DISTRIBUZIONI E TRASFORMATA DI FOURIER

Abstract. Queste dispense ripercorrono sostanzialmente quanto fatto riguardo ai temi delle Distrubuzioni e della Trasformata di Fourier nel corso "Analisi Superiore", nel semestre invernale dell'A.A. 2021–2022.

1. Distribuzioni

In questo capitolo ci occupiamo dei concetti principali della teoria delle distribuzioni, introdotte formalmente da L. Schwartz.

1.1. **Definizione di $\mathscr{D}(\Omega)$ e $\mathscr{D}'(\Omega)$.** Cominciamo subito col fissare alcune notazioni basilari.

Definizione 1.1. *Dato un insieme aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, indichiamo con $\mathscr{D}(\Omega)$ lo spazio vettoriale formato dalle funzioni C^∞ da $\mathbb{R}^N$ in $\mathbb{R}$ aventi un supporto compatto e contenuto in Ω.*

Prima di tutto vogliamo dotare $\mathscr{D}(\Omega)$ di una struttura topologica, che ci servirà principalmente per poter passare ai limiti. Daremo quindi la seguente nozione.

Definizione 1.2. *Si dice che la successione $\{\varphi_k,\, k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathscr{D}(\Omega)$ converge a $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ (brevemente, $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi$) se e solo se esiste $K \subseteq \Omega$ compatto tale che i supporti di tutte le funzioni φ_k sono contenuti in K, e le funzioni φ_k e le loro derivate di qualsiasi ordine tendono uniformemente a φ e alle sue derivate.*

Ovviamente un concetto di convergenza non è significativo se non è indotto da qualche topologia, quindi dobbiamo verificare che effettivamente esista una topologia su $\mathscr{D}(\Omega)$ che induca la nozione di convergenza appena presentata; lo vediamo in una breve parentesi apposita.

1.1.1. *La topologia su $\mathscr{D}(\Omega)$. Prima di tutto scegliamo un'esaustione di compatti K_m per Ω; ossia,*

$$K_m \subseteq K_{m+1}\ \forall\, m \in \mathbb{N}, \qquad \Omega = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m\,.$$

Dotiamo ora lo spazio delle funzioni $\mathrm{C}^\infty(\Omega)$ delle (semi-)norme $\|\cdot\|_{m,k}$, le norme del sup di tutte le derivate in $K_{m+1} \setminus \overset{\circ}{K}_m$ fino all'ordine k, cioè

$$\|\varphi\|_{m,k} := \max\Big\{ |D^\alpha \varphi(x)| :\ |\alpha| \leq k,\ x \in K_{m+1} \setminus \overset{\circ}{K}_m \Big\}\,.$$

Finalmente, diamo una base della topologia su $\mathscr{D}(\Omega)$ come segue: presa una funzione $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, una successione di interi $\mathbb{N} \ni m \mapsto k(m) \in \mathbb{N}$, ed una successione reale positiva $\mathbb{N} \ni m \mapsto \lambda(m) \in \mathbb{R}^+$, definiamo l'aperto

$$\mathscr{D}_{\varphi,k,\lambda} := \Big\{ \psi \in \mathscr{D}(\Omega) :\ \forall\, m \in \mathbb{N},\ \|\psi - \varphi\|_{m,k(m)} < \lambda(m) \Big\}\,;$$

la base è data dall'insieme dei $\mathscr{D}_{\varphi,k,\lambda}$ al variare della funzione φ e delle successioni $k(m)$ e $\lambda(m)$.

Che questa sia la base di una topologia è chiaro, in quanto si osserva molto facilmente che le intersezioni finite di elementi del tipo $\mathscr{D}_{\varphi,k,\lambda}$ sono unioni di oggetti dello stesso tipo; dobbiamo allora solo verificare che la nozione di convergenza indotta da questa topologia sia proprio quella introdotta dalla Definizione 1.2.

Prima di tutto, osserviamo che se $\varphi_j \to \varphi$ secondo la topologia appena introdotta, allora deve esistere un compatto K_m che contenga i supporti di tutte le funzioni φ_j: infatti, se non fosse così, l'insieme $\mathbb{N}' = \big\{m \in \mathbb{N} : \ \exists\, j(m),\, \|\varphi_{j(m)} - \varphi\|_{m,0} > 0\big\}$ sarebbe infinito; definendo allora $\lambda(m) = 1$ per $m \notin \mathbb{N}'$, e

$$\lambda(m) := \frac{\|\varphi_{j(m)} - \varphi\|_{m,0}}{2}$$

per $m \in \mathbb{N}'$, si avrebbe per definizione che $\varphi_{j(m)} \notin \mathscr{D}_{\varphi,0,\lambda}$ per ogni $m \in \mathbb{N}'$. D'altra parte, visto che ogni φ_j sta in $\mathscr{D}(\Omega)$ e quindi ha supporto compatto in Ω, la successione $\mathbb{N}' \ni m \mapsto j(m) \in \mathbb{N}$ è divergente, e quindi si hanno infiniti indici j per cui φ_j non appartiene all'intorno $\mathscr{D}_{\varphi,0,\lambda}$ di φ, il che è contro all'ipotesi che φ_j converga a φ secondo la nuova topologia.

Allora, date una successione $\{\varphi_j\}$ ed una φ in $\mathscr{D}(\Omega)$, il fatto che tutte le funzioni siano supportate in un unico compatto K_m è una condizione necessaria per la convergenza di φ_j a φ sia secondo la nuova topologia che secondo la Definizione 1.2; a questo punto, per concludere è sufficiente osservare che tra le funzioni supportate in K_m la nuova topologia è generata semplicemente dalle palle secondo le norme $\|\cdot\|_{m,k}$ al variare di k, e quindi la nuova convergenza coincide effettivamente con la convergenza uniforme di tutte le derivate di qualsiasi ordine e dunque coincide con la convergenza introdotta nella Definizione 1.2.

Chiusa la parentesi, possiamo adesso definire lo spazio delle distribuzioni come segue.

Definizione 1.3. *Si definisce* spazio delle distribuzioni *il duale $\mathscr{D}'(\Omega)$ di $\mathscr{D}(\Omega)$, ossia l'insieme di tutti i funzionali lineari e continui da $\mathscr{D}(\Omega)$ a $\mathbb{R}$.*

Si noti che lo spazio $\mathscr{D}(\Omega)$ che stiamo considerando è molto piccolo e con una topologia molto fine; ci dobbiamo quindi aspettare che lo spazio delle distribuzioni sia estremamente vasto. In effetti $\mathscr{D}'(\Omega)$ contiene in maniera naturale tutti gli spazi di funzioni e tutte le misure, come vediamo subito.

Lemma 1.4. *Ogni funzione L^p ed ogni misura corrispondono in modo naturale ad una distribuzione.*

Proof. Sia $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$: è allora definito in modo ovvio un funzionale da $\mathscr{D}(\Omega)$ ad $\mathbb{R}$ come $\varphi \mapsto \int_\Omega \varphi\, d\mu$. Che questo funzionale sia lineare è chiaro, quindi dobbiamo solo verificare che sia continuo. Per farlo, grazie appunto alla linearità, basta prendere una successione $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$ e controllare che $\int_\Omega \varphi\, d\mu \to 0$. Ma in effetti, visto che $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$, in particolare $\|\varphi_j\|_{\sup} \to 0$, e quindi $\langle \mu, \varphi_j\rangle := \int \varphi_j\, d\mu \to 0$.

Consideriamo ora, invece, una $f \in L^p(\Omega)$. Definendo il funzionale $\varphi \mapsto \int_\Omega f\varphi$, che è chiaramente lineare, ci riduciamo come prima a verificare la sua continuità in 0. Se quindi $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$, si ha anche che le norme $L^{p'}$ delle φ_j tendono a 0, visto che le φ_j tendono a zero uniformemente in un qualche compatto. Si ha quindi $\int f\varphi_j\, dx \leq \|f\|_{L^p} \|\varphi_j\|_{L^{p'}} \to 0$, da cui segue la tesi. $\square$

D'ora in poi diremo allora semplicemente che una misura, o una funzione sommabile, o una C^∞, *sono* delle distribuzioni, invece di dire che *corrispondono* a delle distribuzioni, e indicheremo con lo stesso simbolo le distribuzioni a cui corrispondono quando questo non generi ambiguità. E' fondamentale notare che, se una distribuzione $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ è tale che

$$|\langle T, f\rangle| \leq C\,\|f\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

per ogni funzione $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ e per un certo $1 < p \leq +\infty$, allora per densità di $\mathscr{D}(\Omega)$ in $L^{p'}(\Omega)$ possiamo dedurre che $T \in (L^{p'})' \approx L^p$. Allo stesso modo, se

$$|\langle T, f\rangle| \leq C\,\|f\|_{\sup},$$

allora $f \in C_b(\Omega)'$ e quindi $f \in \mathcal{M}(\Omega)$.

Esempio 1.5. Un caso particolare di distribuzione è la *Delta di Dirac*, cioè la misura δ tale che $\langle \delta, f\rangle := f(0)$ per ogni $f \in C_b(\mathbb{R}^N)$. Un altro esempio è la *funzione di Heaviside*, la funzione $H \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R})$ definita come

$$H(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0; \\ 0 & \text{se } x < 0: \end{cases}$$

si tratta di una distribuzione e si ha $\langle H, \varphi\rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx$. Un altro esempio è il *dipolo*, la distribuzione δ' su $\mathbb{R}$ definita come $\langle \delta', \varphi\rangle := -\varphi'(0)$ (vedremo subito il motivo della scelta del simbolo δ', così come del segno "$-$" nella definizione).

Per adesso le distribuzioni non sembrano aggiungere molto allo spazio, già piuttosto esteso, delle misure; tutti gli esempio di distribuzioni che abbiamo visto finora erano misure tranne il dipolo (che il dipolo non sia generato da nessuna misura è un semplice esercizio). Vediamo adesso un risultato che esprime quali distribuzioni siano misure.

