

Primo compitino per il corso di Analisi Matematica 2  
corso di laurea in Matematica  
Università di Pisa  
22/11/2024

*Tempo a disposizione: 120 minuti.*

**Esercizio 1** (12 punti). Sia  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq x^2 + x\}$ , e sia  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$f(x, y) = \frac{y^2 + 3y + x + 4 + \operatorname{sen}(x^2 - y + x)}{2 + x^2}.$$

- (i) Discutere la limitatezza di  $f$  dall'alto e dal basso;
- (ii) dire se  $f$  ammette massimi e/o minimi globali;
- (iii) dire quanti sono i massimi ed i minimi locali o globali di  $f$ , e se possibile trovarli.

**Esercizio 2** (12 punti). Si definisca  $\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + 3x + y^2 + yz + z^2 = 1\}$ .

- (i) Dimostrare che  $\mathcal{E}$  è localmente grafico di una funzione di classe  $C^1$  da  $\mathbb{R}^2$  ad  $\mathbb{R}$ ;
- (ii) discutere la compattezza di  $\mathcal{E}$ ;
- (iii) dire se esistono punti di  $\mathcal{E}$  di minima e massima norma e, in caso affermativo, determinarli.

**Esercizio 3** (12 punti). Si definisca  $A$  lo spazio di tutte le successioni reali (e quindi un elemento  $x \in A$  è una successione  $x = (x_1, x_2, \dots)$  di numeri reali). Si definisca  $d : A \times A \rightarrow \mathbb{R}^+$  la funzione data da

$$d(x, y) = \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n| \right) \wedge 1.$$

Infine, si definisca  $X$  il sottospazio di  $A$  formato da tutte le successioni che sono convergenti.

- (i) Si dimostri che  $d$  è una distanza su  $A$  (e quindi d'ora in poi si consideri  $A$  come uno spazio metrico con tale distanza);
- (ii) si dimostri che se  $x = (x_1, x_2, \dots)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots)$  sono due elementi di  $X$ , e  $x_n \rightarrow \ell$ ,  $y_n \rightarrow \ell'$  con  $\ell \neq \ell'$ , allora  $d(x, y) = 1$ ;
- (iii) si dimostri che  $X$  è un sottoinsieme chiuso di  $A$ ;
- (iv) si dica se  $X$  è compatto e/o completo.