Prova scritta per il corso di Analisi Matematica 2 con soluzioni
corso di laurea in Matematica
Università di Pisa
21/6/2024

Esercizio 1 (8 punti)**.** *Si definisca l'insieme* $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N,\, x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_N \geq 0\}$*, e sia* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *la funzione definita come*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} (-1)^i x_i^{2i}\,.$$

(i) Si trovino, al variare di $N \in \mathbb{N}$*, il* sup *e l'*inf *di* f *in* Ω*.*

(ii) Si dimostri che f *non ammette nessun punto di minimo locale in* Ω*.*

(iii) Si dimostri che f *ammette esattamente un punto di massimo locale in* Ω *se* $N = 2$*.*

(iv) Si discuta il numero di massimi locali di f *in* Ω *per qualunque* $N \geq 3$*.*

La funzione f è chiaramente continua, ma questo non basta per dire che ammetta massimo e minimo dal momento che Ω non è compatto. Per trovare il sup e l'inf, iniziamo osservando che il punto $(t, 0, \ldots 0, 0)$ appartiene ad Ω per ogni $t \geq 0$, e quindi qualunque sia il valore di N

$$\inf_\Omega f \leq \liminf_{t\to+\infty} f(t, 0, \ldots 0, 0) = \liminf_{t\to+\infty} -t^2 = -\infty\,,$$

ossia l'inf di f è pari a $-\infty$ per qualsiasi N.

Per quanto riguarda il sup, dobbiamo distinguere il caso $N = 1$ dal caso $N \geq 2$. Se $N = 1$ ovviamente la f ammette 0 come massimo, con il punto 0 come unico punto di massimo globale. Se invece $N \geq 2$, osserviamo che il punto $(t, t, 0, 0 \ldots, 0)$ appartiene ad Ω per ogni $t \geq 0$, e quindi si ha

$$\sup_\Omega f \geq \limsup_{t\to+\infty} f(t, t, 0, \ldots, , 0) = \limsup_{t\to+\infty} -t^2 + t^4 = +\infty\,.$$

Ricapitolando, il sup di f è pari a $+\infty$ per qualunque $N \geq 2$, mentre è 0 –ed è un massimo– se $N = 1$.

Visto che non ci sono punti critici di f nell'interno di Ω, come è immediato osservare, eventuali punti di massimo o minimo locale dovrebbero trovarsi sul bordo. E' facile escludere l'esistenza di un minimo locale: infatti, dato un qualunque $x \in \Omega$, anche il punto $x_\varepsilon = (x_1 + \varepsilon, x_2, \ldots, x_N)$ sta in Ω per qualunque $\varepsilon > 0$. Inoltre, $f(x_\varepsilon) = f(x) + x_1^2 - (x_1 + \varepsilon)^2 < f(x)$, e dunque x non può essere un punto di minimo locale. Dal momento che x è un generico punto di Ω, abbiamo escluso l'esistenza di minimi locali.

Osserviamo ora che l'origine è un punto di massimo locale per f in Ω per qualunque N (se $N = 1$, abbiamo già visto che si tratta anche di un massimo globale). Infatti, se x sta in Ω, allora per ogni $i \geq 2$ si ha $x_i^{2i} \leq x_1^{2i}$, e quindi

$$f(x) \leq -x_1^2 + x_1^4 + x_1^6 + \cdots + x_1^{2N} = x_1^2\Big(-1 + x_1^2 + x_1^4 + \cdots + x_1^{N-2}\Big)\,.$$

Se x è sufficientemente vicino all'origine, il termine in parentesi è negativo, e di conseguenza $f(x) \leq 0$ per tutti gli $x \in \Omega$ abbastanza vicini all'origine. Visto che $f(0) = 0$, effettivamente l'origine è un punto di massimo locale.