Lemma 1.6. *Ogni distribuzione positiva è localmente una misura (positiva).*

Prima di mostrare questo risultato, discutiamone brevemente il significato: per "distribuzione positiva" intendiamo ovviamente una $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ tale che $\langle T, f\rangle \geq 0$ per ogni $f \geq 0$; inoltre, dire che T sia localmente una misura vuol dire che dato un aperto $A \subset\subset \Omega$ (cioè A compattamente contenuto in Ω, ossia $\overline{A}$ è un compatto contenuto in Ω), esiste una misura $\mu_A \in \mathcal{M}^+(A)$ tale che $\langle T, f\rangle = \int_\Omega f\,d\mu_A$ per ogni $f \in \mathscr{D}(A)$.

Proof. (del Lemma 1.6): Si prendano una distribuzione positiva T e un aperto $A \subset\subset \Omega$; per quanto osservato prima, si ottiene la tesi se si trova una costante C tale che

$$|\langle T, f\rangle| \leq C\,\|f\|_{\sup}$$

per ogni $f \in \mathscr{D}(A)$. Si supponga che questo non sia vero: è allora possibile trovare funzioni $f_n \in \mathscr{D}(A)$ con $\|f_n\|_{\sup} = 1$ per ogni n e con $\langle T, f_n\rangle \geq n$. Sia ora $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ una funzione positiva tale che $\varphi \equiv 1$ su $\overline{A}$, cosa possibile grazie all'esistenza di funzioni cut-off: per ogni $n \in \mathbb{N}$, la funzione $\varphi - f_n$ è positiva, ma

$$\langle T, \varphi - f_n\rangle = \langle T, \varphi\rangle - \langle T, f_n\rangle \leq \langle T, \varphi\rangle - n,$$

e quindi $\langle T, \varphi - f_n\rangle < 0$ per n sufficientemente grande. □

Osservazione 1.7. *Si noti che la tesi è valida solo per aperti compattamente contenuti in Ω, ma non per l'intero Ω: ad esempio, la somma di numerabili Delte di Dirac posizionate in punti che convergono al bordo di Ω definisce una distribuzione che non corrisponde ad una misura; oppure, il funzionale $f \mapsto \int_\Omega f\,dx$ è chiaramente una distribuzione positiva, ma corrisponde ad una misura solo se Ω è di misura finita; più in generale, se g è una funzione su Ω positiva, regolare ma con integrale illimitato, allora $f \mapsto \int_\Omega gf\,dx$ è una distribuzione positiva ma non corrisponde ad una misura.*

Osservazione 1.8. *Si osservi infine che l'utilità del Lemma 1.6 non è limitata solo alle misure positive: dal momento che una misura generica è sempre la differenza tra due misure positive, possiamo rienunciare il lemma dicendo che una distribuzione che sia differenza di due distribuzioni positive è localmente una misura.*

1.2. **Derivate e ordine di una distribuzione.** Nella sezione precedente abbiamo usato il simbolo δ' per esprimere la distribuzione su $\mathbb{R}$ che a φ associa $-\varphi'(0)$; più in generale, visto che gli elementi di $\mathscr{D}(\Omega)$ sono infinitamente derivabili, per ogni $k \in \mathbb{N}$ possiamo definire una distribuzione su $\mathbb{R}$ come

$$\langle \delta^{(k)}, \varphi \rangle := (-1)^k \varphi^{(k)}(0)\,. \tag{1.1}$$

Si ricordi ora che, prese due funzioni φ, $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$, avendo queste supporto compatto si ha, integrando successivamente per parti,

$$\int_\Omega \psi^{(k)} \varphi = (-1)^k \int_\Omega \psi \varphi^{(k)}\,;$$

considerando le due funzioni regolari ψ e $\psi^{(k)}$ come distribuzioni come al solito, possiamo riscrivere la formula precedente come

$$\langle \psi^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle \psi, \varphi^{(k)} \rangle\,. \tag{1.2}$$

Osservando la (1.1) e la (1.2) e passando al caso $N-$dimensionale nel modo ovvio, ci viene in mente la seguente definizione di derivate per una distribuzione.

Definizione 1.9. *Dato un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$, definiamo la* derivata $\alpha-$esima *di una distribuzione $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ come la distribuzione $D^\alpha T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ data da*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle\,.$$

Il fatto che $D^\alpha T$ sia una distribuzione è ovvio grazie al significato di convergenza in $\mathscr{D}(\Omega)$, ed è altresì ovvio che in tutti i casi in cui T corrisponda ad una funzione derivabile, il concetto di derivata $\alpha-$esima corrisponde con quello usuale. Osserviamo subito che, visto che le derivate di funzioni in $\mathscr{D}(\Omega)$ sono ancora in $\mathscr{D}(\Omega)$, si ha banalmente la seguente proprietà.

Lemma 1.10. *Se $T_k \overset{*}{\rightharpoonup} T$ su $\mathscr{D}'(\Omega)$, allora per ogni multi-indice α si ha*

$$D^\alpha T_k \overset{*}{\rightharpoonup} D^\alpha T\,.$$

Esempio 1.11. Le derivate della Delta di Dirac corrispondono a quanto definito in (1.1); la derivata della funzione di Heaviside è la Delta di Dirac.

A questo punto, risulta abbastanza intuitivo il concetto di ordine di una distribuzione: in base agli esempi che abbiamo visto, vorremo dire che una distribuzione ha ordine m se "coinvolge" solo le prime m derivate di una funzione; ad esempio, la derivata $k-$esima della Delta di Dirac dovrà avere ordine k. La definizione formale è dunque la seguente.

Definizione 1.12. *Si dice che la distribuzione $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ ha* ordine m *se m è il minimo intero per cui esiste una costante C tale che*

$$|\langle T, f\rangle| \leq C\Big(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D_i f\|_{\sup}\Big).$$

Se una distribuzione non ha ordine m per nessun $m \in \mathbb{N}$ si dice che ha ordine infinito.

Si noti che una misura è una distribuzione di ordine 0; più in generale, una distribuzione di ordine m dipende solo da f e dalle sue prime m derivate, e quindi si può estendere univocamente in modo continuo ad un funzionale su $\mathrm{C}^m(\Omega)$. Esistono distribuzioni con ordine infinito, come mostra il seguente esempio.

Esempio 1.13. Definiamo

$$T := \sum_{m\in\mathbb{N}} \delta_{x_m}^{(m)},$$

dove x_m è una successione in Ω che tende al bordo (o che si allontani dall'origine se Ω è illimitato). E' chiaramente una distribuzione, visto che gli elementi di $\mathscr{D}(\Omega)$ hanno supporto compatto, ma altrettanto chiaramente non ha ordine finito.

Si noti che siamo stati capaci di costruire una distribuzione di ordine infinito, però solo allontanandoci dall'origine, oppure avvicinandoci al bordo; effettivamente questo è l'unico modo di avere ordine infinito, come mostriamo adesso.

Lemma 1.14. *Ogni distribuzione ha ordine localmente finito sui compatti. Ossia, data $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ e dato $K \subset\subset \Omega$, esiste m tale che T ha ordine m su K.*

Proof. Se per assurdo T avesse ordine infinito su K, allora, per ogni $j \in \mathbb{N}$ potremmo trovare una funzione $\varphi_j \in \mathscr{D}(\Omega)$ con $\operatorname{spt}(\varphi_j) \subseteq K$ e tale che

$$\max\Big\{|D^\alpha\varphi_j(x)| : |\alpha| \leq j,\, x \in K\Big\} \leq \frac{1}{2^j}, \qquad \langle T, \varphi_j\rangle \geq 1.$$

L'assurdo si ottiene notando che $\varphi := \sum_{j\in\mathbb{N}} \varphi_j \in \mathscr{D}(\Omega)$ ma per linearità $\langle T, \varphi\rangle = +\infty$. □

Si può anche definire un prodotto tra funzioni regolari e distribuzioni: se φ e u sono elementi di $\mathscr{D}(\Omega)$, si ha chiaramente

$$\langle u\varphi, \psi\rangle = \int_\Omega u\varphi\psi = \langle \varphi, u\psi\rangle;$$

deifiniamo allora il prodotto tra la funzione $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ e la distribuzione $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ come la distribuzione $\varphi T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ data da

$$\langle \varphi T, \psi\rangle := \langle T, \varphi\psi\rangle;$$

si osservi che non era essenziale, per dare la definizione, che φ fosse a supporto compatto: se $\varphi \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)$ la definizione funziona ugualmente bene.

Si può subito mostrare che continui a valere la formula di Leibniz.

Lemma 1.15 (Formula di Leibniz)**.** *Dato un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$, si ha*

$$D^\alpha(\varphi T) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\beta-\alpha)!} D^\beta \varphi D^{\alpha-\beta} T\,,$$

dove $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_N!$.

Proof. La formula segue con un'ovvia induzione, come nel risultato classico, a partire dal caso $|\alpha| = 1$. Studiamo dunque $\dfrac{\partial(\varphi T)}{\partial x_i}$: per ogni funzione $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ si ha

$$\begin{aligned}\langle \frac{\partial(\varphi T)}{\partial x_i}, \psi \rangle &= -\langle \varphi T, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \rangle = -\langle T, \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \rangle = -\langle T, \frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial x_i} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle \\ &= \langle \varphi \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} T, \psi \rangle\,,\end{aligned}$$

e dunque segue la tesi. □

Concludiamo sottolineando la strategia che abbiamo usato in questo lemma, e cioè scaricare le derivate sulle funzioni regolari; in generale, quasi sempre per dimostrare i risultati sulle distribuzioni converrà "scaricare tutti i problemi" sulle funzioni C^∞.

1.3. **Convoluzione.** In questa sezione definiamo la convoluzione nell'ambito delle distribuzioni e studiamo le sue principali proprietà.

1.3.1. *Convoluzione per funzioni.* Prima di tutto, ricordiamo le definizioni e le proprietà della convoluzione tra funzioni: per cominciare, date $f, g \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$, si pone

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^N} f(y) g(x-y)\, dy; \tag{1.3}$$

è immediato notare che la convoluzione è un'operazione lineare, commutativa e associativa (basta usare l'ovvio cambio di variabile ed il Teorema di Fubini). Si scopre anche subito che è possibile definire $f * g$ purché f e g siano in L^1, e inoltre $f * g$ appartiene ad L^1 in questo caso.

