Secondo compitino per il corso di Analisi Matematica 2 con soluzioni
corso di laurea in Matematica
Università di Pisa
27/5/2024

Esercizio 1 (12 punti)**.** *Dato $N \geq 2$, si consideri l'insieme*

$$A_N = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^{N-1} x_i^2 \leq x_N^{-1/2},\, x_N \geq 1 \right\}.$$

(i) Si dica per quali N l'insieme A_N ha volume finito.

(ii) Si calcoli il volume di A_N per gli N del punto precedente (come al solito, si indichi con ω_H il volume della palla unitaria in $\mathbb{R}^H$ per un qualunque $H \geq 1$).

(iii) Si dica per quali N l'insieme A_N ha perimetro finito.

(iv) Si calcoli, se esiste,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{P(A_N)}{\omega_{N-1}}\,.$$

L'insieme A_N ha sezioni "orizzontali", ossia relative alle prime $N-1$ coordinate, che sono vuote per $x_N < 1$, e palle $(N-1)$-dimensionali di raggio $x_N^{-1/4}$ per $x_N \geq 1$. Il volume di A_N, grazie al Teorema di Fubini, e grazie al fatto che il volume di una palla $(N-1)$-dimensionale di raggio r è $\omega_{N-1} r^{N-1}$, è allora semplicemente

$$\big|A_N\big| = \int_{t=1}^{+\infty} \omega_{N-1} t^{-\frac{N-1}{4}}\, dt\,;$$

tale integrale converge se e solo se l'esponente è strettamente minore di -1, ossia se $N \geq 6$. Si ha quindi che il volume di A_N è finito se e solo se $N \geq 6$. In questo caso, si può proseguire il conto ottenendo

$$\big|A_N\big| = \frac{\omega_{N-1}}{1-\frac{N-1}{4}} \left[t^{1-\frac{N-1}{4}} \right]_{t=1}^{+\infty} = \frac{4\omega_{N-1}}{N-5}\,.$$

Per quanto riguarda il perimetro, definiamo $B_{N-1} = \left\{ z \in \mathbb{R}^{N-1},\, |z| \leq 1 \right\}$ la palla unitaria in $\mathbb{R}^{N-1}$. Il bordo di A_N è composto di due parti: una parte "inferiore", che è l'insieme $B_{N-1}\times\{0\}$, e che ha quindi misura $(N-1)$-dimensionale pari a ω_{N-1}, ed una parte "laterale", che è il grafico della funzione $\varphi : B_{N-1} \to \mathbb{R}$ definita come $\varphi(z) = |z|^{-4}$. Abbiamo quindi che la misura della parte laterale è

$$P_{\rm lat} = \int_{B_{N-1}} \sqrt{1+|\nabla\varphi(z)|^2}\, dz = \int_{B_{N-1}} \sqrt{1+16|z|^{-10}}\, dz\,.$$

Visto che φ è una funzione radiale, è comodo valutare l'integrale utilizzando coordinate polari su $\mathbb{R}^{N-1}$, ottenendo

$$P_{\rm lat} = (N-1)\omega_{N-1} \int_{\sigma=0}^{1} \sqrt{1+16\sigma^{-10}}\, \sigma^{N-2}\, d\sigma\,.$$

La funzione integranda può esplodere solo per $\sigma \to 0$, in particolare per $\sigma \ll 1$ si può stimare dall'alto e dal basso con σ^{N-7}. Di conseguenza, il perimetro di A_N è finito se e solo se l'esponente $N-7$ è strettamente maggiore di -1, ossia se $N \geq 7$.

