Prova scritta per il corso di Analisi Matematica 2 con soluzioni
corso di laurea in Matematica
Università di Pisa
21/6/2024

Esercizio 1 (8 punti)**.** *Si definiscano l'insieme* $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\, z \geq x^2 + y^2\}$ *e la funzione* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *data da*

$$f(x,y,z) = e^{y-z^2}\left(x^2 + y + z^2\right).$$

(i) Si dimostri che la funzione ammette massimo e minimo globali.

(ii) Si dimostri che tutti i punti di massimo e minimo globali appartengono al bordo di Ω*.*

(iii) Si dimostri che per qualunque punto di massimo e minimo globale vale $y^2 = z$*.*

(iv) Si dimostri che per qualunque punto di minimo globale si ha $y \in (-1,0)$*, e per qualunque punto di massimo globale si ha* $y \in (0,1)$*.*

Per punti $(x,y,z) \in \Omega$ si ha che

$$z^2 \geq z - 1 \geq x^2 + y^2 - 1\,,$$

e questo assicura

$$2z^2 \geq |(x,y,z)|^2 - 1\,,$$

e quindi (ricordando che $z \geq 0$) che

$$z \geq \sqrt{\frac{|(x,y,z)|^2 - 1}{2}}\,.$$

Visto quindi che

$$|f(x,y,z)| \leq e^{\sqrt{z}-z^2}\left(z + \sqrt{z} + z^2\right),$$

e quest'ultima espressione tende a 0 per $z \to +\infty$, si ha allora che

$$\lim_{P \in \Omega,\, |P| \to \infty} f(P) = 0\,.$$

Dal momento che f è continua e Ω è chiuso, e visto che è immediato osservare l'esistenza di punti di Ω sia in cui $f > 0$ che in cui $f < 0$, deduciamo l'esistenza di massimi e minimi globali; in particolare il massimo globale sarà strettamente positivo ed il minimo globale strettamente negativo. Se $(x,y,z) \in \Omega$ fosse un punto di massimo globale interno ad Ω, si troverebbe un assurdo perché, essendo per forza $f(x,y,z) > 0$, si avrebbe $f(x+\varepsilon,y,z) > f(x,y,z)$ per numeri $\varepsilon > 0$ molto piccoli. Analogamente, se $(x,y,z) \in \Omega$ fosse un punto di minimo globale interno ad Ω, si avrebbe un assurdo perché dovrebbe essere $f(x,y,z) < 0$ ed allora si avrebbe $f(x,y,z-\varepsilon) < f(x,y,z)$ per piccoli numeri $\varepsilon > 0$. Questo dimostra che non possono esserci punti di massimo e minimo globale interni ad Ω e quindi tali punti sono necessariamente tutti sul bordo di Ω. In alternativa, per mostrare la mancanza di punti di massimo e minimo globale interni si può osservare che f è differenziabile in tutti i punti interni ad Ω e non ammette punti critici.

Di conseguenza, i punti di massimo e minimo globale di f sono tutti e soli i punti del tipo $(\pm\sqrt{z-y^2}, y, z)$ tali che (y,z) è un punto di massimo o minimo globale per $g : \Omega' \to \mathbb{R}$, avendo definito $\Omega' = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2,\ z \geq y^2\}$ e

$$g(y,z) = e^{y-z^2}\left(z - y^2 + y + z^2\right).$$

Notiamo ora che g non ha punti critici interni a Ω'; infatti si ha

$$\frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = e^{y-z^2}\left(z - y^2 - y + z^2 + 1\right) \geq e^{y-z^2}\left(1 + z^2 - y\right),$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato che $z \geq y^2$ e che l'esponenziale è positiva. Tuttavia, il termine in parentesi è strettamente positivo per ogni (y,z) interno ad Ω': infatti, quel termine è certamente strettamente positivo se $y < 1$; se invece $y \geq 1$, il fatto che $z \geq y^2$ implica che $z^2 \geq z \geq y^2 \geq y$, e quindi il termine in parentesi è pari almeno ad 1, quindi di nuovo strettamente positivo. Si ha allora che effettivamente g non ha punti critici interni e quindi i punti di massimo e minimo globale per g devono appartenere al bordo di Ω', quindi soddisfare l'equazione $z = y^2$. Ma allora, i punti di massimo e minimo globale di f sono tutti e soli i punti del tipo $(0, y, y^2)$ tali che y è un punto di massimo e minimo globale su $\mathbb{R}$ della funzione

$$h(y) = e^{y-y^4}\left(y + y^4\right).$$

Ogni punto di minimo globale deve soddisfare $h(y) < 0$, che sicuramente è possibile solo se $-1 < y < 0$, e quindi questa condizione è vera per tutti i punti di minimo globale di f. Per quanto riguarda invece un punto di massimo globale, il fatto che $y > 0$ è ovvio, ed un semplice conto mostra che

$$h'(y) = e^{y-y^4}\left(-4y^7 - 3y^4 + 4y^3 + y + 1\right);$$

se $y \geq 1$, il termine in parentesi è sicuramente strettamente negativo, e quindi abbiamo ottenuto anche la disuguaglianza $y < 1$.

