

Prova scritta per il corso di Analisi Matematica 2  
corso di laurea in Matematica  
Università di Pisa  
21/6/2024

Tempo a disposizione: 180 minuti.

**Esercizio 1** (8 punti). Si definisca l'insieme  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N, x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_N \geq 0\}$ , e sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita come

$$f(x) = \sum_{i=1}^N (-1)^i x_i^{2i}.$$

- (i) Si trovino, al variare di  $N \in \mathbb{N}$ , il sup e l'inf di  $f$  in  $\Omega$ .
- (ii) Si dimostri che  $f$  non ammette nessun punto di minimo locale in  $\Omega$ .
- (iii) Si dimostri che  $f$  ammette esattamente un punto di massimo locale in  $\Omega$  se  $N = 2$ .
- (iv) Si discuta il numero di massimi locali di  $f$  in  $\Omega$  per qualunque  $N \geq 3$ .

**Esercizio 2** (8 punti). Si consideri il problema

$$(\bullet) \begin{cases} u'(t) = \sin(t) + |u(t)|^t \operatorname{sgn}(u(t)) & \text{per } t > 0, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

dove

$$\operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} 1 & \text{se } a > 0, \\ -1 & \text{se } a < 0, \\ 0 & \text{se } a = 0. \end{cases}$$

- (i) Si discutano, al variare di  $u_0 \in \mathbb{R}$ , esistenza e unicità di soluzioni massimali  $u \in C^1([0, T])$ .
- (ii) Si dimostri che esiste una soluzione del problema che esplose a  $+\infty$  in tempo finito, ed un'altra che esplose a  $-\infty$  in tempo finito.
- (iii) Si dica se esistono soluzioni globali del problema  $(\bullet)$ .
- (iv) Si dica se esistono soluzioni globali non limitate di  $(\bullet)$ .
- (v) Si dica quante sono le soluzioni globali di  $(\bullet)$ .

**Esercizio 3** (8 punti). Si definisca

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : 1 \geq x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4 \geq 0 \right\}.$$

- (i) Si calcoli il volume di  $A$ .
- (ii) Si consideri il bordo di  $A$ , e lo si esprima come un'unione finita di superfici parametriche.
- (iii) Si calcoli il perimetro di  $A$ .

**Esercizio 4** (8 punti). Sia  $D = \{x \in \mathbb{R}^4, (x_3, x_4) \neq (0, 0)\}$ , e sia  $\omega$  la 3-forma su  $D$  definita da

$$\omega = 2x_1 \sin(x_2 x_4) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + x_1^2 x_2 \cos(x_2 x_4) dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4.$$

- (i) Si dica se la forma  $\omega$  è chiusa.
- (ii) Si dica se la forma  $\omega$  è esatta.