Prova scritta per il corso di Analisi Matematica 2 con soluzioni
corso di laurea in Matematica
Università di Pisa
21/6/2024

Esercizio 1 (11 punti)**.** *Si definisca l'insieme* $A = \left\{x \in \mathbb{R}^N,\, \sum_{i=1}^N x_i = 1,\, x_i > 0\ \forall\, 1 \leq i \leq N\right\}$, *e per un qualsiasi assegnato* $\xi \in \mathbb{R}^N$ *si definisca* $f_\xi : A \to \mathbb{R}$ *come*

$$f_\xi(x) = x \cdot \xi + \sum_{i=1}^N x_i \ln(x_i)\,.$$

(i) Si determini la chiusura $D = \overline{A}$ *di* A.

(ii) Si dimostri che f_ξ *ammette un'estensione continua su* D*, che indicheremo con* g_ξ*, e che esistono punti di massimo e minimo globale di* g_ξ *su* D.

(iii) Si dimostri che g_ξ *è strettamente convessa.*

(iv) Si trovino tutti i punti di minimo globale per g_ξ *in* D.

(v) Si trovino tutti i punti di massimo globale per g_ξ *nel caso in cui* $\xi = 0$.

(vi) Si trovino tutti i punti di massimo globale per g_ξ *nel caso di un generico* ξ.

Si può notare facilmente che $D = \left\{x \in \mathbb{R}^N,\, \sum_{i=1}^N x_i = 1,\, x_i \geq 0\ \forall\, 1 \leq i \leq N\right\}$; infatti, è chiaro che questo insieme sia chiuso e contenga A, e d'altra parte ogni punto di $D \setminus A$ ammette punti di A a distanza arbitrariamente piccola.

Sappiamo che $\lim_{t\to 0^+} t \ln t = 0$; pertanto, definendo $\varphi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ come

$$\varphi(t) = \begin{cases} t \ln t & \text{per } t > 0\,, \\ 0 & \text{per } t = 0\,, \end{cases}$$

si ha che φ è una funzione continua che coincide con $t \ln t$ su tutto $(0, +\infty)$. Se definiamo quindi, per un qualunque $x \in D$,

$$g_\xi(x) = x \cdot \xi + \sum_{i=1}^N \varphi(x_i)\,,$$

si ha che g_ξ è una funzione continua che coincide con f_ξ su tutto A, e dunque è l'estensione richiesta. Visto che D per definizione è chiuso e limitato, dunque compatto, la funzione g_ξ ammette sicuramente massimi e minimi globali.

Discutiamo adesso la stretta convessità di g_ξ, che ha senso visto che il dominio D è convesso. Notiamo intanto che la funzione $x \mapsto x \cdot \xi$ è lineare, e quindi convessa (su tutto $\mathbb{R}^N$, quindi in particolare anche su D). Inoltre, la funzione φ è strettamente convessa, visto che la sua derivata seconda è definita e strettamente positiva su tutto $(0, +\infty)$. Ma allora, presi due punti qualunque x, $y \in D$ e preso $0 < \lambda < 1$, si ha banalmente

$$\varphi\big((\lambda x + (1-\lambda) y)_i\big) = \varphi\big(\lambda x_i + (1-\lambda) y_i\big) < \lambda \varphi(x_i) + (1-\lambda)\varphi(y_i)\,,$$

e quindi sommando questa disuguaglianza per tutti gli $1 \leq i \leq N$ si ottiene la stretta convessità di g_ξ.

La stretta convessità di g_ξ ci assicura che un eventuale punto critico di g_ξ nella parte "interna" di D, ossia su A (si parla di punto critico nel senso della condizione di Lagrange, visto che g_ξ è definita solo su D) è sicuramente un punto di minimo globale, oltretutto unico. Invece, i punti di massimo globale si trovano necessariamente al di fuori della "parte interna", ossia su $D \setminus A$. La condizione di Lagrange, corrispondente alla funzione $h(x) = \sum x_i$, si scrive quindi come $\nabla f_\xi = \lambda \nabla h$, ossia

$$\xi_i + \ln(x_i) + 1 = \lambda \qquad \forall\, 1 \leq i \leq N\,.$$

Questa condizione si può riscrivere come

$$x_i = Ce^{-\xi_i} \qquad \forall\, 1 \leq i \leq N$$

per una qualche costante C, e la condizione $h(x) = 1$ determina subito il valore della costante, ossia $\sum_{i=1}^N e^{-\xi_i}$. In altre parole, la condizione di Lagrange permette di trovare come punto critico il punto

$$P = \frac{1}{\sum_{i=1}^N e^{-\xi_i}} \Big(e^{-\xi_1},\, e^{-\xi_2},\, \dots\,,\, e^{-\xi_N} \Big).$$

Come già detto prima, tale punto è sicuramente l'unico punto di minimo globale.