Esercizio 2 (8 punti)**.** *Si consideri il problema*

$$\begin{cases} u'(t) = \cos\left(e^{-u(t)}\right) & \text{per } t > 0\,, \\ u(0) = u_0\,. \end{cases}$$

(i) Si discuta, al variare di $u_0 \in \mathbb{R}$, la questione dell'esistenza e unicità di soluzioni massimali o globali $u \in \mathrm{C}^1([0,T))$.

(ii) Si determini, per ogni $u_0 \in \mathbb{R}$, se esiste il limite di $u(t)$ per $t \to T$, ed in caso affermativo lo si calcoli.

(iii) Per le soluzioni globali di questo problema che esplodono a $+\infty$ o a $-\infty$, si dica se esiste un asintoto obliquo.

Visto che $u'(t)$ è una funzione C^1 di t ed $u(t)$, deduciamo che per ogni u_0 esiste ed è unica la soluzione massimale del problema; inoltre, le soluzioni hanno sempre derivata compresa tra -1 ed 1, quindi rimangono limitate per tempi limitati, ed allora le soluzioni sono tutte globali.

Viene comodo osservare quali siano le soluzioni costanti del problema, che chiaramente corrispondono a tutti e soli i valori u_0 tali che $\cos(e^{-u_0}) = 0$. Visto che l'esponenziale è sempre positiva, tali valori sono tutti e soli quelli tali che e^{-u_0} coincide con $\pi/2 + n\pi$ per un qualche numero naturale $n \geq 0$. Possiamo quindi definire per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$z_n = -\ln\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right),$$

ed abbiamo che le soluzioni costanti sono tutte e sole quelle per cui u_0 coincide con qualche z_n. E' anche utile notare che la successione $\{z_n\}$ è decrescente e negativa.

Supponiamo che $u_0 \in (z_{n+1}, z_n)$. Allora, visto che u non può incontrare le soluzioni costanti z_n e z_{n+1}, la soluzione resta nell'intervallo (z_{n+1}, z_n) per tutti i tempi positivi. Allora, l'equazione assicura che u' è sempre negativa se n è pari, e sempre positiva se n è dispari. La soluzione u è quindi una funzione monotona e limitata definita su tutto $(0, +\infty)$, e quindi converge ad un qualche limite $L \in [z_{n+1}, z_n]$. Questo assicura che u' converge ad $\cos(e^{-L})$, e allora tale valore deve essere necessariamente 0, il che nell'intervallo accade solo in z_n ed in z_{n+1}. La monotonia già notata ci assicura quindi che tutte le soluzioni con $u_0 \in (z_{n+1}, z_n)$ sono monotone crescenti e tendono a z_n se n è dispari, e sono monotone decrescenti e tendono a z_{n+1} se n è pari.

Tutte le soluzioni con $u_0 \leq z_0$ sono quindi monotone ed hanno asintoto orizzontale. Sia invece u una soluzione relativa ad un qualche $u_0 > z_0$: per unicità della soluzione, resta $u(t) > z_0$ per ogni $t > 0$, e quindi u' è sempre positiva. La funzione u è quindi monotona crescente, e può quindi tendere a $+\infty$ o ad un limite finito. Se fosse $u(t) \to L$, dovrebbe essere $\cos(e^{-L}) = 0$, cosa impossibile perché sarebbe $L > z_0$. Di conseguenza, la soluzione tende all'infinito.

Per concludere, consideriamo una soluzione u che tende a $+\infty$ o a $-\infty$: per quanto osservato finora, sappiamo che $u_0 > z_0$ e che in effetti $u(t) \to +\infty$. In particolare, questo assicura che $u'(t) \to 1$, e quindi un eventuale asintoto obliquo dovrebbe avere pendenza 1. Definiamo $\varphi(t) = t - u(t)$: un asintoto obliquo (come detto, necessariamente di pendenza 1) esiste se e solo se φ ammette un limite all'infinito. Visto che $\varphi'(t) = 1 - u'(t) > 0$, questo è equivalente a dire che φ sia limitata. Fissiamo un tempo $S \geq 0$ tale che $u(s) > 2$: tale tempo esiste sicuramente perché $u(t) \to +\infty$. Allora si ha che $u > 2$ per tutti i tempi successivi ad S, e questo assicura che $u' > 1/2$. Dunque, per ogni $t > S$ si ha $u(t) > 2 + (t-S)/2 > (t-S)/2$. Si ha allora, per ogni $t > S$, che

$$u'(t) = \cos(e^{-u(t)}) > 1 - \frac{e^{-2u(t)}}{2} > 1 - \frac{e^{-(t-S)}}{2}.$$

Questo assicura che

$$\varphi'(t) < \frac{e^{-(t-S)}}{2}$$

per ogni $t > S$, e questo assicura immediatamente che $\int_S^{+\infty} \varphi' < +\infty$, ovvero che φ è limitata. Come notato prima, questo vuol dire che ogni soluzione corrispondente a $u_0 > z_0$ ha un asintoto obliquo di pendenza 1.

