

Prova scritta per il corso di Analisi Matematica 2
corso di laurea in Matematica
Università di Pisa
20/02/2026

Tempo a disposizione: 120 minuti

Esercizio 1 (10 punti). Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + e^y}.$$

- (i) Dimostrare che f non ammette minimo globale;
- (ii) dimostrare che f ammette massimo globale;
- (iii) dimostrare che per ogni punto $(\bar{x}, \bar{y})$ di massimo globale si ha $\bar{x} > 0$;
- (iv) dimostrare che vi è un unico punto $(\bar{x}, \bar{y})$ di massimo globale, e per tale punto si ha $\bar{y} > 0$.

Esercizio 2 (10 punti). Si consideri la forma differenziale

$$\omega = (x^2 + 2xy + 2y^2 - 1) \left((x + y)dx + (x + 2y)dy \right).$$

Rispondere alle seguenti domande:

- (i) dire se la forma differenziale ω è esatta;
- (ii) trovare il potenziale f di ω tale che $f(0, 0) = -1$;
- (iii) dimostrare che l'insieme dei punti critici di f è formato da una curva e da un punto isolato;
- (iv) caratterizzare la natura dei punti critici di f .

Esercizio 3 (10 punti). Si consideri il problema di Cauchy per tempi positivi

$$\begin{cases} u'(t) = u^2(t) - t, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

- (i) Si discutano, al variare di u_0 , esistenza e unicità di soluzioni massimali $u \in C^1([0, T])$;
- (ii) si dimostri che esistono soluzioni che divergono a $+\infty$ in tempo finito;
- (iii) si dimostri che ogni soluzione esplode o a $+\infty$ o a $-\infty$ per $t \rightarrow T$;
- (iv) si dimostri che ogni soluzione che tende a $-\infty$ è globale;
- (v) si dimostri che esistono soluzioni globali che tendono a $+\infty$;
- (*) si dimostri che se u è una soluzione che tende a $-\infty$, allora $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) + \sqrt{t} = 0$.