $u(\sigma) = v(\sigma)$, deduciamo che $u'(\sigma) \geq v'(\sigma)$, e quindi

$$K = v'(\sigma) \leq u'(\sigma) = \ln\left(u^2(\sigma) + \sigma^2 + \frac{1}{3}\right) \leq \ln\left(2K^2 + \frac{1}{3}\right) \leq \ln(3K^2)\,.$$

Si ha cioè che

$$K \leq \ln(3K^2)\,;$$

tuttavia, si può notare che questa disuguaglianza è impossibile per $K \geq 20$: infatti, si ha che

$$e^K \geq 1 + K + \frac{K^2}{2} + \frac{K^3}{6} > \frac{K^3}{6} > 3K^2\,,$$

dove l'ultima disuguaglianza è vera poiché $K > 18$. Facendo il logaritmo di entrambi i membri (è possibile farlo perché il logaritmo è una funzione crescente) si deduce $K > \ln(3K^2)$, e questo è in contraddizione con la disuguaglianza di sopra. Ricapitolando, è impossibile che la u e la v si incontrino, e quindi abbiamo concluso che tutte le soluzioni sono globali ed esplodono a $+\infty$.

Per concludere, si supponga che per una qualche soluzione u e per un qualche tempo $t \geq 0$ si abbia $u(t) > 0$ e $u'(t) > 0$. Si può allora calcolare la derivata seconda di u in t, ottenendo

$$u''(t) = \frac{2u(t)u'(t) + 2t}{u^2(t) + t^2 + \frac{1}{3}} > 0\,,$$

dove l'ultima disuguaglianza vale proprio grazie al fatto che $u(t) > 0$ e $u'(t) > 0$. Si ha cioè che la u ammette derivata seconda positiva in tutti i punti in cui u e u' sono positive; ma allora finché u ed u' sono positive si ha che u' aumenta, e quindi resta positivo. Si è quindi ottenuto che deve essere $u' > 0$ per tutti i tempi successivi a t.

Esercizio 4 (8 punti)**.** *Si calcoli il perimetro dell'insieme*

$$\Omega = \Big\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4,\ 0 \leq x \leq 1\,,\ 0 \leq y \leq 1\,,\ \sqrt{z^2 + w^2} \leq x + y\Big\}\,.$$

Innanzitutto si può notare che

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \,,$$

essendo

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \Big\{ x = 0 \,,\ 0 \le y \le 1 \,,\ \sqrt{z^2 + w^2} \le y \Big\} \,, \\
\Gamma_2 &= \Big\{ y = 0 \,,\ 0 \le x \le 1 \,,\ \sqrt{z^2 + w^2} \le x \Big\} \,, \\
\Gamma_3 &= \Big\{ x = 1 \,,\ 0 \le y \le 1 \,,\ \sqrt{z^2 + w^2} \le 1 + y \Big\} \,, \\
\Gamma_4 &= \Big\{ y = 1 \,,\ 0 \le x \le 1 \,,\ \sqrt{z^2 + w^2} \le x + 1 \Big\} \,, \\
\Gamma_5 &= \Big\{ 0 \le x \le 1 \,,\ 0 \le y \le 1 \,,\ \sqrt{z^2 + w^2} = x + y \Big\} \,.
\end{aligned}$$

Infatti, visto che le funzioni x, y, $x+y$ e $\sqrt{z^2+w^2}$ sono continue, è chiaro che $\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^5 \Gamma_i$; d'altra parte, è immediato far vedere che abitrariamente vicino ad ogni punto di $\bigcup_{i=1}^5 \Gamma_i$ si può trovare un punto di Ω. Notiamo anche che, detto V il volume tri-dimensionale di oggetti in $\mathbb{R}^4$, si ha $V(\Gamma_i \cap \Gamma_j) = 0$ per ogni $i \neq j$; di conseguenza, il perimetro di Ω si può trovare come