Esercizio 3 (8 punti). *Si definisca $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$, e sia X l'insieme delle funzioni continue da D in D. Si definisca $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ come*

$$d(f,g) = \int_D \big|f(x,y) - g(x,y)\big|\, dx\, dy\,.$$

Sia poi $\{f_n\} \subseteq X$ *una successione di funzioni di classe* C^1 *tali che*

$$|Df_n(x,y)| = |f_n(x,y)|^n .$$

(i) Si dimostri che d *è una distanza su* X*.*

(ii) Si dimostri che esiste una sottosuccessione della $\{f_n\}$ *che converge ad una funzione* $f \in X$*.*

(iii) Si dimostri che se esiste un punto $P \in D$ *tale che* $|f(P)| < 1$*, allora la* f *è costante.*

(iv) Si dimostri che f *può non ammettere nessun punto in cui* $|f| < 1$*.*

(v) Si dimostri che f *può non essere costante.*

Il fatto che d sia una distanza è immediato da controllare; infatti, essendo un integrale di una quantità positiva è chiaramente $d(f,g) \geq 0$, ed è ovvio che $d(f,f) = 0$. Se poi f e g sono due funzioni diverse, per continuità esistono un aperto non vuoto di D ed una costante $\varepsilon > 0$ tale che $|f - g| > \varepsilon$ sull'aperto, e quindi $d(f,g) > 0$. La simmetria e la disuguaglianza triangolare, infine, valgono per il modulo e vengono mantenute dall'integrale.

Se $\{f_n\}$ è una successione che soddisfa l'equazione data, in particolare il differenziale di f_n ha modulo minore o uguale ad 1; le funzioni sono quindi tutte Lipschitziane con costante 1, e le immagini sono contenute in D quindi relativamente compatte. Si può allora applicare il Teorema di Ascoli–Arzelà, che assicura l'esistenza di una sottosuccessione che converge uniformemente. Dal momento che la convergenza uniforme implica banalmente la convergenza secondo la distanza d, si è ottenuto quanto voluto.

Supponiamo ora che il limite f abbia un valore di modulo minore di 1, ossia $|f(P)| < 1$ per un qualche $P \in D$; chiamiamo $\varepsilon = 1 - |f(P)|$. Per continuità, esiste un piccolo intorno aperto $A \subseteq D$ che contiene P tale che $|f(Q)| < 1 - \varepsilon/2$ per ogni punto Q in A; possiamo ad esempio prendere come intorno A una piccola palla centrata in P intersecata con D. Avendo osservato che le funzioni f_n convergono uniformemente ad f, per n abbastanza grande abbiamo che $|f_n(Q)| < 1 - \varepsilon/3$ per ogni $Q \in A$. Ma allora si ha che, in A, $|Df_n| = |f_n|^n < (1 - \varepsilon/3)^n$, e questo tende a 0 per $n \to \infty$. Questo assicura che f deve essere costante in A. Abbiamo cioè mostrato che per ogni punto $P \in D$ in cui $|f(P)| < 1$ esiste un intorno aperto sul quale $f \equiv f(P)$. L'insieme dei punti in D nei quali $f = f(P)$ è quindi un aperto; dal momento che è anche chiuso, essendo f continua, coincide con l'intero D. Si ha cioè che f è costante.

E' però possibile anche che la successione $\{f_n\}$ converga ad una f che non ha mai valori di modulo minore di 1, ossia l'immagine di f è contenuta nel bordo di D. E' facile dare un esempio, basta considerare la successione costante (nel senso di non dipendente da n) definita come $f_n(x,y) = (\cos x, \operatorname{sen} x)$, che verifica

$$Df_n(x,y) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} x & 0 \\ \cos x & 0 \end{pmatrix} .$$

Si noti che per ogni n e per ogni punto di D si ha $|f_n| = 1$ e $|Df_n| = 1$, quindi l'equazione $|Df_n(x,y)| = |f_n(x,y)|^n$ è soddisfatta in ogni punto e per ogni n. Visto che f_n non dipende da n, ovviamente f_n converge a $f(x,y) = (\cos x, \operatorname{sen} x)$, e tale funzione non è costante ed assume quindi solo valori di modulo 1.