Possiamo ora dimostrare che non esistano altri punti di massimo locale per f in Ω. Visto che questo fatto è ovvio se $N = 1$, consideriamo direttamente $N \geq 2$: supponiamo che $x \in \Omega$ sia un punto di massimo locale diverso dall'origine e cerchiamo un assurdo. Innanzitutto si può supprre $x_1 = x_2$, perché altrimenti il punto $(x_1 - \varepsilon, x_2, \dots, x_N)$ apparterrebbe ad Ω per tutti gli $\varepsilon > 0$ abbastanza piccoli, e visto che su tale punto il valore di f risulterebbe strettamente maggiore che in x si avrebbe già l'assurdo cercato. Definiamo ora $\tilde{x}_\varepsilon = (x_1 + \varepsilon, x_1 + \varepsilon, x_3, x_4, \dots, x_N)$, che coincide con x se $\varepsilon = 0$ visto che $x_1 = x_2$. Per qualunque $\varepsilon > 0$ il punto $\tilde{x}_\varepsilon$ appartiene ad Ω, e quindi la massimalità locale del punto x assicura che $f(x) \geq f(\tilde{x}_\varepsilon)$ per ogni piccolo $\varepsilon > 0$, il che implica

$$x_1 < \frac{\sqrt{2}}{2} \,. \tag{*}$$

Si chiami ora M il più grande indice tale che $x_1 = x_2 = \cdots = x_M$: la massimalità di M assicura che $x_{M+1} < x_M$, oppure che $M = N$. Supponiamo prima di tutto che M sia dispari: in questo caso, il punto

$$(x_1, x_2, \dots, x_{M-1}, x_M - \varepsilon, x_{M+1}, \dots, x_N) = (x_1, x_1, \dots, x_1, x_1 - \varepsilon, x_{M+1}, \dots, x_N)$$

appartiene ad Ω per ogni $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo, e l'assurdo cercato segue dal fatto che in tale punto il valore di f è strettamente maggiore che in x. Se invece M è pari, si può considerare il punto

$$(x_1, x_2, \dots, x_{M-2}, x_{M-1} - \varepsilon, x_M - \varepsilon, x_{M+1}, \dots, x_N) \,:$$

si tratta di nuovo di un punto che sta in Ω per qualunque $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo, e l'assurdo segue purché questo punto abbia un valore di f strettamente maggiore che in x; dal momento che questo vale se e solo se

$$x_1 \leq \sqrt{\frac{M-1}{M}} \,,$$

l'assurdo si è trovato perché $M \geq 2$ e per la (*).

Esercizio 2 (8 punti)**.** *Si consideri il problema*

$$(\bullet) \quad \begin{cases} u'(t) = \operatorname{sen}(t) + |u(t)|^t \operatorname{sgn}(u(t)) & \text{per } t > 0 \,, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

dove

$$\operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} 1 & \text{se } a > 0 \,, \\ -1 & \text{se } a < 0 \,, \\ 0 & \text{se } a = 0 \,. \end{cases}$$

(i) Si discutano, al variare di $u_0 \in \mathbb{R}$, esistenza e unicità di soluzioni massimali $u \in \mathrm{C}^1([0,T))$.

(ii) Si dimostri che esiste una soluzione del problema che esplode a $+\infty$ in tempo finito, ed un'altra che esplode a $-\infty$ in tempo finito.

(iii) Si dica se esistono soluzioni globali del problema $(\bullet)$.

(iv) Si dica se esistono soluzioni globali non limitate di $(\bullet)$.

(v) Si dica quante sono le soluzioni globali di $(\bullet)$.

La funzione $f(t,a) = \operatorname{sen}(t) + |a|^t \operatorname{sgn}(a)$ è continua e localmente Lipschitziana nella seconda variabile su $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$. Tuttavia, vicino a $\{t=0\}$ la funzione non è nemmeno continua, visto che il limite $\lim_{t\searrow 0}|a|^t$ è pari ad 1 per ogni $a\neq 0$ ed è pari a 0 per $a=0$. Conviene quindi iniziare a studiare il problema con istante iniziale $t_0>0$.

