Secondo compitino per il corso di Analisi Matematica 2
corso di laurea in Matematica
Università di Pisa
27/5/2024

Tempo a disposizione: 150 minuti.

Esercizio 1 (12 punti)**.** Dato $N \geq 2$, si consideri l'insieme

$$A_N = \Big\{ x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^{N-1} x_i^2 \leq x_N^{-1/2},\, x_N \geq 1 \Big\} .$$

(i) Si dica per quali N l'insieme A_N ha volume finito.

(ii) Si calcoli il volume di A_N per gli N del punto precedente (come al solito, si indichi con ω_H il volume della palla unitaria in $\mathbb{R}^H$ per un qualunque $H \geq 1$).

(iii) Si dica per quali N l'insieme A_N ha perimetro finito.

(iv) Si calcoli, se esiste,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{P(A_N)}{\omega_{N-1}} .$$

Esercizio 2 (12 punti)**.** Per ogni k-forma α almeno di classe C^3 su $\mathbb{R}^N$, si definisca la $(k+1)$-forma $\tilde{d}\alpha$ come segue. Scrivendo

$$\alpha = \sum_I \varphi_I(x)\, dx_I ,$$

dove la somma è fatta su tutti i multi-indici $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ con $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq N$, e dove dx_I è un'abbreviazione per $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, si pone

$$\tilde{d}\alpha = \sum_I \sum_{j=1}^N \frac{\partial \varphi_I}{\partial x_j}(x)\, dx_{j+1} \wedge dx_I ,$$

dove, se $j = N$, per "dx_{j+1}" si intende "dx_1".

(i) Si dica se è vero che $\tilde{d}(\tilde{d}\alpha) = 0$.

(ii) Si dica se è vero che $d(\tilde{d}\alpha) = 0$.

(iii) Si dica se è vero che $\tilde{d}\big(d(\tilde{d}\alpha)\big) = 0$.

(iv) Si dica se è vero che $\tilde{d}(d\alpha) = d(\tilde{d}\alpha)$.

Esercizio 3 (12 punti)**.** Si consideri la superficie 2-dimensionale in $\mathbb{R}^3$ definita come

$$\Gamma = \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\, (1+x^2)(1+y^2)z = 1 \Big\} .$$

Si definiscano gli insiemi $\widetilde{F}_n$, $\widetilde{G}_n \subseteq \mathbb{R}^+$ come

$$\widetilde{F}_n = \big\{ t > 0,\ \operatorname{sen}(t^n) > 0 \big\} , \qquad \widetilde{G}_n = \Big\{ t > 0,\, t - [t] > \frac{1}{n} \Big\} ,$$

dove $[t]$ è la parte intera di t, e gli insiemi F_n, $G_n \subseteq \mathbb{R}^3$ come

$$F_n = \big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\, z = 0,\, \sqrt{x^2+y^2} \in \widetilde{F}_n \big\} , \quad G_n = \big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\, z = 0,\, \sqrt{x^2+y^2} \in \widetilde{G}_n \big\} .$$

Infine, si definiscano le funzioni f_n, $g_n : \Gamma \to \mathbb{R}$ come

$$f_n(P) = \operatorname{dist}(P, F_n)\,, \qquad\qquad g_n(P) = \operatorname{dist}(P, G_n)\,,$$

dove la distanza tra un punto P ed un insieme Ω è come sempre l'infimo delle distanze tra P e gli elementi di Ω.
Si dica se esistono finiti i limiti

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Gamma f_n\, dS\,, \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} \int_\Gamma g_n\, dS\,,$$

dove dS è la misura di superficie su Γ.