Lemma 1.16. *Se $f, g \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ allora $f * g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e*

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\,. \tag{1.4}$$

Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, allora è possibile definire $f * g$, sempre tramite la (1.3), e la (1.4) continua a valere.

Proof. E' immediato osservare che $f * g$ sia continua (in realtà, come vedremo, è anche molto meglio) ed a supporto compatto, quindi non c'è dubbio che sia $f * g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Sia allora $h \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$: si trova subito che

$$\begin{aligned}\int_x f * g(x) h(x)\, dx &= \int_x \Big(\int_y f(y) g(x-y)\, dy \Big) h(x)\, dx = \int_y f(y) \Big(\int_x g(x-y) h(x)\, dx \Big)\, dy \\ &\leq \int_y |f(y)|\, \|g\|_{L^1(\Omega)} \|h\|_{L^\infty(\Omega)}\, dy \leq \|f\|_{L^1(\Omega)} \|g\|_{L^1(\Omega)} \|h\|_{L^\infty(\Omega)}\ ;\end{aligned} \tag{1.5}$$

visto che per il Teorema di Hahn-Banach è possibile trovare $h \in L^\infty$ con $\|h\|_{L^\infty} = 1$ e in modo che

$$\int (f * g) h = \|f * g\|_{L^1}\ ,$$

la disuguaglianza (1.4) segue.

Supponiamo ora invece che f e g siano soltanto in $L^1(\mathbb{R}^N)$: usando la (1.3) come definizione, in linea di principio non è immediato osservare che $f * g$ sia ben definito. Definiamo allora f_h come la f troncata ad h, ossia

$$f_h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } |f(x)| \leq h\,; \\ h & \text{se } f(x) > h\,; \\ -h & \text{se } f(x) < -h\,. \end{cases}$$

E' evidente che $f_h \longrightarrow f$ in norma L^1, ed inoltre $f_h \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ per definizione. Ma allora la (1.3) definisce senza problemi una funzione $f_h * g$, che sta peraltro chiaramente in L^∞. Inoltre, la stima (1.5) funziona senza problemi ed assicura che $f_h * g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ con

$$\|f_h * g\|_{L^1} \leq \|f_h\|_{L^1}\, \|g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}\, \|g\|_{L^1}\ .$$

Per concludere, basta allora osservare che la successione $\{f_h\}$ è di Cauchy in $L^1(\mathbb{R}^N)$, e per linearità della convoluzione la stima appena trovata assicura che anche $f_h * g$ è una successione di Cauchy in $L^1(\mathbb{R}^N)$, da cui scopriamo che effettivamente la definizione (1.3) definisce una funzione $f * g$ in $L^1(\mathbb{R}^N)$ che verifichi la stima (1.4). □

In realtà la definizione (1.3) di convoluzione si può dare anche in casi leggermente più generali di $f,\, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$; ad esempio, se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ è evidente che (1.3) è ben definita in ogni punto. Senza troppe difficoltà, usando opportunamente le disuguaglianze di Hölder, si può generalizzare come segue il Lemma 1.16.

Lemma 1.17 (Disuguaglianza di Young). *Date $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ con*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r} \geq 1,$$

la formula (1.3) definisce una funzione $f * g \in L^r(\mathbb{R}^N)$, e inoltre

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\, \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}\,;$$

in particolare, per $q = 1$ si ha

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\, \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\,. \tag{1.6}$$

Questo risultato ci assicura che, in un certo senso, la convoluzione ha un effetto "regolarizzante", visto che $f * g$ risulta avere una sommabilità migliore sia di quella di f che di quella di g. In effetti, questo vale anche per quanto riguarda la continuità e la derivabilità, grazie al seguente risultato.

Lemma 1.18. *Siano $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Allora si ha $f * g \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^N)$ se vale almeno una delle condizioni aggiuntive che g sia a supporto compatto, oppure che g tenda a 0 all'infinito e f sia in $L^1(\mathbb{R}^N)$, oppure che $f \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$. Analogamente, se $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^N)$, allora si ha anche che $f * g \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^N)$ e per ogni $1 \leq i \leq N$ vale*

$$\frac{\partial (f * g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g \tag{1.7}$$

purché valga almeno una delle condizioni aggiuntive che g sia a supporto compatto, oppure che g tenda a 0 all'infinito e $Df \in L^1(\mathbb{R}^N)$, oppure che $Df \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$.

Corollario 1.19. *Se $f \in C^k(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e almeno una tra f e g è a supporto compatto, allora $f * g \in C^k(\mathbb{R}^N)$; se $f \in C^k(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap C^m(\mathbb{R}^N)$ e almeno una delle due è a supporto compatto, allora $f * g \in C^{k+m}(\mathbb{R}^N)$.*

Proof. (del Lemma 1.18): Supponiamo per cominciare che g abbia un supporto K compatto.

Per mostrare che $f * g$ sia continua in x, allora, osserviamo che f è uniformemente continua nel compatto $B(x-K, 1)$ (che è l'insieme degli $z \in \mathbb{R}^N$ tali che esista $y \in K$ con $\big|(x-y)-z\big| \leq 1$). Fissato dunque $\varepsilon > 0$, esiste $\delta \leq 1$ tale che per ogni coppia di punti x', $x'' \in B(x-K,1)$ con $\big|x' - x''\big| < \delta$ si ha $\big|f(x') - f(x'')\big| \leq \varepsilon$. Abbiamo allora che, per ogni $\tilde{x}$ con $|x - \tilde{x}| < \delta$, è

$$\big|f * g(x) - f * g(\tilde{x})\big| = \bigg| \int_y g(y)\Big(f(x-y) - f(\tilde{x}-y)\Big)\, dy\bigg| \leq \varepsilon \int_y \big|g(y)\big|\, dy = \varepsilon\, \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \,, \tag{1.8}$$

e dunque la continuità di $f * g$ segue (si noti che g appartiene ad $L^1(\mathbb{R}^N)$ visto che sta in $L^p(\mathbb{R}^N)$ e per il momento stiamo supponendo che abbia supporto compatto).

Se poi $f \in C^1(\mathbb{R}^N)$, sia $1 \leq i \leq N$ e cerchiamo di mostrare la (1.7). Come fatto prima, fissiamo $x \in \mathbb{R}^N$ ed utilizziamo l'uniforme continuità di $\partial f/\partial x_i$ nel compatto $B(x-K,1)$ per dedurre che per ogni ε esista un $\delta \leq 1$ tale che per ogni scelta di $x', x'' \in B(x-K,1)$ con $|x' - x''| \leq \delta$ si ha $|\partial f/\partial x_i(x') - \partial f/\partial x_i(x'')| \leq \varepsilon$. Si può allora osservare che, dato $\sigma > 0$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{f * g\big(x + \sigma e_i\big) - f * g(x)}{\sigma} &= \int_y g(y)\, \frac{f\big(x - y + \sigma e_i\big) - f(x-y)}{\sigma}\, dy \\ &= \int_y g(y)\, \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \big(x - y + t e_i\big)\, dy \,, \end{aligned} \tag{1.9}$$

dove $t = t(y)$ è una funzione compresa tra 0 e σ. Supponendo allora che $\sigma < \delta$, la continuità uniforme di $\partial f/\partial x_i$ ci assicura che

$$\bigg| \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \big(x - y + t e_i\big) - \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \big(x - y\big)\bigg| \leq \varepsilon$$

per ogni $y \in K$, e dunque che

$$\begin{aligned} \varepsilon\, \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} &\geq \bigg| \int_y g(y)\, \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \big(x - y + t e_i\big)\, dy - \int_y g(y)\, \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \big(x - y\big)\, dy\bigg| \\ &= \bigg| \int_y g(y)\, \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \big(x - y + t e_i\big)\, dy - \frac{\partial f}{\partial x_i} * g(x)\bigg| . \end{aligned}$$

Inserendo questa stima nella (1.9) deduciamo che per ogni $\sigma \leq \delta$ si ha

$$\bigg| \frac{f * g\big(x + \sigma e_i\big) - f * g(x)}{\sigma} - \frac{\partial f}{\partial x_i} * g(x)\bigg| \leq \varepsilon\, \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \,, \tag{1.10}$$

e dunque si ottiene subito che $f * g \in C^1$ ed in particolare la validità della (1.7). Abbiamo quindi completato la tesi nel caso in cui g sia a supporto compatto.

Consideriamo ora il caso generale. Fissiamo $\varepsilon > 0$, e chiamiamo per brevità $q = +\infty$ se g tende a 0 all'infinito e $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, oppure $q = p$ se $f \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$. Per ipotesi, si può trovare un compatto K tale che $\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N \setminus K)} < \varepsilon$. Chiamiamo allora g_1 la restrizione di g a K, e $g_2 = g - g_1$. Per mostrare che $f * g$ sia continua, iniziamo con l'osservare che

$$\|f * g_2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon\, \|f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^N)} \,, \tag{1.11}$$

il che segue immediatamente osservando che

$$\big|f * g_2(x)\big| \leq \int_y \big|g_2(y)\big| \, \big|f(x-y)\big| \, dy \leq \|g_2\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \, \|f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon \, \|f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^N)} \, .$$

Possiamo adesso applicare il ragionamento della prima parte della dimostrazione a g_1, che ha supporto compatto, sostituendo ε con $\varepsilon/\|g_1\|_{L^1(K)}$. Infatti, fissato x, visto che f è uniformemente continua nel compatto $B(x-K,1)$ possiamo trovare un δ tale che, per ogni $x', x'' \in B(x-K,1)$ con $|x'-x''|<\delta$, si abbia $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon/\|g_1\|_{L^1(K)}$. A questo punto, sfruttando la (1.8) e la (1.11) otteniamo che, purché $\big|x-\tilde{x}\big|<\delta$, si ha

$$\begin{aligned}\big|f * g(x) - f * g(\tilde{x})\big| &\leq \big|f * g_1(x) - f * g_1(\tilde{x})\big| + \big|f * g_2(x) - f * g_2(\tilde{x})\big| \\ &\leq \varepsilon + 2\,\|f * g_2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon\big(1 + 2\,\|f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^N)}\big)\,,\end{aligned}$$

e quindi la continuità di $f*g$ segue anche nel caso generale.