Per ogni fissato $t_0>0$, e per ogni v_0, il Teorema di Cauchy-Lipschitz assicura l'esistenza e l'unicità di una soluzione massimale di classe C^1 per il problema

$$\begin{cases} u'(t) = \operatorname{sen}(t) + |u(t)|^t \operatorname{sgn}(u(t)) \qquad \text{per } t>t_0\,, \\ u(t_0)=v_0 \end{cases}.$$

Supponiamo che una tale soluzione esista fino ad un tempo $\bar t\geq 2$ con $u(\bar t)\geq 2$. Allora la soluzione risulterà sicuramente crescente per tutti i tempi successivi a $\bar t$, visto che il seno vale come minimo -1. In effetti, si può anche dire che per ogni $t\geq \bar t$ si ha

$$u'(t)\geq u(t)^2-1\,.$$

Dal momento che le soluzioni del problema $u'(t)=u(t)^2-1$ che hanno un valore maggiore di 2 esplodono in un tempo finito, lo stesso deve succedere per la u. Una qualunque soluzione massimale che per un qualche tempo maggiore di 2 ha un valore maggiore di 2 esplode quindi a $+\infty$ in un tempo finito, e dunque non è globale. Che ci siano soluzioni che arrivano con un valore maggiore di 2 per tempi maggiori di 2 è chiaro: se $t_0\geq 2$, basta prendere $v_0\geq 2$; se invece $t_0<2$, basta prendere comunque $v_0\geq 2$ e notare che in $[t_0,2]$ la soluzione è crescente. In modo analogo, si può notare che esistono soluzioni che esplodono a $-\infty$ in un tempo finito: infatti, con lo stesso argomento di prima è chiaro che questo accade se per un qualche $\bar t\geq 2$ si ha $u(\bar t)\leq -2$. E che ci siano soluzioni che arrivano sotto a -2 per tempi maggiori di 2 si ottiene prendendo semplicemente $v_0\leq -2$ nel caso in cui $t_0\geq 2$, mentre nel caso in cui $t_0<2$ basta prendere $v_0\leq -4$ e notare che $u'<1$ e quindi $u(2)\leq -2$.

Quanto detto sopra assicura che eventuali soluzioni globali devono essere limitate: infatti, se una soluzione ammette qualche valore che non sia compreso nell'intervallo $[-4,2]$ allora esplode a $+\infty$ o a $-\infty$ in un tempo finito. Sia ora, sempre con un t_0 assegnato, v_0 un valore per il quale la soluzione esplode a $+\infty$ in tempo finito. Allora, esiste un qualche $\bar t>t_0$ per il quale $u(\bar t)>3$. Visto che le soluzioni dipendono in maniera continua dal dato iniziale, per ogni $\tilde v_0$ sufficientemente vicino a v_0 si ha che la corrispondente soluzione $\tilde u$ ha un valore, in $\bar t$, vicino quanto si voglia a $u(\bar t)$, quindi in particolare maggiore di 2. Perciò, esplodono in un tempo finito le soluzioni che partono da tutti i valori abbastanza vicini a v_0. Ricordando anche l'unicità delle soluzioni, otteniamo che l'insieme dei $v_0\in\mathbb{R}$ tali che la soluzione esplode a $+\infty$ in un tempo finito è un intervallo del tipo $(a,+\infty)$. Lo stesso identico argomento fatto per soluzioni che esplodono a $-\infty$ assicura che l'insieme dei dati iniziali tali che la soluzione esplode a $-\infty$ in un tempo finito è un intervallo del tipo $(-\infty,b)$. Visto che per forza deve essere $b\leq a$, deduciamo che la soluzione corrispondente ad un qualsiasi v_0 nell'intervallo non vuoto $[a,b]$ è una soluzione che non può esplodere in tempo finito. Tale soluzione è quindi globale (e, per quanto visto, anche limitata).

