Prova scritta per il corso di Analisi Matematica 2
corso di laurea in Matematica
Università di Pisa
23/7/2024

Tempo a disposizione: 180 minuti.

Esercizio 1 (8 punti)**.** Si definiscano l'insieme $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z \geq x^2+y^2\}$ e la funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y,z) = e^{y-z^2}\left(x^2+y+z^2\right).$$

(i) Si dimostri che la funzione ammette massimo e minimo globali.
(ii) Si dimostri che tutti i punti di massimo e minimo globali appartengono al bordo di Ω.
(iii) Si dimostri che per qualunque punto di massimo e minimo globale vale $y^2 = z$.
(iv) Si dimostri che per qualunque punto di minimo globale si ha $y \in (-1,0)$, e per qualunque punto di massimo globale si ha $y \in (0,1)$.

Esercizio 2 (8 punti)**.** Si consideri il problema

$$\begin{cases} u'(t) = \cos\left(e^{-u(t)}\right) \qquad \text{per } t > 0\,, \\ u(0) = u_0\,. \end{cases}$$

(i) Si discuta, al variare di $u_0 \in \mathbb{R}$, la questione dell'esistenza e unicità di soluzioni massimali o globali $u \in \mathrm{C}^1([0,T))$.
(ii) Si determini, per ogni $u_0 \in \mathbb{R}$, se esiste il limite di $u(t)$ per $t \to T$, ed in caso affermativo lo si calcoli.
(iii) Per le soluzioni globali di questo problema che esplodono a $+\infty$ o a $-\infty$, si dica se esiste un asintoto obliquo.

Esercizio 3 (8 punti)**.** Si definisca $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leq 1\}$, e sia X l'insieme delle funzioni continue da D in D. Si definisca $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ come

$$d(f,g) = \int_D \big|f(x,y) - g(x,y)\big|\,dx\,dy\,.$$

Sia poi $\{f_n\} \subseteq X$ una successione di funzioni di classe C^1 tali che

$$|Df_n(x,y)| = |f_n(x,y)|^n\,.$$

(i) Si dimostri che d è una distanza su X.
(ii) Si dimostri che esiste una sottosuccessione della $\{f_n\}$ che converge ad una funzione $f \in X$.
(iii) Si dimostri che se esiste un punto $P \in D$ tale che $|f(P)| < 1$, allora la f è costante.
(iv) Si dimostri che f può non ammettere nessun punto in cui $|f| < 1$.
(v) Si dimostri che f può non essere costante.

Esercizio 4 (8 punti)**.** Si consideri, su $\mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$, la forma differenziale definita come

$$\omega(x,y) := \frac{ydx + (Ax+By)dy}{x^2+2xy+5y^2}\,,$$

dove $A,\ B \in \mathbb{R}$.

(i) Trovare i parametri A, B in modo che ω sia chiusa.
(ii) Determinare un potenziale per la forma definito su $\{(x,y),\ y > 0\}$.
(iii) Dire se ω è anche esatta.
(iv) Calcolare $\int_\gamma \omega$ dove $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ è definita da

$$\gamma(t) := (-t, 1+t+t^2)\,.$$