Per quanto riguarda l'appartenenza di $f*g$ a $\mathrm{C}^1(\mathbb{R}^N)$ e la validità della (1.7), si può ragionare quasi esattamente nello stesso modo: prima di tutto, in maniera analoga alla (1.11), si ottiene che per ogni $\sigma>0$ vale

$$\left\| \frac{f * g_2(\cdot + \sigma \mathrm{e}_i) - f * g_2(\cdot)}{\sigma} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} . \tag{1.12}$$

Infatti, in modo simile a quanto fatto nella (1.9), si ottiene per Fubini

$$\begin{aligned}\left|\frac{f * g_2\big(x+\sigma\mathrm{e}_i\big) - f * g_2(x)}{\sigma}\right| &= \left|\frac{1}{\sigma}\int_y g_2(y)\Big(f\big(x-y+\sigma\mathrm{e}_i\big) - f(x-y)\Big)\,dy\right| \\ &= \left|\frac{1}{\sigma}\int_y g_2(y)\bigg(\int_{\tau=0}^{\sigma}\frac{\partial f}{\partial x_i}\,(x-y+\tau\mathrm{e}_i)\,d\tau\bigg)\,dy\right| \\ &= \left|\fint_{\tau=0}^{\sigma}\bigg(\int_y g_2(y)\,\frac{\partial f}{\partial x_i}\,(x-y+\tau\mathrm{e}_i)\,dy\bigg)\,d\tau\right| \\ &\leq \fint_{\tau=0}^{\sigma}\|g_2\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}\left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^N)} d\tau \leq \left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^N)} \varepsilon\,.\end{aligned}$$

A questo punto per concludere basta di nuovo applicare l'argomento della prima parte della dimostrazione a g_1: più precisamente, utilizzando la (1.10) con g_1 al posto di g e con $\varepsilon/\|g_1\|_{L^1(K)}$ al posto di ε, la (1.12) e la (1.11) con $\partial f/\partial x_1$ al posto di f, si ottiene che, per σ abbastanza piccolo, è

$$\begin{aligned}\left|\frac{f * g\big(x+\sigma\mathrm{e}_i\big) - f * g(x)}{\sigma} - \frac{\partial f}{\partial x_i} * g(x)\right| &\leq \left|\frac{f * g_1\big(x+\sigma\mathrm{e}_i\big) - f * g_1(x)}{\sigma} - \frac{\partial f}{\partial x_i} * g_1(x)\right| \\ &\quad + \left|\frac{f * g_2\big(x+\sigma\mathrm{e}_i\big) - f * g_2(x)}{\sigma}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_i} * g_2(x)\right| \\ &\leq \varepsilon + 2\varepsilon\left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^N)}\,,\end{aligned}$$

e quindi anche la validità della (1.7) segue pure nel caso generale. □

Osservazione 1.20. *Si osservi che, nella dimostrazione appena conclusa, tra le condizioni aggiuntive si può più in generale chiedere che per un qualche $1 \leq q \leq +\infty$ si abbia che f o Df siano in $L^{q'}$ e che la norma L^q di g al di fuori di palle abbastanza grandi tenda a 0. La seconda* *e la terza delle condizioni aggiuntive richieste nell'enunciato, in effetti, corrispondono al caso* $q = +\infty$ *ed al caso* $q = p$ *rispettivamente. E' banale osservare che anche la compattezza del supporto di* f *è sufficiente come condizione aggiuntiva.*

Possiamo ora discutere la possibilità di approssimare funzioni sommabili con funzioni in $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$; siano infatti ρ_ε dei mollificatori, e per ogni funzione $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con un esponente $1 \leq p < +\infty$ indichiamo $f_\varepsilon = f * \rho_\varepsilon$. Le funzioni f_ε sono ovviamente C^∞ per il Corollario 1.19; vediamo ora come f_ε converga fortemente a f in $L^p(\mathbb{R}^N)$, e la convergenza sia anche uniforme nel caso in cui f sia uniformemente continua.

Lemma 1.21. *Se* f *è una funzione uniformemente continua su* $\mathbb{R}^N$*, allora* $f * \rho_\varepsilon =: f_\varepsilon \to f$ *uniformemente.*

Proof. Ricordando le proprietà dei mollificatori, si può calcolare

$$\begin{aligned}
\big|f_\varepsilon(x) - f(x)\big| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\rho_\varepsilon(y)\,dy - f(x)\right| = \left|\int_{B(0,\varepsilon)} \big(f(x-y) - f(x)\big)\rho_\varepsilon(y)\,dy\right| \\
&\leq \int_{B(0,\varepsilon)} \big|f(x-y) - f(x)\big|\rho_\varepsilon(y)\,dy \\
&\leq \max\big\{|f(x-y) - f(x)|,\ x \in \mathbb{R}^N,\ |y| \leq \varepsilon\big\} = \omega(\varepsilon)
\end{aligned}$$

essendo ω il modulo di continuità della funzione f. Visto che f è uniformemente continua, per definizione $\omega(\varepsilon) \to 0$ per $\varepsilon \to 0$, e questo ci assicura la convergenza uniforme delle f_ε ad f. □

Proposizione 1.22. *Sia* $1 \leq p < +\infty$ *e* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$*; allora, chiamando* $f_\varepsilon = f * \rho_\varepsilon$*, si ha che le* f_ε *sono funzioni* C^∞ *e*

$$f_\varepsilon \xrightarrow{L^p} f.$$

Proof. Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ fissata; per mostrare che $f_\varepsilon \xrightarrow{L^p} f$ passeremo attraverso il Lemma 1.21, quindi ci serve poter approssimare f con una funzione continua. Per prima cosa prendiamo una funzione a scala φ_ε, cioè una funzione del tipo

$$\varphi_\varepsilon = \sum_{i=1}^{k} C_i \chi_{K_i}$$

con un numero naturale $k \in \mathbb{N}$, delle costanti $C_i \in \mathbb{R}$ e degli insiemi compatti a due a due disgiunti $K_i \subseteq \mathbb{R}^N$, in modo che

$$\|f - \varphi_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon; \tag{1.13}$$

si osservi adesso quanto segue: data una costante $C \in \mathbb{R}$ ed un compatto $K \subseteq \mathbb{R}^N$, le funzioni

$$x \mapsto C\big(1 - M\operatorname{dist}(x,K)\big)^+$$

sono, al variare di $M \in \mathbb{R}$, delle funzioni continue, che per $M \to +\infty$ tendono fortemente a $C\chi_K$ in L^p per qualsiasi $1 \leq p < +\infty$. Sommando allora k funzioni di questo tipo avendo scelto $M \gg 1$ sufficientemente grande, troviamo una funzione $\tilde{\varphi}_\varepsilon$ continua (e ovviamente a supporto compatto) tale che

$$\|\varphi_\varepsilon - \tilde{\varphi}_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon. \tag{1.14}$$

Grazie al Lemma 1.21, le funzioni $\tilde{\varphi}_\varepsilon * \rho_\delta$ convergono uniformemente a $\tilde{\varphi}_\varepsilon$ per $\delta \to 0$; essendo $\tilde{\varphi}_\varepsilon \in C_0(\mathbb{R}^N)$, ovviamente la convergenza vale a maggior ragione in L^p; dunque, purché $\delta \leq \bar{\delta}(\varepsilon)$ si ha

$$\|\tilde{\varphi}_\varepsilon - \tilde{\varphi}_\varepsilon * \rho_\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon. \tag{1.15}$$

Mettendo allora insieme (1.13), (1.14) e (1.15), e ricordando (1.6), si ha

$$\begin{aligned}\|f - f_\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &\leq \|f - \tilde{\varphi}_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\tilde{\varphi}_\varepsilon - \tilde{\varphi}_\varepsilon * \rho_\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|(\tilde{\varphi}_\varepsilon - f) * \rho_\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq 2\,\|f - \tilde{\varphi}_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \varepsilon \leq 5\varepsilon;\end{aligned}$$

dal momento che questa disuguaglianza è valida purché δ sia minore di una costante che dipende solo da ε, si conclude la tesi. □

Corollario 1.23. *L'insieme $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^N)$ per ogni $1 \leq p < +\infty$.*

Proof. Data $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, chiamiamo f_j la restrizione di f alla palla centrata nell'origine e di raggio j. Ovviamente le funzioni f_j convergono ad f in $L^p(\mathbb{R}^N)$. Per la Proposizione 1.22, per ogni j possiamo trovare un $\delta(j)$ tale che $\left\|f_j * \rho_{\delta(j)} - f_j\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < 1/j$. Allora, visto che le funzioni $f_j * \rho_{\delta(j)}$ sono C^∞ ed a supporto compatto si conclude. □

Osservazione 1.24. *Se $p = +\infty$, la Proposizione ed il Corollario non sono veri; come si può facilmente notare, il problema è che le funzioni continue non approssimano le funzioni a scala in L^∞, mentre lo fanno in tutti gli L^p come utilizzato nella dimostrazione della Proposizione 1.22.*

1.3.2. *Distribuzioni a supporto compatto.* E' possibile definire il supporto di una distribuzione T in un modo ovvio, che coincide con l'usuale concetto di supporto nel caso in cui T sia una funzione o una misura.

Definizione 1.25. *Data $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, diremo che il supporto di T è il complementare del più grande aperto $E \subseteq \Omega$ tale che per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(E)$ si ha $\langle T, \varphi\rangle = 0$.*

Diamo adesso le seguenti ulteriori definizioni.

Definizione 1.26. *Lo spazio $\mathrm{C}^\infty(\Omega)$ di tutte le funzioni C^∞ su Ω con supporto non necessariamente compatto verrà denotato con $\mathscr{E}(\Omega)$; diremo che $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{E}} \varphi$ se su ogni compatto contenuto in Ω vi è convergenza uniforme delle φ_k e delle loro derivate a φ e alle sue derivate. Il duale di $\mathscr{E}(\Omega)$ verrà chiamato $\mathscr{E}'(\Omega)$.*

E' immediato notare che la topologia su $\mathscr{E}$ può essere costruita con un procedimento analogo a quanto fatto su $\mathscr{D}$, e che tutti i risultati trovati su $\mathscr{D}$ e su $\mathscr{D}'$ si estendono con dimostrazioni identiche ad $\mathscr{E}$ e ad $\mathscr{E}'$. Si ha poi quanto segue.