Facciamo ora vedere che esiste una *unica* soluzione globale, quindi in particolare $a = b$ con le notazioni di prima. Fissiamo un qualunque $\varepsilon > 0$. Allora esiste un $\bar{t}$, dipendente da ε, tale che se una soluzione verifica $u(t) \geq 1 + \varepsilon$ per un qualche $t \geq \bar{t}$, tale soluzione esplode in un tempo finito. Per dimostrarlo basta scegliere un $\bar{t}$ tale che $(1+\varepsilon)^{\bar{t}} \geq 2$: con questa scelta, se $u(t) \geq 1+\varepsilon$ per un qualche $t \geq \bar{t}$ allora dopo $\bar{t}$ la u resta crescente con derivata almeno pari ad 1; ma allora prima del tempo $t + 1$ la soluzione ha superato il valore 2 e quindi esplode in tempo finito. In modo analogo, se $u(t) \leq -1 - \varepsilon$ per un qualche $t \geq \bar{t}$ allora la u esplode a $-\infty$ in tempo finito. A meno di aumentare il valore di $\bar{t}$, possiamo anche supporre che $(1 - \varepsilon)^{\bar{t}} < \varepsilon/\pi$.

Sia allora u una soluzione globale, sia $\varepsilon > 0$ fissato, e consideriamo $u(\hat{t})$ per un qualque $\hat{t} \geq \bar{t}$ tale che $\cos \hat{t} = 1$. Di certo deve essere $u(\hat{t}) > -1-\varepsilon$, per quanto detto sopra. Tuttavia, possiamo motrare che deve anche essere $u(\hat{t}) < -1+2\varepsilon$. Supponiamo infatti che sia $u(\hat{t}) \geq -1+2\varepsilon$: allora, si ha che $|u(\hat{t})|^{\hat{t}}\mathrm{sgn}(u(\hat{t})) > -\varepsilon/\pi$, e da questo si deduce che $u'(t) > \operatorname{sen}(t) - \varepsilon/\pi$ per tutti i $t \in (\hat{t}, \hat{t} + \pi)$. Di conseguenza, $u(\hat{t} + \pi) \geq 1 + \varepsilon$, il che è assurdo perché assicura che la u esplode in un tempo finito. Ricapitolando, per ogni $\varepsilon > 0$ abbiamo trovato un $\bar{t}$ con la proprietà che per ogni soluzione globale u e per ogni $\hat{t} \geq \bar{t}$ con $\cos(\hat{t}) = 1$ deve essere $u(\hat{t}) \in (-1 - \varepsilon, -1 + 2\varepsilon)$.

Supponiamo ora che ci siano due soluzioni globali diverse, chiamiamole u ed $\tilde{u}$. Possiamo supporre che $\tilde{u}(t_0) > u(t_0)$. Osserviamo che $\tilde{u}' > u'$ per ogni $t > t_0$, e dunque non soltanto $\tilde{u}$ resta sempre maggiore di u, ma la differenza tra le due funzioni è crescente. Possiamo allora definire $\varepsilon = (\tilde{u}(t_0) - u(t_0))/4$: allora, $\tilde{u} - u$ è sempre maggiore di 4ε. Siano allora $\bar{t}$ e $\hat{t}$ come sopra: per quanto visto, il valore sia di u che di $\tilde{u}$ in $\hat{t}$ deve essere compreso tra $-1-\varepsilon$ e $-1+2\varepsilon$; visto che la differenza tra le due funzioni è almeno 4ε, questo è ovviamente impossibile. Si ha quindi l'unicità della soluzione globale.

Per concludere, dobbiamo capire cosa succede con tempo iniziale 0 invece che $t_0 > 0$. Consideriamo le soluzioni dell'equazione che partono con un valore v_0 da un qualche tempo $t_0 > 0$ fissato e vanno *all'indietro*, ossia per tempi decrescenti. L'equazione ha senso per tutti i tempi $t > 0$, ed è localmente Lipschitziana, quindi abbiamo esistenza ed unicità di tali soluzioni in un qualche intervallo massimale che parte da t_0 e va all'indietro. Se u è una qualunque di queste soluzioni, si ha $u'(t) > -1$ se $u(t) \geq 0$ e $u'(t) < 1$ se $u(t) \leq 0$; di conseguenza tutte queste soluzioni rimangono limitate sul loro intervallo massimale. Ma allora, l'intervallo massimale è $(0, t_0)$ per qualunque scelta di v_0. Inoltre, ciascuna di queste soluzioni è Lipschitziana sul suo intervallo di definizione massimale, e quindi esiste il limite per $t \to 0^+$. In altre parole, per ogni scelta di v_0 esiste una funzione *continua* $u : [0, t_0] \to \mathbb{R}$, che sull'intervallo $(0, t_0)$ è di classe C^1 e risolve l'equazione $u'(t) = \operatorname{sen}(t) + |u(t)|^t \operatorname{sgn}(u(t))$, verificando $u(t_0) = v_0$. Chiamando u_0 il valore di u in $t = 0$, la u è quindi una soluzione del problema $(\bullet)$ per tempi fino a t_0, e chiaramente può essere estesa in modo unico ad una soluzione massimale (che come visto prima può essere globale o può non esserlo). Abbiamo quindi ottenuto che per qualche scelta di u_0 esistono soluzioni massimali del problema $(\bullet)$, e una sola di queste soluzioni è globale (quella che si ottiene partendo dall'unica soluzione globale relativa al punto di partenza t_0 e andando all'indietro fino al tempo 0).

