Prova scritta per il corso di Analisi Matematica 2
corso di laurea in Matematica
Università di Pisa
13/9/2024

Tempo a disposizione: 165 minuti.

Esercizio 1 (11 punti)**.** Si definisca l'insieme $A = \left\{x \in \mathbb{R}^N,\, \sum_{i=1}^N x_i = 1,\, x_i > 0\ \forall\, 1 \leq i \leq N\right\}$, e per un qualsiasi assegnato $\xi \in \mathbb{R}^N$ si definisca $f_\xi : A \to \mathbb{R}$ come

$$f_\xi(x) = x \cdot \xi + \sum_{i=1}^N x_i \ln(x_i)\,.$$

(i) Si determini la chiusura $D = \overline{A}$ di A.
(ii) Si dimostri che f_ξ ammette un'estensione continua su D, che indicheremo con g_ξ, e che esistono punti di massimo e minimo globale di g_ξ su D.
(iii) Si dimostri che g_ξ è strettamente convessa.
(iv) Si trovino tutti i punti di minimo globale per g_ξ in D.
(v) Si trovino tutti i punti di massimo globale per g_ξ nel caso in cui $\xi = 0$.
(vi) Si trovino tutti i punti di massimo globale per g_ξ nel caso di un generico ξ.

Esercizio 2 (11 punti)**.** Si consideri il problema

$$\begin{cases} u'(t) = \dfrac{|u(t)|}{\sqrt{t^2+1}} + \dfrac{1}{t^4+1} \qquad \text{per } t > 0\,, \\ u(0) = u_0\,. \end{cases}$$

(i) Si discutano, al variare di $u_0 \in \mathbb{R}$, esistenza e unicità di soluzioni globali $u \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^+)$.
(ii) Si dimostri che ogni soluzione che sia positiva in almeno un punto tende a $+\infty$.
(iii) Si dimostri che per ogni $M < 0$ esiste qualche soluzione che per $t = 1$ abbia un valore minore di M.
(iv) Si dimostri che esistono soluzioni limitate, e si discuta il loro limite per $t \to +\infty$ (*suggerimento: si confronti $u(t)$ con $v(t) := -1/t^2$ per $t > 1$*).
(v) Si dimostri che il problema, considerato per $t \in \mathbb{R}$ (e non solo per $t \in \mathbb{R}^+$) ammette soluzioni globali, ma nessuna di esse è limitata.

Esercizio 3 (11 punti)**.** Dati due numeri naturali $k \leq N$, si definisca C come l'insieme delle k-forme su $\mathbb{R}^N$ che si possono esprimere come

$$\omega = \sum_I p_I(x) dx_I\,,$$

dove la sommatoria è fatta su tutti i multiindici $I = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ con $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq N$, dove come al solito dx_I è un'abbreviazione per $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, e dove tutti i p_I sono polinomi di primo grado su $\mathbb{R}^N$. Si definisca poi $\widetilde{C}$ come il sottoinsieme di C fatto da tutte le forme chiuse appartenenti a C.

(i) Si dimostri che C e $\widetilde{C}$ sono due spazi vettoriali.
(ii) Si calcoli la dimensione di C.
(iii) Si calcoli la dimensione di $\widetilde{C}$ nel caso in cui $k = N - 1$.
(iv) Si calcoli la dimensione di $\widetilde{C}$ nel caso in cui $k = 1$.