Lemma 1.27. *Lo spazio $\mathscr{E}'(\Omega)$ coincide con lo spazio delle distribuzioni a supporto compatto.*

Proof. Prima di tutto notiamo che ovviamente $\mathscr{D}(\Omega) \subseteq \mathscr{E}(\Omega)$ è denso, e dunque $\mathscr{E}'(\Omega) \subseteq \mathscr{D}'(\Omega)$ è composto da distribuzioni. Inoltre, è chiaro che se una distribuzione è a supporto compatto definisce un funzionale su $\mathscr{E}(\Omega)$, usando opportunamente funzioni cut-off fuori dal supporto della distribuzione. Infine, se una distribuzione T *non* è a supporto compatto, ragionando in modo del tutto analogo a quanto fatto nella dimostrazione del Lemma 1.14 è facile costruire funzioni $\varphi_k \in \mathscr{D}(\Omega)$ in modo che $\varphi_k \to \varphi \in \mathscr{E}(\Omega)$ ma $\langle T, \varphi_k\rangle \to +\infty$: questo assicura che $T \notin \mathscr{E}'(\Omega)$. □

Corollario 1.28. *Gli elementi di $\mathscr{E}'(\Omega)$ hanno ordine finito.*

Proof. Visto che gli elementi di $\mathscr{E}'(\Omega)$ sono le distribuzioni a supporto compatto, si conclude grazie al Lemma 1.14. □

1.3.3. *Convoluzione per distribuzioni.* Possiamo finalmente passare a generalizzare il concetto di convoluzione, dato per le funzioni nella Sezione 1.3.1, al caso delle distribuzioni. Per fare questo fissiamo per comodità un paio di abbreviazioni.

Definizione 1.29. *Dato $x \in \mathbb{R}^N$, denotiamo con $\tau_x : \mathscr{D} \to \mathscr{D}$ la traslazione "all'indietro" di x e con $^{-} : \mathscr{D} \to \mathscr{D}$ il ribaltamento, ossia*

$$\tau_x\varphi(y) := \varphi(y-x)\,, \qquad\qquad \overline{\varphi}(x) := \varphi(-x)\,.$$

Visto che ovviamente

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\tau_x\varphi)\psi = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi\tau_{-x}\psi\,,$$

definiamo la *traslazione di distribuzioni* come $\tau_x : \mathscr{D}' \to \mathscr{D}'$ data da

$$\langle \tau_x T, \varphi\rangle := \langle T, \tau_{-x}\varphi\rangle\,.$$

Inoltre, ricordando che la convoluzione tra due funzioni $f * g$ è

$$f * g(x) = \int f(y)g(x-y)\,dy = \int f\tau_x\overline{g}\,,$$

definiamo la *convoluzione tra una distribuzione ed una funzione* C^∞ come $* : \mathscr{D}' \times \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ data da

$$T * \varphi(x) := \langle T, \tau_x\overline{\varphi}\rangle\,;$$

notiamo che per adesso $T*\varphi$ è solo una funzione continua, visto che $\tau_{x_n}\overline{\varphi} \xrightarrow{\mathscr{D}} \tau_x\overline{\varphi}$ se $x_n \to x$; il fatto che si tratti di una funzione C^∞ verrà mostrato nel Lemma 1.31. Prima, però, osserviamo una proprietà immediata.

Lemma 1.30. *Se S, $T \in \mathscr{D}'$ sono tali che $S*\varphi = T*\varphi$ per ogni $\varphi \in \mathscr{D}$, allora $S = T$.*

Proof. Fissiamo $\varphi \in \mathscr{D}$: allora

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \overline{\overline{\varphi}}\rangle = T*\overline{\varphi}(0) = S*\overline{\varphi}(0) = \langle S, \varphi\rangle\,.$$

□

Lemma 1.31. *Per ogni multi-indice α e per ogni $T \in \mathscr{D}'$ e φ, $\psi \in \mathscr{D}$*

$$D^\alpha(T*\varphi) = T*(D^\alpha\varphi) = (D^\alpha T)*\varphi\,,$$
$$T*\big(\varphi*\psi\big) = \big(T*\varphi\big)*\psi$$

Proof. Per quanto riguarda la prima proprietà, ovviamente è sufficiente mostrare la tesi con una singola derivata e poi agire ricorsivamente; calcoliamo allora

$$\begin{aligned}\frac{\partial(T*\varphi)}{\partial x_i}(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{T*\varphi(x) - (T*\varphi)(x-\varepsilon\,\mathrm{e_i})}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\langle T, \tau_x\overline{\varphi}\rangle - \langle T, \tau_{x-\varepsilon\,\mathrm{e_i}}\overline{\varphi}\rangle}{\varepsilon}\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\langle T, \tau_x\overline{\varphi}\rangle - \langle T, \tau_x\tau_{-\varepsilon\,\mathrm{e_i}}\overline{\varphi}\rangle}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\langle T, \tau_x\overline{\varphi}\rangle - \langle T, \tau_x\overline{\tau_{\varepsilon\,\mathrm{e_i}}\varphi}\rangle}{\varepsilon}\end{aligned}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \langle T, \frac{\tau_x\big(\overline{\varphi - \tau_{\varepsilon\,\mathrm{e_i}}\varphi}\big)}{\varepsilon}\rangle = \langle T, \tau_x \overline{\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}\rangle = T * \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\,.$$

D'altra parte,

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} * \varphi(x) = \langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \tau_x\overline{\varphi}\rangle = -\langle T, \frac{\partial \tau_x\overline{\varphi}}{\partial x_i}\rangle = -\langle T, \tau_x \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x_i}\rangle = -\langle T, \tau_x\big(-\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}\big)\rangle$$
$$= \langle T, \tau_x \overline{\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}\rangle = T * \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\,;$$

la prima formula è quindi mostrata.

Per quanto riguarda la seconda, prima di tutto è necessario osservare quanto segue: date $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ e $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, si ha

$$\langle T, \int f(\cdot, y)\, dy\rangle = \int \langle T, f(\cdot, y)\rangle\, dy\ : \tag{1.16}$$

questo fatto è ovvio se la dipendenza di f dalla seconda variabile è a scala, e il caso generale si raggiunge per densità. Utilizzando la (1.16), si ha

$$\big(T * (\varphi * \psi)\big)(x) = \langle T, \tau_x\overline{\varphi * \psi}\rangle = \langle T, \varphi * \psi(x - \cdot)\rangle = \langle T, \int \psi(y)\varphi(x - \cdot - y)\, dy\rangle$$
$$= \langle T, \int \psi(y)\tau_{x-y}\overline{\varphi}(\cdot)\, dy\rangle = \int \langle T, \psi(y)\tau_{x-y}\overline{\varphi}(\cdot)\rangle\, dy$$
$$= \int \langle T, \tau_{x-y}\overline{\varphi}(\cdot)\rangle\psi(y)\, dy = \int T * \varphi(x-y)\psi(y)\, dy = \big((T * \varphi) * \psi\big)(x)\,.$$

□

Esempio 1.32. La Delta di Dirac ha la peculiarità che $\delta * \varphi = \varphi$; inoltre $1 * \varphi \equiv \int \varphi$: ossia, chiamando 1 la distribuzione corrispondente alla funzione che vale identicamente 1 –che ovviamente è L^1_{loc} quindi una distribuzione– si ottiene che la convoluzione tra 1 e φ è la funzione costante di valore $\int \varphi$. Un altro esempio si ottiene con la funzione di Heaviside, trovando $H * \varphi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi$. Questo ci dà anche un esempio riguardo al Lemma appena mostrato: $(H*\varphi)' = \varphi = \delta*\varphi = H'*\varphi$.

Ripassando il funzionamento della convoluzione tra funzioni, avevamo già notato che la convoluzione acquista tutte le proprietà di regolarità della migliore tra le due funzioni; in altre parole, la sommabilità di $f * g$ è almeno la sommabilità migliore tra f e g, così come le proprietà di continuità e di derivabilità. Osserviamo allora che lo stesso fenomeno accade in pieno anche con le distribuzioni: facendo la convoluzione tra gli oggetti più regolari che ci siano –le funzioni C^∞ a supporto compatto– e quelli meno regolari possibili –le distribuzioni– si ottengono ancora funzioni C^∞.

Passiamo ora a definire convoluzioni tra due distribuzioni: ricordiamo che se $T \in \mathscr{D}'$ e $\varphi \in \mathscr{D}$, allora $T * \varphi \in \mathscr{E}$; oppure, chiaramente, se $T \in \mathscr{E}'$ e $\varphi \in \mathscr{D}$, si ha $T * \varphi \in \mathscr{D}$ (e il supporto di $T * \varphi$ è contenuto nella somma dei due supporti di T e di φ, esattamente come accade tra le funzioni). Possiamo allora applicare una nuova distribuzione S a $T * \varphi$ purché almeno una tra S e T sia a supporto compatto. Prima di utilizzare questa osservazione per definire $S * T$, osserviamo cosa succede nel caso delle funzioni: se φ, ψ, $\rho \in \mathscr{D}$, si ha

$$\langle \varphi * \psi, \rho\rangle = \int_x \varphi * \psi(x)\rho(x)\, dx = \int_x \Big(\int_y \varphi(y)\psi(x-y)\, dy\Big)\rho(x)\, dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_y \varphi(y)\Big(\int_x \rho(x)\psi(x-y)\,dx\Big)\,dy = \int_y \varphi(y)\Big(\int_x \rho(x)\overline{\psi}(y-x))\,dx\Big)\,dy \\
&= \int_y \varphi(y)\rho * \overline{\psi}(y)\,dy = \langle \varphi, \overline{\psi} * \rho\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Allo stesso modo, siano $T \in \mathscr{D}'$ e φ, $\psi \in \mathscr{D}$; si può calcolare

$$
\langle T * \varphi, \psi\rangle = \int T * \varphi(y)\psi(y)\,dy = \int \langle T, \tau_y\overline{\varphi}\rangle\psi(y)\,dy = \langle T, \int \tau_y\overline{\varphi}(\cdot)\psi(y)\,dy\rangle = \langle T, \overline{\varphi} * \psi\rangle\,.
$$

E' a questo punto indubbiamente sensato dare la seguente definizione per $S * T$.