Possiamo adesso notare che soluzioni massimali di $(\bullet)$ in effetti esistono per qualunque possibile $u_0 \in \mathbb{R}$. Infatti, per quanto visto finora abbiamo l'esistenza solo per gli u_0 che si ottengono come valori in $t = 0$ per soluzioni che partono da (t_0, v_0) e vanno all'indietro. Tuttavia, per continuità rispetto ai dati iniziali si trova che, per ogni t_0 fissato, la funzione $v_0 \mapsto u_0$ è una funzione continua, ed ovviamente crescente. Se quindi esiste una soluzione per un qualche $\tilde{u}_0$, ed un'altra soluzione per un qualche $\hat{u}_0 > \tilde{u}_0$, allora esistono soluzioni anche per tutti gli $u_0 \in (\tilde{u}_0, \hat{u}_0)$. Visto che prendendo t_0 abbastanza piccolo e $|v_0|$ abbastanza grande si possono trovare soluzioni con dato di partenza u_0 di modulo arbitrariamente grande e di segno qualunque, deduciamo finalmente che esistono soluzioni per ogni u_0.

Ricapitolando, abbiamo visto che per ogni $u_0 \in \mathbb{R}$ esiste almeno una soluzione del problema $(\bullet)$; tra tutte le soluzioni massimali, ce n'é esattamente una che è globale, e tale soluzione è anche limitata; tutte le altre soluzioni massimali esplodono (a $+\infty$ o a $-\infty$) in un tempo finito. Inoltre, due diverse soluzioni non possono incontrarsi in un tempo $t > 0$. L'unica cosa che resta da capire è se possano esistere due soluzioni diverse con lo stesso dato iniziale.

Consideriamo due soluzioni u ed $\tilde{u}$ per le quali si abbia $u(0) = \tilde{u}(0) = a \neq 0$. Allora per continuità vale $|u(t)| \wedge |\tilde{u}(t)| > |a|/2$ per tutti i t abbastanza piccoli. Di conseguenza,

$$\left|u'(t) - \tilde{u}'(t)\right| = |u(t)|^t - |\tilde{u}(t)|^t \leq \frac{3t}{a}\,|u(t) - \tilde{u}(t)| \leq |u(t) - \tilde{u}(t)|\,,$$

purché t sia abbastanza piccolo. Ma allora, deve valere $u = \tilde{u}$ in un piccolo intervallo $(0, t)$, e visto che sappiamo l'unicità delle soluzioni a partire da tempi strettamente positivi questo vuol dire che $u \equiv \tilde{u}$. Abbiamo quindi scoperto che vale l'unicità della soluione corrispondente a qualunque $u_0 \neq 0$.