Esercizio 4 (8 punti). *Si consideri, su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, la forma differenziale definita come*

$$\omega(x,y) := \frac{ydx + (Ax+By)dy}{x^2+2xy+5y^2},$$

dove A, $B \in \mathbb{R}$.

(i) Trovare i parametri A, B in modo che ω sia chiusa.

(ii) Determinare un potenziale per la forma definito su $\{(x,y),\, y>0\}$.

(iii) Dire se ω è anche esatta.

(iv) Calcolare $\int_\gamma \omega$ dove $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ è definita da

$$\gamma(t) := (-t, 1+t+t^2).$$

Per verificare se ω è chiusa, osserviamo che

$$d\omega = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+2xy+5y^2}\right) dy \wedge dx + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Ax+By}{x^2+2xy+5y^2}\right) dx \wedge dy.$$

Di conseguenza, la forma ω è chiusa se e solo se

$$\frac{x^2+2xy+5y^2 - y(2x+10y)}{(x^2+2xy+5y^2)^2} = \frac{(x^2+2xy+5y^2)A - (Ax+By)(2x+2y)}{(x^2+2xy+5y^2)^2},$$

il che equivale a dire che

$$x^2 - 5y^2 = -Ax^2 + 5Ay^2 - 2Bxy - 2By^2,$$

e quest'ultima uguaglianza è vera se e solo se $A = -1$ e $B = 0$.

Essendo (con questa scelta dei parametri) ω una forma chiusa, allora si può trovare un potenziale per ω in tutti gli aperti semplicemente connessi contenuti in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Considerando ad esempio $\{(x,y) : y > 0\}$, e integrando orizzontalmente, si ottiene

$$\begin{aligned} V(x,y) - V(0,y) &= \int_0^x \frac{y}{t^2+2ty+5y^2}\, dt = \int_0^x \frac{y}{(t+y)^2+(2y)^2}\, dt = \left[\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{t+y}{2y}\right)\right]_0^x \\ &= \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x+y}{2y}\right) - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

che assicura che il potenziale (che è univocamente definito a meno di una costante additiva) deve essere della forma

$$V(x,y) = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x+y}{2y}\right) + c(y)$$

con una qualche funzione $c(y)$. Derivando adesso verticalmente, si deve avere

$$\frac{\partial}{\partial y} V(x,y) = \frac{-x}{x^2+2xy+5y^2},$$

e visto che

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x+y}{2y}\right)\right) = \frac{-x}{4y^2+(x+y)^2}$$

si deve avere $c' = 0$, ossia c deve essere costante. Si ha allora che un possibile potenziale per ω in $\{(x,y) :\, y > 0\}$ è

$$V(x,y) = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x+y}{2y}\right).$$

Per verificare se ω è esatta, è possibile chiedersi se esista un potenziale $\widehat{V}$ su tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (visto che tale potenziale esiste se e solo se la forma è esatta). In particolare, un tale potenziale esiste se e solo se ne esiste uno che estende quello appena trovato su $\{(x,y) : y > 0\}$. Notiamo ora che per continuità dovrebbe essere

$$\begin{aligned}\widehat{V}(1,0) - \widehat{V}(-1,0) &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} V(1,\varepsilon) - \widehat{V}(-1,\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2}\left(\arctan\left(\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}\right) - \arctan\left(\frac{-1+\varepsilon}{2\varepsilon}\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

D'altra parte, i conti fatti prima nel semipiano $\{(x,y) : y > 0\}$ possono essere ripetuti in modo identico per il semipiano $\{(x,y) : y < 0\}$ (di fatto, per fare i conti abbiamo solo utilizzato che fosse $y \neq 0$). Scopriamo quindi che nel semipiano inferiore necessariamente dovrebbe valere

$$\widehat{V}(x,y) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+y}{2y}\right) + C$$

con una qualche costante C; ma allora, sempre per continuità dovrebbe essere

$$\begin{aligned}\widehat{V}(1,0) - \widehat{V}(-1,0) &= \lim_{\varepsilon \nearrow 0} V(1,\varepsilon) - \widehat{V}(-1,\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \nearrow 0} \frac{1}{2}\left(\arctan\left(\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}\right) - \arctan\left(\frac{-1+\varepsilon}{2\varepsilon}\right)\right) \\ &= -\frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

Visto che questa equazione è incompatibile con quella di sopra, otteniamo la non esistenza di un potenziale su tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, e quindi la forma ω non è esatta sul suo dominio.

Infine, osserviamo che la curva γ è interamente contenuta nel semipiano in cui $y > 0$, per cui per calcolare l'integrale di ω lungo γ è sufficiente utilizzare il potenziale V trovato prima, ottenendo quindi

$$\int_\gamma \omega = V\big(\gamma(1)\big) - V\big(\gamma(-1)\big) = V(-1,3) - V(1,1) = \frac{1}{2}\arctan\big(1/3\big) - \frac{\pi}{8}\,.$$