

Prova scritta per il corso di Analisi Matematica 2
corso di laurea in Matematica
Università di Pisa
4/7/2025

Tempo a disposizione: 180 minuti.

Esercizio 1 (8 punti). Per un qualunque $n \in \mathbb{N}$, si definisca

$$X_n = \left\{ f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ è un polinomio di grado } n \right\}.$$

Si definiscano poi $d, \tilde{d} : X_n \times X_n \rightarrow \mathbb{R}^+$ come

$$d(f, g) = \sup \left\{ |f(t) - g(t)|, t \in (0, 3) \right\},$$

$$\tilde{d}(f, g) = |f(0) - g(0)| + |f(1) - g(1)| + |f(2) - g(2)| + |f(3) - g(3)|.$$

- (i) Si dimostri che d è una distanza su X_n ;
- (ii) si dica per quali n la $\tilde{d}$ è una distanza su X_n ;
- (iii) si dica se X_n è uno spazio metrico completo con la distanza d e, per gli n del punto (ii), con la distanza $\tilde{d}$;
- (iv) per gli n del punto (ii), si dica se d e $\tilde{d}$ sono equivalenti.

Esercizio 2 (8 punti). Si definisca $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$f(x, y, z) = x^2 + 4yz - e^{x^2+y^2+z^2}.$$

- (i) Si dica se f ammette massimo e/o minimo globale;
- (ii) si dimostri che f ammette un numero finito di punti critici;
- (iii) si descrivano i punti critici di f e si studi la loro natura.

Esercizio 3 (8 punti). Si consideri il problema di Cauchy per tempi positivi

$$\begin{cases} u'(t) = \ln \left(u^2(t) + t^2 + \frac{1}{3} \right), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

- (i) Si discutano, al variare di $u_0 \in \mathbb{R}$, esistenza e unicità di soluzioni massimali $u \in C^1([0, T))$;
- (ii) si dica se esistono soluzioni massimali che non sono globali, oppure soluzioni globali che esplodono a $+\infty$ o a $-\infty$, oppure soluzioni globali che ammettono un limite finito, oppure soluzioni globali che non rientrano nelle suddette categorie;
- (iii) si dimostri che se $u'(t) > 0$ per qualche soluzione u per un tempo t per il quale $u(t) > 0$, allora si ha $u'(\tau) > 0$ per tutti i tempi $\tau > t$.

Esercizio 4 (8 punti). Si calcoli il perimetro dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \sqrt{z^2 + w^2} \leq x + y \right\}.$$