Per questi valore di N, non si riesce a calcolare esattamente in modo elementare $P_{\rm lat}$; è d'altra parte facile fare una stima per $N \to \infty$. Si ha infatti, integrando per parti,

$$\frac{P_{\rm lat}}{\omega_{N-1}} = \Big[\sqrt{1+16\sigma^{-10}}\,\sigma^{N-1}\Big]_{\sigma=0}^{1} + 80\int_{\sigma=0}^{1} \big(1+16\sigma^{-10}\big)^{-1/2}\sigma^{N-12}\,d\sigma\,.$$

Tuttavia, si ha

$$\Big[\sqrt{1+16\sigma^{-10}}\,\sigma^{N-1}\Big]_{\sigma=0}^{1} = \sqrt{17}\,,$$

mentre

$$0 \leq \int_{\sigma=0}^{1} \big(1+16\sigma^{-10}\big)^{-1/2}\sigma^{N-12}\,d\sigma \leq \int_{\sigma=0}^{1} \sigma^{N-12}\,d\sigma = \frac{1}{N-11}\,,$$

e quest'ultimo termine tende a 0 se $N \to \infty$. Di conseguenza, abbiamo

$$\lim_{N\to\infty} \frac{P(A_N)}{\omega_{N-1}} = \lim_{N\to\infty} \frac{\omega_{N-1}+P_{\rm lat}}{\omega_{N-1}} = 1+\sqrt{17}\,.$$

Esercizio 2 (12 punti). *Per ogni k-forma α almeno di classe C^3 su $\mathbb{R}^N$, si definisca la $(k+1)$-forma $\tilde{d}\alpha$ come segue. Scrivendo*

$$\alpha = \sum_I \varphi_I(x)\,dx_I\,,$$

dove la somma è fatta su tutti i multi-indici $I = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ con $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq N$, e dove dx_I è un'abbreviazione per $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, si pone

$$\tilde{d}\alpha = \sum_I \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \varphi_I}{\partial x_j}(x)\,dx_{j+1} \wedge dx_I\,,$$

dove, se $j = N$, per "dx_{j+1}" si intende "dx_1".

(i) Si dica se è vero che $\tilde{d}(\tilde{d}\alpha) = 0$.
(ii) Si dica se è vero che $d(\tilde{d}\alpha) = 0$.
(iii) Si dica se è vero che $\tilde{d}\big(d(\tilde{d}\alpha)\big) = 0$.
(iv) Si dica se è vero che $\tilde{d}(d\alpha) = d(\tilde{d}\alpha)$.

Per quanto riguarda $\tilde{d}\big(\tilde{d}\alpha\big)$, continuando ad usare la notazione per la quale "dx_{j+1}" significa "dx_1" nel caso in cui $j = N$, si ha

$$\tilde{d}\big(\tilde{d}\alpha\big) = \tilde{d}\bigg(\sum_I \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \varphi_I}{\partial x_j}(x)\,dx_{j+1} \wedge dx_I\bigg) = \sum_I \sum_{j=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_\ell}\bigg(\frac{\partial \varphi_I}{\partial x_j}\bigg)(x)\,dx_{\ell+1} \wedge dx_{j+1} \wedge dx_I\bigg)\,;$$

visto che per la regolarità di α si ha

$$\frac{\partial^2 \varphi_I}{\partial x_\ell \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varphi_I}{\partial x_j \partial x_\ell}\,,$$

e visto che per alternanza si ha $dx_{\ell+1} \wedge dx_{j+1} = -dx_{j+1} \wedge dx_{\ell+1}$, esattamente come nel caso del differenziale standard si ha che $\tilde{d}\big(\tilde{d}\alpha\big) = 0$.

Per quanto riguarda $d(\tilde{d}\alpha)$, visto che una volta si fa il differenziale standard e l'altra il "differenziale $\tilde{d}$", non sembra esserci alcun motivo per cui le derivate si debbano cancellare. Per verificarlo è sufficiente considerare, per esempio, la 1-forma $\alpha = \varphi(x,y,z)\,dx$ su $\mathbb{R}^3$. Allora

$$\begin{aligned} d\big(\tilde{d}\alpha\big) &= d\bigg(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dy\wedge dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dz\wedge dx\bigg) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}\,dz\wedge dy\wedge dx + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\,dy\wedge dz\wedge dx \\ &= \bigg(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}\bigg)\,dx\wedge dy\wedge dz\,, \end{aligned}$$

ed è quindi possibile che la forma α verifichi $d\big(\tilde{d}\alpha\big) \neq 0$, ad esempio prendendo $\varphi(x,y,z) = e^y$.