Definizione 1.33. *Siano S e T due distribuzioni, almeno una delle quali a supporto compatto; definiamo allora $S * T \in \mathscr{D}'$ come*

$$
\langle S * T, \varphi\rangle := \langle S, \overline{T} * \varphi\rangle\,,
$$

dove analogamente al caso delle funzioni si definisce $\overline{T}$ come la distribuzione tale che $\langle \overline{T}, \varphi\rangle = \langle T, \overline{\varphi}\rangle$; si noti che, nel caso in cui sia S che T siano a supporto compatto, anche $S * T$ lo è.

Possiamo concludere con lo studio delle proprietà di simmetria e associatività del prodotto di convoluzione.

Lemma 1.34. *Date tre distribuzioni T_1, T_2 e T_3 di cui almeno due a supporto compatto, data $\varphi \in \mathscr{D}$, e dato un multi-indice α, si ha*

$$
\begin{aligned}
\big(T_1 * T_2\big) * \varphi &= T_1 * \big(T_2 * \varphi\big)\,; \\
T_1 * T_2 &= T_2 * T_1\,; \\
\big(T_1 * T_2\big) * T_3 &= T_1 * \big(T_2 * T_3\big)\,; \\
D^\alpha\big(T_1 * T_2\big) &= \big(D^\alpha T_1\big) * T_2\,.
\end{aligned}
$$

Proof.

(i) $$
\begin{aligned}
\big((T_1 * T_2) * \varphi\big)(x) &= \langle T_1 * T_2, \tau_x\overline{\varphi}\rangle = \langle T_1, \overline{T_2} * \tau_x\overline{\varphi}\rangle = \langle T_1, \tau_x(\overline{T_2} * \overline{\varphi})\rangle = \langle T_1, \tau_x(\overline{T_2 * \varphi})\rangle \\
&= \big(T_1 * (T_2 * \varphi)\big)(x)\,,
\end{aligned}
$$

usando il fatto che

$$
\big(T * \tau_z\varphi\big)(\cdot) = \langle T, \tau_\cdot\overline{\tau_z\varphi}\rangle = \langle T, \tau_\cdot\tau_{-z}\overline{\varphi}\rangle = \langle T, \tau_{\cdot-z}\overline{\varphi}\rangle = \big(T * \varphi\big)(\cdot - z) = \big(\tau_z(T * \varphi)\big)(\cdot)\,.
$$

(ii) Prese φ, $\psi \in \mathscr{D}$, si ha

$$
\begin{aligned}
\big((T_1 * T_2) * \varphi\big) * \psi &= (T_1 * T_2) * (\varphi * \psi) = T_1 * \big(T_2 * (\varphi * \psi)\big) = T_1 * \big((T_2 * \varphi) * \psi\big) \\
&= T_1 * \big(\psi * (T_2 * \varphi)\big) = (T_1 * \psi) * (T_2 * \varphi)\,.
\end{aligned}
$$

In modo del tutto analogo,

$$
\big((T_2 * T_1) * \varphi\big) * \psi = (T_2 * T_1) * (\varphi * \psi) = (T_2 * T_1) * (\psi * \varphi) = (T_2 * \varphi) * (T_1 * \psi)\,.
$$

Dunque, usando varie volte la commutatività della convoluzione tra funzioni, abbiamo stabilito che

$$
\big((T_1 * T_2) * \varphi\big) * \psi = \big((T_2 * T_1) * \varphi\big) * \psi\,;
$$

visto che $\psi \in \mathscr{D}$ è generica, dal Lemma 1.30 deduciamo

$$(T_1 * T_2) * \varphi = (T_2 * T_1) * \varphi \,;$$

infine, visto che $\varphi \in \mathscr{D}$ è generica, ancora dal Lemma 1.30 deduciamo

$$T_1 * T_2 = T_2 * T_1 \,.$$

(iii)
$$\begin{aligned}\big((T_1 * T_2) * T_3\big) * \varphi &= (T_1 * T_2) * (T_3 * \varphi) = T_1 * \big(T_2 * (T_3 * \varphi)\big)\\ &= T_1 * \big((T_2 * T_3) * \varphi\big) = \big(T_1 * (T_2 * T_3)\big) * \varphi \,,\end{aligned}$$

e visto che $\varphi \in \mathscr{D}$ è generica si ottiene la tesi come prima.

(iv)
$$\begin{aligned}\big(D^\alpha (T_1 * T_2)\big) * \varphi &= (T_1 * T_2) * D^\alpha \varphi = T_1 * (T_2 * D^\alpha \varphi) = T_1 * (D^\alpha T_2 * \varphi)\\ &= (T_1 * D^\alpha T_2) * \varphi \,,\end{aligned}$$

che ricordando ancora il Lemma 1.30 e la commutatività della convoluzione conclude la tesi. □

Esempio 1.35. Per una qualunque distribuzione T si ha $\delta * T = T$: infatti, $(\delta * T) * \varphi = (T * \delta) * \varphi = T * (\delta * \varphi) = T * \varphi$.

Osservazione 1.36. *Ovviamente si può definire un prodotto di convoluzione tra un numero qualunque di distribuzioni purché tutte tranne al più una siano a supporto compatto.*

Osservazione 1.37. *Così come accade con le funzioni, può capitare che si possa definire il prodotto di convoluzione tra distribuzioni anche se due o più di loro hanno supporto non compatto; in questo caso, tuttavia, non è detto che valga la proprietà associativa. Ad esempio*

$$\begin{aligned}&1 * (\delta' * H) = 1 * (\delta * H') = 1 * (\delta * \delta) = 1 * \delta = 1 \,;\\ &(1 * \delta') * H = (1' * \delta) * H = 0 * H = 0 \,;\\ &(1 * H) * \delta' \ \textit{non è definito}\,.\end{aligned}$$

1.4. **Soluzioni fondamentali.** Consideriamo un operatore differenziale

$$L = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha \tag{1.17}$$

di ordine finito (in realtà molte cose andrebbero bene per operatori di ordine anche solo localmente finito). Si può allora considerare l'applicazione $L : \mathscr{D} \to \mathscr{D}$ dall'ovvio significato, ma anche, se gli a_α sono regolari, l'applicazione $L : \mathscr{D}' \to \mathscr{D}'$, visto che si possono derivare le distribuzioni; in particolare,

$$\langle L(T), \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \le m} \langle a_\alpha D^\alpha T, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \le m} \langle D^\alpha T, a_\alpha \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha (a_\alpha \varphi) \rangle = \langle T, L^* \varphi \rangle \,,$$

dove l'operatore L^* è definito nel modo naturale applicando le formule di Leibniz per esprimere le derivate $D^\alpha(a_\alpha \varphi)$ come somme di funzioni regolari per derivate di φ; in particolare, se i coefficienti a_α sono costanti, si ha

$$L^* = \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha \,.$$

E' quindi possibile considerare equazioni differenziali che abbiano come termini delle distribuzioni, ossia cercare di trovare una distribuzione T che risolva $L(T) = S$ con $S \in \mathscr{D}'$ assegnata. Osserviamo adesso una cosa: se $L(T) = S$ e $U \in \mathscr{D}'$, allora

$$L(T * U) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha \big(T * U\big) = \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha T \Big) * U = L(T) * U = S * U\,.$$

Tutto questo ci spinge a introdurre il concetto di soluzioni fondamentali come segue.

Definizione 1.38. *Dato un'operatore differenziale L come in (1.17), diciamo che $E \in \mathscr{D}'$ è una* soluzione fondamentale *se $L(E) = \delta$.*

Ad esempio, in dimensione 1 la funzione di Heaviside è una soluzione fondamentale per $\partial/\partial x$. Il motivo della scelta della distribuzione δ nella definizione appena data è molto semplice, come illustra il seguente risultato.

Lemma 1.39. *Se E è una soluzione fondamentale per l'operatore L, allora per ogni $S \in \mathscr{D}'$ una soluzione al problema $L(T) = S$ è data da $T = E * S$.*

Proof. Questo è davvero ovvio: se $L(E) = \delta$, allora

$$L(E * S) = L(E) * S = \delta * S = S\,.$$

□

Non è dunque azzardato parlare di soluzione "fondamentale": se conosciamo una soluzione fondamentale per un operatore, possiamo trovare immediatamente soluzioni per tutte le equazioni differenziali relative allo stesso operatore, semplicemente applicando una convoluzione. La soluzione fondamentale è più o meno quello che viene chiamato "funzione di Green", anche se nel caso delle funzioni di Green ci si preoccupa fondamentalmente di soluzioni con dati al bordo opportuni su ben determinati insiemi. In ogni caso, come ci si può facilmente aspettare non è affatto semplice trovare soluzioni fondamentali, anzi è possibile trovarne solo in casi molto particolari; un risultato positivo al riguardo, sia pure a livello puramente teorico, è il seguente.

Teorema 1.40 (Malgrange–Ehrenpreis)**.** *Se i coefficienti a_α in (1.17) sono costanti, esiste sempre una soluzione fondamentale.*

Concludiamo con due esempi di espressione esplicita di una soluzione fondamentale per il Laplaciano nel caso $n = 2$ e $n > 2$ rispettivamente.