Concludiamo notando che, invece, non c'è unicità per soluzioni corrispondenti ad $u_0 = 0$. Per fare questo, notiamo intanto che

$$t^t \geq e^{-1/e} > \frac{1}{2}\,,$$

e quindi esiste un qualche $\bar{t} > 0$ tale che per ogni $0 < t < \bar{t}$ si ha

$$\left(\frac{t}{2}\right)^t + \operatorname{sen}(t) = \frac{t^t}{2^t} + \operatorname{sen}(t) \geq \frac{1}{2}\,, \qquad -\left(\frac{t}{2}\right)^t + \operatorname{sen}(t) = -\frac{t^t}{2^t} + \operatorname{sen}(t) \leq -\frac{1}{2}\,,$$

visto che quando $t \to 0$ si ha che $\operatorname{sen}(t)$ tende a 0 e 2^t tende ad 1. Sia allora u una soluzione corrispondente ad un qualunque $u_0 > 0$. Per tempi sufficientemente piccoli si ha che $u'(t)$ è vicino quanto si vuole ad 1, quindi di certo si ha $u(t) \geq t/2$ per tutti i tempi abbastanza piccoli. La stima di poco fa assicura che, finché $u(t) \geq t/2$, si ha $u'(t) \geq 1/2$, purché sia $t \leq \bar{t}$. Di conseguenza, si ottiene $u(\bar{t}) \geq \bar{t}/2$. Analogamente, se u è una soluzione corrispondente a qualche $u_0 < 0$, lo stesso ragionamento dá $u(\bar{t}) \leq -\bar{t}/2$. Ma allora non vi può essere unicità delle soluzioni corrispondenti ad $u_0 = 0$, perché per ogni $-\bar{t}/2 < v < \bar{t}/2$ ci deve essere una soluzione che verifichi $u(0) = 0$ ed $u(\bar{t}) = v$.

Esercizio 3 (8 punti). *Si definisca*

$$A = \Big\{ x \in \mathbb{R}^4 :\, 1 \geq x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4 \geq 0 \Big\}\,.$$

(i) Si calcoli il volume di A.

(ii) Si consideri il bordo di A, e lo si esprima come un'unione finita di superfici parametriche.

(iii) Si calcoli il perimetro di A.

Si può riscrivere la definizione di A in modo equivalente come

$$A = \Big\{ x \in \mathbb{R}^4 :\, x_1 \in [0,1],\, x_2 \in [0,x_1],\, x_3 \in [0,x_2],\, x_4 \in [0,x_3] \Big\}\,;$$

a questo punto, è immediato ottenere il volume di A come

$$\begin{aligned}|A| &= \int_{x_1=0}^{1}\int_{x_2=0}^{x_1}\int_{x_3=0}^{x_2}\int_{x_4=0}^{x_3} 1\,dx_4\,dx_3\,dx_2\,dx_1 = \int_{x_1=0}^{1}\int_{x_2=0}^{x_1}\int_{x_3=0}^{x_2} x_3\,dx_3\,dx_2\,dx_1 \\ &= \int_{x_1=0}^{1}\int_{x_2=0}^{x_1} \frac{1}{2}\,x_2^2\,dx_2\,dx_1 = \int_{x_1=0}^{1} \frac{1}{6}\,x_1^3\,dx_1 = \frac{1}{24}\,.\end{aligned}$$

Per quanto riguarda il bordo di A, è semplice osservare che sia dato da tutti e soli i punti che appartengono ad A e per i quali almeno una delle disuguaglianze sia un'uguaglianza. Visto infatti che A è chiuso, è chiaro innanzitutto che il bordo sia contenuto in A; inoltre, se per un punto di A tutte le disuguaglianze nella definizione sono strette, è chiaro che tale punto sia nell'interno di A, e quindi non nel bordo; infine, se per un punto di A c'è almeno una disuguaglianza che sia un'uguaglianza, tale punto è arbitrariamente vicino a punti esterni ad A (quelli in cui vale la disuguaglianza opposta stretta), e quindi si tratta di un punto nel bordo. Possiamo allora definire

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \Big\{ 1 = x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4 \geq 0 \Big\}\,, & \Gamma_2 &= \Big\{ 1 \geq x_1 = x_2 \geq x_3 \geq x_4 \geq 0 \Big\}\,,\\ \Gamma_3 &= \Big\{ 1 \geq x_1 \geq x_2 = x_3 \geq x_4 \geq 0 \Big\}\,, & \Gamma_4 &= \Big\{ 1 \geq x_1 \geq x_2 \geq x_3 = x_4 \geq 0 \Big\}\,,\\ \Gamma_5 &= \Big\{ 1 \geq x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4 = 0 \Big\}\,.\end{aligned}$$