Occupiamoci ora dell'ultima domanda, ossia se sia vero che $\tilde{d}(d\alpha) = d(\tilde{d}\alpha)$. Si ha

$$\begin{aligned} \tilde{d}(d\alpha) &= \tilde{d}\bigg(\sum_I\sum_{j=1}^N \frac{\partial\varphi_I}{\partial x_j}(x)\,dx_j\wedge dx_I\bigg) = \sum_I\sum_{j=1}^N\sum_{\ell=1}^N \frac{\partial^2\varphi_I}{\partial x_\ell\partial x_j}(x)\,dx_{\ell+1}\wedge dx_j\wedge dx_I \\ &= -\sum_I\sum_{\ell=1}^N\sum_{j=1}^N \frac{\partial^2\varphi_I}{\partial x_j\partial x_\ell}(x)\,dx_j\wedge dx_{\ell+1}\wedge dx_I = -d\big(\tilde{d}\alpha\big)\,. \end{aligned}$$

Di conseguenza, non è vero che $\tilde{d}(d\alpha) = d(\tilde{d}\alpha)$, bensì che $\tilde{d}(d\alpha) = -d(\tilde{d}\alpha)$.

Questo permette di rispondere subito, in modo affermativo, alla terza domanda. Grazie a quanto visto nella quarta e nella prima, infatti, si ha

$$\tilde{d}\big(d(\tilde{d}\alpha)\big) = -d\big(\tilde{d}(\tilde{d}\alpha)\big) = -d\big(0\big) = 0\,.$$

Esercizio 3 (12 punti)**.** *Si consideri la superficie 2-dimensionale in $\mathbb{R}^3$ definita come*

$$\Gamma = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ (1+x^2)(1+y^2)z = 1\Big\}\,.$$

Si definiscano gli insiemi $\widetilde{F}_n$, $\widetilde{G}_n \subseteq \mathbb{R}^+$ come

$$\widetilde{F}_n = \big\{t>0,\ \operatorname{sen}(t^n)>0\big\}\,, \qquad\qquad \widetilde{G}_n = \bigg\{t>0,\, t-[t]>\frac{1}{n}\bigg\}\,,$$

dove $[t]$ è la parte intera di t, e gli insiemi F_n, $G_n\subseteq\mathbb{R}^3$ come

$$F_n = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ z=0,\ \sqrt{x^2+y^2}\in\widetilde{F}_n\big\}\,,\quad G_n = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ z=0,\ \sqrt{x^2+y^2}\in\widetilde{G}_n\big\}\,.$$

Infine, si definiscano le funzioni f_n, $g_n:\Gamma\to\mathbb{R}$ come

$$f_n(P) = \operatorname{dist}(P,F_n)\,, \qquad\qquad g_n(P) = \operatorname{dist}(P,G_n)\,,$$

dove la distanza tra un punto P ed un insieme Ω è come sempre l'infimo delle distanze tra P e gli elementi di Ω.

Si dica se esistono finiti i limiti

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Gamma f_n\,dS\,, \qquad\qquad \lim_{n\to\infty}\int_\Gamma g_n\,dS\,,$$

dove dS è la misura di superficie su Γ.

Prima di tutto, osserviamo che Γ si può parametrizzare con parametri $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Infatti, $\Gamma = \Phi(\mathbb{R}^2)$, dove la funzione Φ, regolare e iniettiva, è definita come

$$\Phi(x,y) = \big(x, y, \varphi(x,y)\big) = \left(x,\, y,\, \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}\right).$$

Possiamo quindi ridurre gli integrali di superficie su Γ ad integrali standard su $\mathbb{R}^2$; calcoliamo infatti