Occupiamoci adesso dei punti di massimo globale, partendo dal caso semplice in cui $\xi = 0$. Si ricordi che la funzione φ (ossia la funzione $t \ln t$ estesa a 0 in 0 per continuità) è una funzione negativa su $[0, 1]$, e strettamente negativa su $(0, 1)$. Di conseguenza, la funzione f_0 è sicuramente negativa, in quanto somma di N termini che lo sono. Tuttavia, è facile osservare che ci sono punti in cui f_0 vale 0: tali punti sono tutti e soli quelli in cui ciascuna coordinata vale 0 oppure 1, ed essendo in D vi sono esattamente N punti con questa caratteristica, ossia i punti $P_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ con tutte le coordinate pari a 0 tranne la i-esima (con un qualunque $1 \leq i \leq N$) che vale 1. Questi N punti sono quindi tutti e soli i punti di massimo globale per f_0.

Consideriamo infine f_ξ con $\xi \neq 0$. La funzione $x \mapsto x \cdot \xi$ è chiaramente massimizzata, sul dominio D, dai punti che hanno tutte le coordinate nulle tranne quelle corrispondenti ad un indice i per il quale il valore di ξ_i sia massimo. In particolare, se vi è un unico i corrispondente al massimo valore di ξ_i, l'unico punto di massimo di $x \cdot \xi$ su D è il punto P_i, mentre se vi sono due tali indici i' e i'' i punti di massimo sono tutti e soli quelli del tipo $\lambda P_{i'} + (1 - \lambda) P_{i''}$ con $0 \leq \lambda \leq 1$, e così via. Ma allora, i punti di massimo globale di f_ξ sono tutti e soli i punti P_i con indici i per i quali il valore di ξ_i sia massimo, visto che sono tutti e soli i punti per i quali entrambe le parti di f_ξ sono massime.

Esercizio 2 (11 punti)**.** *Si consideri il problema*

$$\begin{cases} u'(t) = \dfrac{|u(t)|}{\sqrt{t^2+1}} + \dfrac{1}{t^4+1} & \textit{per } t > 0\,, \\ u(0) = u_0\,. \end{cases}$$

(i) Si discutano, al variare di $u_0 \in \mathbb{R}$, esistenza e unicità di soluzioni globali $u \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^+)$.

(ii) Si dimostri che ogni soluzione che sia positiva in almeno un punto tende a $+\infty$.

(iii) Si dimostri che per ogni $M < 0$ esiste qualche soluzione che per $t = 1$ abbia un valore minore di M.

*(iv) Si dimostri che esistono soluzioni limitate, e si discuta il loro limite per $t \to +\infty$ (*suggerimento: si confronti $u(t)$ con $v(t) := -1/t^2$ per $t > 1$*).*

(v) Si dimostri che il problema, considerato per $t \in \mathbb{R}$ (e non solo per $t \in \mathbb{R}^+$) ammette soluzioni globali, ma nessuna di esse è limitata.

Definiamo per brevità
$$F(t,y) = \frac{|y|}{\sqrt{t^2+1}} + \frac{1}{t^4+1}\,,$$
in modo che il problema considerato sia del tipo $u'(t) = F(t,u(t))$. Visto che $\sqrt{t^2+1} \geq 1$ per qualunque t, si ha che F è continua nelle variabili t, y e globalmente Lipschitziana nella variabile y. Sappiamo quindi che per qualunque u_0 si ha esistenza ed unicità di una soluzione globale.