Lemma 1.41. *Su $\mathbb{R}^2$, una soluzione fondamentale del Laplaciano è data da*

$$u(x) := \frac{1}{2\pi} \log |x|\,.$$

Proof. Innanzitutto notiamo che $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, visto che $u \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ e che, integrando con coordinate polari,

$$\int_{B_r} u(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{r} \rho \log(\rho)\, d\rho\, d\theta \to 0\,;$$

di conseguenza, è vero che $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$. Notiamo ora che, fuori dall'origine, si ha

$$\nabla u(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{x}{|x|^2}\,,$$

e quindi un semplice conto assicura che $\Delta u(x) = 0$ in senso classico per ogni $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Applicando ora il Teorema della Divergenza sull'aperto ${}^cB_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, per una generica $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ troviamo

$$\int_{{}^cB_\varepsilon} u\Delta\varphi = \int_{{}^cB_\varepsilon} u \operatorname{div}\big(\nabla\varphi\big) = \int_{\partial({}^cB_\varepsilon)} u\nabla\varphi\cdot\nu - \int_{{}^cB_\varepsilon} \nabla u\cdot\nabla\varphi\,,$$

e allo stesso modo

$$\int_{{}^cB_\varepsilon} \varphi\Delta u = \int_{\partial({}^cB_\varepsilon)} \varphi\nabla u\cdot\nu - \int_{{}^cB_\varepsilon} \nabla u\cdot\nabla\varphi\,;$$

possiamo dedurre, allora,

$$\int_{{}^cB_\varepsilon} u\Delta\varphi - \varphi\Delta u = \int_{C_\varepsilon} \big(u\nabla\varphi - \varphi\nabla u\big)\cdot\nu\,, \tag{1.18}$$

denotando la circonferenza di raggio ε come $C_\varepsilon = \partial B_\varepsilon$. Valutiamo ora i diversi pezzi di (1.18): prima di tutto, visto che su ${}^cB_\varepsilon$ si ha $\Delta u \equiv 0$, il termine $\int \varphi\Delta u$ si annulla; in secondo luogo, si ha $\|\nabla\varphi\|_{\sup} \leq M$ per cui

$$\Big|\int_{\partial({}^cB_\varepsilon)} u\nabla\varphi\cdot\nu\Big| \leq M\int_{C_\varepsilon} |u|\, d\mathscr{H}^1 = M\varepsilon\log(\varepsilon) \to 0\,.$$

Possiamo ora calcolare

$$\int_{C_\varepsilon} \nabla u\cdot\nu = \int_{C_\varepsilon} \frac{1}{2\pi}\frac{x}{|x|^2}\cdot\frac{-x}{|x|} = -\int_{C_\varepsilon} \frac{1}{2\pi|x|} = -\int_{C_\varepsilon} \frac{1}{2\pi\varepsilon} = -1\,,$$

visto che la normale uscente da ${}^cB_\varepsilon$ è $\nu = -x/|x|$. Poiché φ è continua, se $\varepsilon \to 0$ si ha, allora,

$$\int_{C_\varepsilon} -\varphi\nabla u\cdot\nu \to \varphi(0)\,.$$

Infine, si ha chiaramente che $\int_{{}^cB_\varepsilon} u\Delta\varphi \to \int_{\mathbb{R}^2} u\Delta\varphi$, visto che $u \in L^1_{\text{loc}}$ e $\Delta\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$. Raccogliendo tutto, da (1.18) si deduce

$$\langle\Delta u, \varphi\rangle = \langle u, \Delta\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} u\Delta\varphi = \varphi(0)$$

□

Quanto appena mostrato assicura che per risolvere su $\mathbb{R}^2$ il problema $\Delta\varphi = f$, è sufficiente prendere $\varphi = u * f$; questo funziona sempre tra le distribuzioni, e in particolare troviamo una soluzione L^1_{loc} ogni volta che si può fare la convoluzione $u*f$ nel senso delle funzioni, ad esempio per $f \in L^1$ a supporto compatto; in questo caso si ha

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi}\log(|y-x|)f(y)\,dy\,. \tag{1.19}$$

Lemma 1.42. *Su $\mathbb{R}^N$ con $N > 2$, una soluzione fondamentale del Laplaciano è data da*

$$u(x) := -\frac{1}{N\omega_N(N-2)|x|^{N-2}}\,,$$

dove ω_N è il volume della palla unitaria $N-$dimensionale.

Proof. E' assolutamente identico al caso bi-dimensionale, si deve solo verificare che u sia in L^1_{loc}, che abbia laplaciano nullo in senso classico lontano dall'origine, applicare il Teorema della Divergenza trovando (1.18) con significato $N-$dimensionale, e passare al limite come prima. □

Ovviamente valgono gli stessi discorsi appena fatti nel caso bidimensionale riguardo alla possibilità di trovare soluzioni distribuzionali o L^1_{loc}, e l'analogo della (1.19) sarà

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{N\omega_N(N-2)|y-x|^{N-2}} f(y)\, dy\,.$$

Ovviamente in questo modo non abbiamo risolto tutti i problemi col laplaciano: di solito quello che interessa non è trovare una soluzione su $\mathbb{R}^N$ del problema $\Delta u = f$, ma anche che sul bordo di un assegnato dominio il comportamento sia preassegnato (ad esempio da condizioni di Neumann o Dirichlet); per ottenere questo chiaramente servirà un lavoro ulteriore.

2. Trasformata di Fourier

Subito dopo il capitolo sulle distribuzioni presentiamo rapidamente la trasformata di Fourier, uno strumento molto utile e potente nello studio delle equazioni a derivate parziali.

2.1. **Definizioni.**

Lo spazio adatto per presentare la trasformata di Fourier non è né $\mathscr{D}$ né $\mathscr{E}$, bensì uno spazio intermedio, lo spazio di Schwartz.

Definizione 2.1. *Si definisce* spazio di Schwartz *lo spazio $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ delle funzioni C^∞ che decrescono all'infinito con tutte le loro derivate più rapidamente di ogni potenza. Ossia, $\varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^N)$ appartiene a $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ se e solo se per ogni coppia di multi-indici α e β si ha*

$$\lim_{|x|\to\infty} x^\beta D^\alpha \varphi(x) = 0\,.$$

Diremo poi che $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{S}} \varphi$ se per ogni coppia di multi-indici α e β si ha che $x^\beta D^\alpha \varphi_k$ tende uniformemente a $x^\beta D^\alpha \varphi$.

Ovviamente si hanno le inclusioni $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{S} \subseteq \mathscr{E}$, e visto che sono inclusioni dense si hanno le corrispondenti $\mathscr{E}' \subseteq \mathscr{S}' \subseteq \mathscr{D}'$; le distribuzioni che appartengono a $\mathscr{S}'$ vengono dette *distribuzioni temperate*. Si noti che la densità di $\mathscr{D}$ in $\mathscr{S}$ è facile, ma non è automatica dal fatto che $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{S} \subseteq \mathscr{E}$ e $\mathscr{D}$ è denso in $\mathscr{E}$! In generale, infatti, si possono trovare insiemi $A \subseteq B \subseteq C$ in modo che l'inclusione $A \subseteq C$ e l'inclusione $B \subseteq C$ siano dense ma $A \subseteq B$ no; infatti, la topologia su $\mathscr{D}$ e su $\mathscr{S}$ *non* è quella data dall'inclusione in $\mathscr{E}$.

Pur essendo ovvio, risulta spesso utile il seguente risultato.

Lemma 2.2. *Sia $\varphi \in \mathscr{E}$; allora $\varphi \in \mathscr{S}$ se e solo se per ogni intero k e ogni multi-indice α la funzione*

$$(1+|x|^2)^k D^\alpha \varphi(x)$$

è limitata.

Presentiamo subito la definizione della trasformata di Fourier su $\mathscr{S}$.

Definizione 2.3. *Sia $\varphi \in \mathscr{S}$; allora $\widehat{\varphi} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ è definita da*

$$\widehat{\varphi}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \varphi(x)\, dx\,. \tag{2.1}$$

2.2. **Prime proprietà.** Per com'è costruita, la trasformata di Fourier ha ovviamente un significato complesso, e in effetti quando si lavora con la trasformata di Fourier si lavora implicitamente con funzioni a valori complessi; tuttavia, i risultati che si ottengono sono particolarmente interessanti ed utili anche avendo in mente solo funzioni a valori reali. Il nostro primo scopo è verificare che $\widehat{\ }: \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ sia un'applicazione lineare e continua: studiamo dunque prima la continuità, poi la derivabilità di $\widehat{\varphi}$.

Lemma 2.4. *Data $\varphi \in \mathscr{S}$, la sua trasformata $\widehat{\varphi}$ è uniformemente continua.*

Proof. Fissato ε, scegliamo R tale che $\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^N \setminus B_R)} \leq \varepsilon$, e valutiamo

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}(\xi+\eta) - \widehat{\varphi}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi}\Big(e^{-2\pi i x\cdot\eta} - 1\Big)\,dx \\
&= \int_{B_R} \varphi(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi}\Big(e^{-2\pi i x\cdot\eta} - 1\Big)\,dx \\
&\qquad + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} \varphi(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi}\Big(e^{-2\pi i x\cdot\eta} - 1\Big)\,dx\,.
\end{aligned}$$

Ora,

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} \varphi(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi}\Big(e^{-2\pi i x\cdot\eta} - 1\Big)\,dx\Big| \leq 2\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} |\varphi(x)|\,dx \leq 2\varepsilon\,;$$

d'altra parte, ovviamente esiste un $\bar\eta \in \mathbb{R}^+$ tale che per ogni $x \in B_R$ e per ogni $|\eta| \leq \bar\eta$ si ha

$$\big|e^{-2\pi i x\cdot\eta} - 1\big| \leq \varepsilon\,,$$

da cui

$$\Big|\int_{B_R} \varphi(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi}\Big(e^{-2\pi i x\cdot\eta} - 1\Big)\,dx\Big| \leq \int_{B_R} \varepsilon|\varphi(x)|\,dx \leq \varepsilon\,\|\varphi\|_{L^1(\Omega)}\,.$$

In conclusione, purché $|\eta| \leq \bar\eta$ si ha

$$\big|\widehat{\varphi}(\xi+\eta) - \widehat{\varphi}(\xi)\big| \leq \varepsilon\big(2 + \|\varphi\|_{L^1(\Omega)}\big)\,,$$

e dunque abbiamo stabilito l'uniforme continuità di $\widehat{\varphi}$. □

Lemma 2.5. *Date φ, $\psi \in \mathscr{S}$, si ha*

$$\|\widehat{\varphi} - \widehat{\psi}\|_{L^\infty} \leq \|\varphi - \psi\|_{L^1}\,.$$