$$P(\Omega) = \sum_{i=1}^{5} V(\Gamma_i) \,.$$

Andiamo ora a calcolare i diversi $V(\Gamma_i)$. Cominciamo col notare che Γ_1 è un insieme contenuto nello spazio tri-dimensionale $\{x = 0\}$, ed in particolare è un cono con cerchio di base di raggio 1 ed altezza 1. Invece, Γ_3 è un insieme contenuto nello spazio tri-dimensionale $\{x = 1\}$, ed è un tronco di cono di altezza 1 e basi fatte da un cerchio di raggio 1 ed un cerchio di raggio 2. Di conseguenza, traslando Γ_3 in modo che la sua base piccola coincida con la base di Γ_1, l'unione dei due è un cono di altezza 2 e cerchio di base di raggio 2. Visto che la traslazione non altera i volumi, si ha

$$V(\Gamma_1) + V(\Gamma_3) = \frac{8}{3}\,\pi \,.$$

In maniera del tutto analoga, scambiando la x con la y, si trova

$$V(\Gamma_2) + V(\Gamma_4) = \frac{8}{3}\,\pi \,.$$

Consideriamo adesso Γ_5; è immediato osservare come $\Gamma_5 = \Phi(A)$, dove

$$A = \Big\{ (a, b, \theta) \in \mathbb{R}^3,\ 0 \le a \le 1,\ 0 \le b \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi \Big\}$$

e $\Phi : A \to \mathbb{R}^4$ è la funzione (regolare e iniettiva) data da

$$\Phi(a, b, \theta) = \Big(a,\ b,\ (a+b)\cos\theta,\ (a+b)\,\mathrm{sen}\,\theta \Big) \,.$$

Sappiamo quindi che

$$V(\Gamma_5) = \int_A J(a, b, \theta)\, da\, db\, d\theta \,,$$

dove $J(a,b,\theta)$ è dato dal modulo del determinante della restrizione di $D\Phi(a,b,\theta)$ allo spazio generato da $D_a\Phi$, $D_b\Phi$, $D_\theta\Phi$. Un semplice conto assicura che

$$D\Phi(a,b,\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & \cos\theta & -(a+b)\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \mathrm{sen}\,\theta & (a+b)\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Per calcolare il valore esatto di $J(a,b,\theta)$, iniziamo osservando che tale valore non dipende da θ, visto che per qualsiasi valore di θ_1 e θ_2 le matrici $D\Phi(a,b,\theta_1)$ e $D\Phi(a,b,\theta_2)$ coincidono a meno di una rotazione. Si ha allora $J(a,b,\theta) = J(a,b,0)$, e dal conto generale di sopra si ha in particolare

$$D\Phi(a,b,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (a+b) \end{pmatrix}.$$

Si noti che lo spazio generato da $D_a\Phi$ e $D_b\Phi$ è ortogonale al vettore $D_\theta\Phi$, che è lungo $a+b$. Di conseguenza, a parte il fattore moltiplicativo $a+b$, $J(a,b,0)$ non è altro che il determinante della restrizione di $D\widetilde{\Phi}(a,b)$ allo spazio generato da $D_a\widetilde{\Phi}$ e $D_b\widetilde{\Phi}$, dove

$$\widetilde{\Phi}(a,b) = (a,b,a+b)\,.$$

Essendoci ridotti ad una funzione da $\mathbb{R}^2$ ad $\mathbb{R}^3$, sappiamo che quest'ultimo determinante non è altro che $\left|\partial\widetilde{\Phi}/\partial a \wedge \partial\widetilde{\Phi}/\partial b\right|$, che si vede subito essere $\sqrt{3}$. Si è quindi trovato che $J(a,b,\theta) = \sqrt{3}(a+b)$. In conclusione,

$$V(\Gamma_5) = \int_A \sqrt{3}(a+b)\,da\,db\,d\theta = 2\sqrt{3}\pi \int_{a=0}^1 \int_{b=0}^1 a+b\,db\,da = 2\sqrt{3}\pi\,.$$

In conclusione,

$$P(\Omega) = \left(\frac{16}{3} + 2\sqrt{3}\right)\pi\,.$$