

Prova scritta per il corso di Analisi Matematica 2
corso di laurea in Matematica
Università di Pisa
21/01/2026

Tempo a disposizione: 120 minuti

Esercizio 1 (10 punti). Si definisca l'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \cosh(\sqrt{x^2 + y^2}) \right\}.$$

- (i) Si calcoli il volume di Ω .
- (ii) Si calcoli il perimetro di Ω .

Esercizio 2 (10 punti). Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y, z) = x^2 + xyz - y^2 z.$$

- (i) Si discuta l'esistenza di massimi/minimi globali di f su $\mathbb{R}^3$;
- (ii) si discuta l'esistenza di massimi/minimi globali e locali di f nell'insieme

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z \geq 0\};$$

- (iii) si trovino tutti i punti di massimo/minimo globale e locale di f nell'insieme

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2\};$$

- (iv*) si discuta l'esistenza di massimi/minimi locali di f su $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3 (10 punti). Si consideri il problema di Cauchy per tempi positivi

$$\begin{cases} u'(t) = \ln(u(t) + t^2), \\ u(0) = u_0 > 0. \end{cases}$$

- (i) Si discutano, al variare di $u_0 > 0$, esistenza e unicità di soluzioni massimali $u \in C^1([0, T))$;
- (ii) si dimostri che esistono soluzioni che divergono a $+\infty$, e che tali soluzioni sono tutte globali;
- (iii) si dimostri che ogni soluzione non globale deve essere necessariamente limitata;
- (iv) si dimostri che esistono soluzioni non globali.