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \left(1,\, 0,\, \frac{-2x}{(1+x^2)^2(1+y^2)}\right), \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \left(0,\, 1,\, \frac{-2y}{(1+x^2)(1+y^2)^2}\right),$$

e notiamo che

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right| &= \left|\left(\frac{2x}{(1+x^2)^2(1+y^2)},\, \frac{2y}{(1+x^2)(1+y^2)^2},\, 1\right)\right| \\ &= \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(1+x^2)^4(1+y^2)^2} + \frac{4y^2}{(1+x^2)^2(1+y^2)^4}} =: \Psi(x,y)\,.\end{aligned}$$

Per ogni funzione misurabile h definita su $\mathbb{R}^3$ (o almeno su Γ) si ha quindi

$$\int_\Gamma h\, dS = \int_{\mathbb{R}^2} h\big(x, y, \varphi(x,y)\big)\, \Psi(x,y)\, dx\, dy\,.$$

Osserviamo anche che la funzione Ψ è limitata dal basso e dall'alto: che sia $\Psi \geq 1$ è ovvio, ma anche che sia $\Psi \leq C$ con una qualche costante C (che non è interessante calcolare), visto che Ψ è continua e tende ad 1 se $|(x,y)| \to \infty$.

Consideriamo ora gli insiemi $\widetilde{F}_n$ e $\widetilde{G}_n$: gli insiemi $\widetilde{G}_n$ sono inscatolati crescenti, e tendono a riempire l'intero $\mathbb{R}^+$. Gli insiemi $\widetilde{F}_n$, invece, contengono tutti l'intervallo $[0,1]$ e sono poi fatti da numerabili intervalli sempre più fitti. Di conseguenza, gli insiemi G_n sono unioni di anelli sul piano $\{z=0\}$ che crescono e tendono a riempire l'intero piano; anche gli insiemi F_n sono anelli sul piano $\{z=0\}$, che contengono il disco unitario e "si infittiscono" sempre più fuori da esso (saremo più precisi in seguito). E' allora chiaro che, definendo $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ la funzione che ad ogni $P \in \Gamma$ associa la distanza di P dal piano $\{z=0\}$, e dunque

$$f\big(x, y, \varphi(x,y)\big) = \varphi(x,y) = \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}\,,$$

si ha che sia entrambe le successioni $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ convergono puntualmente ad f. Si può quindi sospettare che gli integrali $\int_\Gamma f_n\, dS$ e $\int_\Gamma g_n\, dS$ convergano a

$$\int_\Gamma f\, dS = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y)\Psi(x,y)\, dx\, dy\,.$$

Notiamo intanto che quest'ultimo integrale è ben definito ed ha valore finito: infatti, visto che sia φ che Ψ sono positive e continue, e che Ψ è limitata, la convergenza è equivalente alla convergenza dell'integrale $\int_{\mathbb{R}^2} \varphi\, dx\, dy$, e quest'ultimo integrale converge facilmente per confronto.

Per quanto riguarda le funzioni g_n, tali funzioni convergono ad f in maniera monotona *decrescente*, visto che gli insiemi G_n sono sempre più grandi. Questo non ci permette di utilizzare il Teorema della Convergenza Monotona, a meno che non osserviamo che qualche g_n abbia integrale finito (mentre potremmo applicare il Teorema senza problemi se la monotonia fosse *crescente*).

In realtà, si può notare che non sia così. Fissiamo infatti un elemento $n \in \mathbb{N}$, e per un qualunque $m \in \mathbb{N}$ consideriamo l'anello $A_m \subseteq \mathbb{R}^2$ definito come

$$A_m = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |(x,y)| - m \in \left(\frac{1}{3n}, \frac{2}{3n} \right) \right\};$$

l'anello A_m è cioè situato subito fuori dal disco di raggio m, ed è fatto da punti la cui distanza da tale disco sia compresa fra $1/(3n)$ e $2/(3n)$. Prendiamo adesso un punto $P = \big(x, y, \varphi(x,y)\big)$ tale che $(x,y) \in A_m$. Visto che i punti di G_n distano dall'origine meno di m, oppure più di $m+1/n$, la distanza di P da un qualunque punto di G_n, che ovviamente è maggiore della distanza di $(x,y,0)$ da G_n, è maggiore di $1/(3n)$. Si ha quindi $g_n(P) \geq 1/(3n)$ per ogni $P = \big(x, y, \varphi(x,y)\big)$ per il quale $(x,y) \in A_m$. Visto che questo vale per un qualsiasi m, visto che abbiamo già osservato che $\Psi \geq 1$, e visto che g_n è positiva, si ha