Per quanto detto sopra, il bordo di A è dato dall'unione dei cinque insiemi appena definiti. Si noti che tali insiemi non sono disgiunti, ma l'intersezione tra due qualunque di essi è un insieme bi-dimensionale, e quindi ha misura tri-dimensionale nulla; di conseguenza,

$$P(A) = Area(\Gamma_1) + Area(\Gamma_2) + Area(\Gamma_3) + Area(\Gamma_4) + Area(\Gamma_5)\,,$$

dove con "*Area*" indichiamo la misura tridimensionale dei pezzi di bordo di A. Partiamo da Γ_1, e notiamo che $\Gamma_1 = \varphi_1(D_1)$, essendo

$$D_1 = \Big\{ 1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4 \geq 0 \Big\}\,, \qquad \varphi_1(x_2,\, x_3,\, x_4) = (1,\, x_2,\, x_3,\, x_4)\,.$$

Dal momento che

$$D\varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,,$$

si ha

$$Area(\Gamma_1) = \int_{D_1} 1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 = \int_{x_2=0}^{1} \int_{x_3=0}^{x_2} \int_{x_4=0}^{x_3} 1\, dx_4\, dx_3\, dx_2 = \frac{1}{6}\,.$$

Analogamente, $\Gamma_5 = \varphi_5(D_5)$ con

$$D_5 = \Big\{1 \geq x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq 0\Big\}\,, \qquad\qquad \varphi_5(x_1,\, x_2,\, x_3) = (x_1,\, x_2,\, x_3,\, 0)\,,$$

e dunque anche $Area(\Gamma_5) = 1/6$. Consideriamo adesso Γ_2: si ha ancora $\Gamma_2 = \varphi_2(D_2)$, dove stavolta

$$D_2 = \Big\{1 \geq x_1 \geq x_3 \geq x_4 \geq 0\Big\}\,, \qquad\qquad \varphi_2(x_1,\, x_3,\, x_4) = (x_1,\, x_1,\, x_3,\, x_4)\,;$$

in questo caso, si ha

$$D\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,,$$

e allora

$$Area(\Gamma_2) = \int_{D_2} \sqrt{2}\, dx_1\, dx_3\, dx_4 = \frac{\sqrt{2}}{6}\,.$$

Nello stesso modo, anche le superfici di Γ_3 e Γ_4 sono pari a $\sqrt{2}/6$. Si conclude che

$$P(A) = \frac{3\sqrt{2}+2}{6}\,.$$

Esercizio 4 (8 punti)**.** *Sia* $D = \big\{x \in \mathbb{R}^4,\, (x_3, x_4) \neq (0,0)\big\}$, *e sia* ω *la 3-forma su* D *definita da*

$$\omega = 2x_1 \operatorname{sen}(x_2 x_4) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + x_1^2 x_2 \cos(x_2 x_4) dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4\,.$$

(i) Si dica se la forma ω *è chiusa.*

(ii) Si dica se la forma ω *è esatta.*

Un semplice conto assicura che

$$d\omega = 2x_1x_2 \cos(x_2x_4) dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + 2x_1x_2 \cos(x_2x_4) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 = 0\,,$$

e dunque la forma è chiusa. Si può ora considerare la 3-forma $\tilde{\omega}$ definita su tutto $\mathbb{R}^4$ con la stessa formula usata per definire ω su D; anche $\tilde{\omega}$ è chiusa, per lo stesso conto appena fatto, e dunque è esatta visto che è definita sull'intero $\mathbb{R}^4$. Esiste cioè una 2-forma $\tilde{\nu}$ su $\mathbb{R}^4$ tale che $d\tilde{\nu} = \tilde{\omega}$. Basta ora definire ν la 2-forma su D data dalla restrizione di $\tilde{\nu}$ al solo dominio D: per costruzione, si ha che $d\nu = \omega$, e quindi anche ω è esatta. Peraltro, si potrebbe notare che ω sia esatta anche notando che è il differenziale della forma

$$x_1^2 \operatorname{sen}(x_2 x_4) dx_2 \wedge dx_3\,.$$