Visto che $F > 0$ ovunque, tutte le soluzioni sono strettamente crescenti, e quindi ammettono un limite, finito o meno, per $t \to +\infty$. Consideriamo una soluzione che sia positiva per un certo istante, e quindi anche strettamente positiva per tutti i tempi successivi. In particolare, esiste un qualche $\bar t \geq 1$ tale che $u(\bar t) = K > 0$. Ma allora, per qualsiasi $t \geq \bar t$ si ha
$$u'(t) \geq \frac{K}{\sqrt{t^2+1}} \geq \frac{K}{2t}\,.$$
Ma allora per ogni $t > \bar t$ si ha
$$u(t) = u(\bar t) + \int_{\bar t}^t u'(s)\,ds \geq K + \int_{\bar t}^t \frac{K}{2s}\,ds = K + \frac{K}{2}\Big(\ln(t) - \ln(\bar t)\Big)\,,$$
e questo assicura che u tende a $+\infty$, come richiesto.

Sia ora $M < 0$; si deve mostrare che esista qualche u_0 tale che la u corrispondente verifichi $u(1) < M$. Una possibilità di farlo è considerare il problema per tempi decrescenti: tutto quanto detto finora continua ad essere vero, in particolare tutte le soluzioni sono globali all'indietro; è quindi possibile considerare la soluzione che parte al tempo $t = 1$ con $u(1) = M - 1$ e farla muovere verso tempi decrescenti. Visto che è una soluzione globale, sarà definita per tutti i tempi tra 1 e $-\infty$, e si può quindi semplicemente definire u_0 il valore di tale soluzione in 0.

Consideriamo adesso il problema ausiliario $v'(t) = 2\,\frac{|v(t)|}{t}$ per tempi $t \geq 1$ con dato iniziale $v(1) = -1$. E' facile notare che la soluzione sia data da
$$v(t) = -\frac{1}{t^2}\,,$$
e quindi in particolare resti negativa per tutti i tempi positivi. Consideriamo adesso una soluzione u del problema originale, che verifichi $u(1) < -1$: tale soluzione esiste per quanto visto al punto precedente. Vogliamo mostrare che rimanga $u < v$ per tutti i tempi $t \geq 1$: questo in particolare assicurerà che la u sia una soluzione limitata, visto che è crescente. Se per assurdo esistesse un primo istante $\tau > 1$ tale che $u(\tau) = v(\tau)$, si avrebbe
$$u'(\tau) = \frac{|u(\tau)|}{\sqrt{\tau^2+1}} + \frac{1}{\tau^4+1} = \frac{1}{\tau^2\sqrt{\tau^2+1}} + \frac{1}{\tau^4+1} \leq \frac{1}{\tau^3} + \frac{1}{\tau^4} < \frac{2}{\tau^3} = v'(\tau)\,.$$

Visto però che $u < v$ nell'intervallo $(1, \tau)$ mentre $u(\tau) = v(\tau)$, deve essere $u'(\tau) \geq v'(\tau)$, e si è quindi trovato l'assurdo cercato. Abbiamo quindi dimostrato che esistano soluzioni limitate al problema. D'altra parte, tutte queste soluzioni devono tendere a 0 per $t \to +\infty$: infatti, sicuramente non possono tendere ad un limite strettamente positivo, visto che abbiamo già notato che una soluzione che diventa positiva deve necessariamente tendere a $+\infty$. E d'altra parte, ragionando in modo simile a quanto già fatto sopra, se $u(t) \to -L$ per un qualche $L > 0$, allora in particolare $u(t) < -L$ per tutti i tempi, e dunque per tutti i tempi $t \geq 1$ si ha

$$u'(t) > \frac{L}{\sqrt{t^2+1}} > \frac{L}{2t}\,.$$

E dal momento che $\int_1^{+\infty} L/2t\, dt = +\infty$, $u(t) - u(1)$ diventa arbitrariamente grande e quindi è impossibile che u rimanga sempre minore di $-L - u(1)$. E' quindi provato che tutte le soluzioni limitate tendono a 0.

Infine, se si vuole considerare il problema per tutti i tempi $t \in \mathbb{R}$, è sufficiente osservare che tutto quanto detto per tempi positivi resta vero anche per tempi negativi; in particolare, una soluzione che parta dal tempo $t = 0$ e vada all'indietro è sempre una soluzione globale, è sempre decrescente (ossia con derivata positiva), e può tendere a $-\infty$ oppure a 0. Più precisamente, tende senz'altro a $-\infty$ se esiste un punto in cui è negativa. Ma allora non possono esistere soluzioni limitate, perché tali soluzioni dovrebbero essere sempre negative per evitare di tendere a $+\infty$ per tempi $t \to +\infty$, ed anche sempre positive per evitare di tendere a $-\infty$ per tempi $t \to -\infty$. Le soluzioni globali sono quindi sempre illimitate.