$$\int_\Gamma g_n\, dS = \int_{\mathbb{R}^2} g_n\big(x, y, \varphi(x,y)\big)\, \Psi(x,y)\, dx\, dy \geq \int_{\mathbb{R}^2} g_n\big(x, y, \varphi(x,y)\big)\, dx\, dy \geq \frac{1}{3n} \left| \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m \right|.$$

Tuttavia, a prescindere dal valore di n è chiaro che l'unione degli anelli A_m ha area infinita: si deduce quindi che

$$\int_\Gamma g_n\, dS = +\infty$$

per ogni n, e dunque il limite esiste ma non è finito.

Consideriamo invece le funzioni f_n: tali funzioni non convergono ad f in maniera monotona, tuttavia è facile notare che convergono in maniera dominata. Infatti, visto che ogni G_n contiene il disco unitario, si ha che $f_n\big(x, y, \varphi(x,y)\big) = f\big(x, y, \varphi(x,y)\big)$ per ogni $|(x,y)| \leq 1$. Ricordiamo poi che G_n è fatto di un'unione numerabile di anelli, che iniziano e finiscono su raggi $r \geq 1$ per i quali r^n è un multiplo di π. Se r_j è uno di tali raggi, il raggio successivo è quindi il raggio r_{j+1} per il quale $r_{j+1}^n = r_j^n + \pi$. Ma allora

$$\pi = r_{j+1}^n - r_j^n = \big(r_j + (r_{j+1} - r_j)\big)^n - r_j^n \geq n r_j^{n-1} \big(r_{j+1} - r_j\big).$$

Se $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si trova nell'anello compreso tra il raggio r_j ed il raggio r_{j+1}, allora per disuguaglianza triangolare

$$0 \leq f_n\big(x, y, \varphi(x,y)\big) - f\big(x, y, \varphi(x,y)\big) \leq \big(r_{j+1} - r_j\big) \leq \frac{\pi}{n r_j^{n-1}}.$$

Si noti ora che, dal momento che (x,y) si trova nell'anello di raggi r_j ed r_{j+1}, dalle disuguaglianze prima dette e ricordando che $r_j \geq 1$ si ha $|(x,y)| \leq r_{j+1} \leq 2r_j$. Purché $n \geq 4$, si ha allora

$$0 \leq f_n\big(x, y, \varphi(x,y)\big) - f\big(x, y, \varphi(x,y)\big) \leq \frac{8\pi}{|(x,y)|^3}.$$

Possiamo allora definire $\bar{f} : \Gamma \to \mathbb{R}^+$ come la funzione

$$\bar{f}\big(z, \varphi(z)\big) = \bar{\varphi}(z) := \begin{cases} \varphi(z) & \text{se } |z| \leq 1, \\ \varphi(z) + \frac{8\pi}{|z|^3} & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

Per costruzione, abbiamo che la successione $\{f_n\}$ non solo converge puntualmente ad f, ma è anche limitata da $\bar{f}$ (essendo tutte funzioni positive è sufficiente limitare dall'alto). Si ha allora che effettivamente

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Gamma f_n \, dS = \int_\Gamma f \, dS = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y)\Psi(x,y) \, dx \, dy < +\infty \,,$$

visto che

$$\int_\Gamma \bar{f} \, dS = \int_{z\in\mathbb{R}^2} \bar{\varphi}(z)\Psi(z) \, dz \leq C \int_{z\in\mathbb{R}^2} \bar{\varphi}(z) \, dz \,,$$

e quest'ultimo integrale ha un valore finito visto che φ è integrabile su $\mathbb{R}^2$, come già osservato, e che $|z|^{-3}$ è integrabile al di fuori del disco unitario.