Esercizio 3 (11 punti)**.** *Dati due numeri naturali $k \leq N$, si definisca C come l'insieme delle k-forme su $\mathbb{R}^N$ che si possono esprimere come*

$$\omega = \sum_I p_I(x) dx_I\,,$$

dove la sommatoria è fatta su tutti i multiindici $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ con $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq N$, dove come al solito dx_I è un'abbreviazione per $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, e dove tutti i p_I sono polinomi di primo grado su $\mathbb{R}^N$. Si definisca poi $\widetilde{C}$ come il sottoinsieme di C fatto da tutte le forme chiuse appartenenti a C.

(i) Si dimostri che C e $\widetilde{C}$ sono due spazi vettoriali.
(ii) Si calcoli la dimensione di C.
(iii) Si calcoli la dimensione di $\widetilde{C}$ nel caso in cui $k = N - 1$.
(iv) Si calcoli la dimensione di $\widetilde{C}$ nel caso in cui $k = 1$.

Il fatto che C e $\widetilde{C}$ siano due spazi vettoriali è un controllo banale; infatti, somme e prodotti per scalari di forme che si possono scrivere come $\sum_I p_I(x) dx_I$ con i p_I polinomi di primo grado sono ancora dello stesso tipo, ed inoltre somme e prodotti per scalari di forme chiuse sono ancora chiuse.

Per quanto riguarda la dimensione di C, basta ricordare che i multiindici I di lunghezza k in dimensione N sono $\binom{N}{k}$; inoltre un polinomio di primo grado in $\mathbb{R}^N$ si può scrivere in modo univoco come $a + b_1 x_1 + \cdots + b_N x_N$. Consideriamo quindi tutte le forme del tipo dx_I, oppure

$x_i dx_I$, dove I è un multiindice e $1 \le i \le N$ è un indice. Tutte queste forme appartengono a C ed ovviamente lo generano, e d'altra parte sono anche chiaramente indipendenti. La dimensione di C è quindi

$$(N+1)\binom{N}{k}.$$

Consideriamo adesso il caso $k = N-1$, per il quale quindi la dimensione di C è $N(N+1)$. Per un generico $1 \le i \le N$, per brevità scriveremo $\widehat{dx_i}$ per indicare dx_I, dove I è il multiindice che contiene tutti gli indici tra 1 ed N eccetto i. Avendo già trovato una base di C nel caso generale, possiamo scrivere un generico elemento di C come

$$\omega = \sum_{i=1}^{N} \Big(a^i + \sum_{j=1}^{N} b^i_j x_j\Big)\widehat{dx_i}\,.$$

Ma allora, si ha che

$$d\omega = \sum_{i=1}^{N} (-1)^{i-1}\, b^i_i\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots dx_N\,.$$

Di conseguenza $d\omega = 0$ se e solo se vale

$$b^1_1 - b^2_2 + b^3_3 \cdots + (-1)^{N-1} b^N_N = 0\,.$$

In altre parole, $\widetilde{C}$ è un iperpiano di codimensione 1 contenuto in C, e quindi la sua dimensione è $N(N+1) - 1$.

Consideriamo infine il caso $k = 1$, per il quale la dimensione di C è ancora $N(N+1)$. Stavolta, possiamo scrivere il generico elemento di C come

$$\omega = \sum_{i=1}^{N} \Big(a^i + \sum_{j=1}^{N} b^i_j x_j\Big)\, dx_i\,.$$

Si ha allora

$$d\omega = \sum_{i,j=1}^{N} b^i_j dx_j \wedge dx_i\,.$$

Stavolta, quindi, $d\omega = 0$ se e solo se per tutte le coppie (i,j) si ha $b^i_j = b^j_i$. Visto che tali coppie sono $N(N-1)/2$, la codimensione di $\widetilde{C}$ in C in questo caso è appunto $N(N-1)/2$. La dimensione di $\widetilde{C}$ è quindi

$$N(N+1) - \frac{N(N-1)}{2}\,.$$