Proof. Basta semplicemente prendere $\xi \in \mathbb{R}^N$ e notare che

$$\begin{aligned}
\big|\widehat{\varphi}(\xi) - \widehat{\psi}(\xi)\big| &= \Big|\int e^{-2\pi i x\cdot\xi}(\varphi(x) - \psi(x))\,dx\Big| \leq \int \big|e^{-2\pi i x\cdot\xi}(\varphi(x) - \psi(x))\big|\,dx \\
&= \int \big|\varphi(x) - \psi(x)\big|\,dx = \|\varphi - \psi\|_{L^1}\,.
\end{aligned}$$

□

Lemma 2.6. *Date φ, $\psi \in \mathscr{S}$, si ha $\widehat{\varphi * \psi} = \widehat{\varphi}\widehat{\psi}$.*

Proof. Anche questo è un immediato conto:

$$\widehat{\varphi * \psi}(\xi) = \int_x e^{-2\pi i x\cdot\xi}\varphi * \psi(x)\,dx = \int_x e^{-2\pi i x\cdot\xi}\Big(\int_y \varphi(y)\psi(x-y)\,dy\Big)\,dx$$

$$= \int_x \int_y e^{-2\pi i y\cdot\xi}\varphi(y) e^{-2\pi i (x-y)\cdot\xi}\psi(x-y)\,dy\,dx = \widehat{\varphi}(\xi)\widehat{\psi}(\xi)\,.$$

□

Passiamo ora a studiare il problema di derivare una trasformata di Fourier, visto che abbiamo in mente di mostrare che anche una trasformata sta in $\mathscr{S}$.

Lemma 2.7. *Sia $\varphi \in \mathscr{S}$; allora si ha*

$$\frac{\partial\widehat{\varphi}}{\partial\xi_i}(\xi) = -2\pi i\ \widehat{x_i\varphi}(\xi)\,, \qquad\qquad \widehat{\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}(\xi) = 2\pi i\xi_i\,\widehat{\varphi}(\xi)\,. \tag{2.2}$$

Proof. Dal momento che $\varphi \in \mathscr{S}$, e dunque sia φ che $\partial\varphi/\partial x_i$ sono limitate e tendono a zero più velocemente dei polinomi, si può portare la derivata sotto il segno di integrale, ottenendo

$$\begin{aligned}\frac{\partial\widehat{\varphi}}{\partial\xi_i}(\xi) &= \partial\Big(\int e^{-2\pi i x\cdot\xi}\varphi(x)\,dx\Big)\Big/\partial\xi_i = \int \frac{\partial\big(e^{-2\pi i x\cdot\xi}\varphi(x)\big)}{\partial\xi_i}\,dx\\ &= \int -2\pi i\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}x_i\varphi(x)\,dx = -2\pi i\ \widehat{x_i\varphi}(\xi)\,,\end{aligned}$$

e la prima identità è mostrata. Per quanto riguarda la seconda, per ogni $R \in \mathbb{R}^+$ chiamiamo B_R la palla centrata nell'origine e di raggio R; basta integrare per parti per trovare

$$\begin{aligned}\int_{B_R} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\,dx &= \int_{\partial B_R} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\varphi(x)\,\frac{x_i}{R}\,d\mathscr{H}^{N-1}(x) - \int_{B_R}\frac{\partial e^{-2\pi i x\cdot\xi}}{\partial x_i}\,\varphi(x)\,dx\\ &= \int_{\partial B_R} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\varphi(x)\,\frac{x_i}{R}\,d\mathscr{H}^{N-1}(x) + 2\pi i\xi_i\int_{B_R} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\varphi(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

Ricordando che $\varphi \in \mathscr{S}$, allora, si deduce

$$\widehat{\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}(\xi) = \lim_{R\to+\infty}\int_{B_R} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\,dx = 2\pi i\xi_i\lim_{R\to+\infty}\int_{B_R} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\varphi(x)\,dx = 2\pi i\xi_i\,\widehat{\varphi}(\xi)\,.$$

□

Con una banale induzione si ottiene il seguente

Corollario 2.8. *Sia $\varphi \in \mathscr{S}$; allora per ogni multi-indice α si ha*

$$D^\alpha\widehat{\varphi}\,(\xi) = (-2\pi i)^{|\alpha|}\ \widehat{x^\alpha\varphi}(\xi)\,, \qquad\qquad \widehat{D^\alpha\varphi}(\xi) = (2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha\,\widehat{\varphi}(\xi)\,.$$

Di conseguenza, l'applicazione $\widehat{\ }: \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ è lineare e continua.

2.3. **La formula di inversione.** Il motivo per cui abbiamo deciso di studiare la trasformata di Fourier sullo spazio di Schwartz diventa chiaro in vista della possibilità di invertire la trasformata. Si può infatti considerare la cosiddetta *antitrasformata*, che porta φ in

$$\overset{\vee}{\varphi}(x) = \int e^{2\pi i x\cdot\xi}\varphi(\xi)\,d\xi\,.$$

Si mostra subito che l'antitrasformata è proprio l'inversa della trasformata. Prima di tutto, ci fa comodo calcolare la trasformata in un caso particolare.

Esempio 2.9. *Detta* $\varphi(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$, *si ricordi che è*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\,dx = \bigl(2\pi\bigr)^{N/2}.$$

Si ha allora, tramite il cambio di variabili $y = x + 2\pi i\xi$,

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i x\cdot\xi} e^{-\frac{|x|^2}{2}}\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|y|^2}{2}} e^{-2\pi^2|\xi|^2}\,dy = \bigl(2\pi\bigr)^{N/2} e^{-2\pi^2|\xi|^2}.$$

Lemma 2.10. *Sia* $\varphi \in \mathscr{S}$*; allora per ogni* $x \in \mathbb{R}^N$ *si ha*

$$\varphi(x) = \int e^{2\pi i x\cdot\xi}\widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi\,, \tag{2.3}$$

ossia $\bigl(\widehat{\varphi}\bigr)^{\vee} = \varphi$.

Proof. Iniziamo osservando che, per ogni coppia di funzioni φ, $\psi \in \mathscr{S}$, si ha la *identità debole di Parseval*, che asserisce

$$\int \varphi(x)\widehat{\psi}(x)\,dx = \int \widehat{\varphi}(x)\psi(x)\,dx\ : \tag{2.4}$$

per mostrare questo fatto basta esprimere $\widehat{\psi}$ nel primo membro dell'uguaglianza in forma integrale e poi cambiare l'ordine di integrazione. Un altro conto banale a partire dalla definizione della trasformata assicura poi che

$$\widehat{\varphi\Bigl(\frac{\cdot}{\lambda}\Bigr)}(\xi) = \lambda^N\widehat{\varphi}(\lambda\xi)\,.$$

Allora dall'identità di Parseval (2.4) deduciamo che

$$\int \widehat{\psi}(x)\varphi\Bigl(\frac{x}{\lambda}\Bigr)\,dx = \int \psi(x)\widehat{\varphi\Bigl(\frac{\cdot}{\lambda}\Bigr)}(x)\,dx = \int \psi(x)\lambda^N\widehat{\varphi}(\lambda x)\,dx = \int \psi\Bigl(\frac{x}{\lambda}\Bigr)\widehat{\varphi}(x)\,dx\,;$$

mandando λ all'infinito, essendo φ e ψ in $\mathscr{S}$ otteniamo

$$\frac{\displaystyle\int \widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi}{\varphi(0)} = \frac{\displaystyle\int \widehat{\psi}(\xi)\,d\xi}{\psi(0)}\,; \tag{2.5}$$

dunque il rapporto $\int \widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi/\varphi(0)$ è lo stesso per ogni $\varphi \in \mathscr{S}$; si può quindi verificare il valore di questo rapporto su una qualunque funzione "comoda". In particolare, visto che nell'Esempio 2.9 abbiamo già calcolato la trasformata per la gaussiana, con $\varphi(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ si ha

$$\frac{\displaystyle\int \widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi}{\varphi(0)} = \int \widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi = \bigl(2\pi\bigr)^{N/2}\int e^{-2\pi^2|\xi|^2}\,d\xi = \frac{1}{\bigl(2\pi\bigr)^{N/2}}\int e^{-\frac{|y|^2}{2}}\,dy = 1$$

con il cambio di variabili $y = 2\pi\xi$: deduciamo quindi che il rapporto $\int \widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi/\varphi(0)$ è pari ad 1 per ogni $\varphi \in \mathscr{S}$, e dunque in particolare

$$\varphi(0) = \int \widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi = \int e^{2\pi i 0\cdot\xi}\widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi\,,$$

cioè la formula (2.3) è verificata per $x = 0$; per verificarla per qualunque altro x, è sufficiente operare una traslazione di $-x$ a φ ed applicare quanto appena trovato. $\square$

In effetti, la presenza del 2π nella definizione di trasformata non serve a nient'altro se non ad ottenere appunto che il rapporto (2.5) sia uguale ad 1 e dunque che non compaiano costanti nella definizione dell'antitrasformata. Questo fra un attimo ci farà dedurre l'identità forte di Parseval senza costanti aggiuntive ed in particolare il Corollario 2.13 ci assicurerà che la trasformata sia un'isometria nel senso di L^2 (il che ovviamente è molto più elegante piuttosto che dire che la trasformata moltiplica sempre la norma per un fattore costante di una potenza di $2\pi\ldots$).

Corollario 2.11. *La trasformata di Fourier* $\widehat{\ }: \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ *è un'applicazione lineare, biunivoca e bicontinua* $\mathscr{S}$ *in sè.*

Proof. Il fatto che $\mathscr{S}$ sia lineare e continua è assicurato dal Corollario 2.8; il fatto che l'antitrasformata sia proprio l'inversa della trasformata, come appena mostrato, assicura la biunivocità; infine, il fatto che l'antitrasformata sia lineare è ovvio dalla definizione, e la sua continuità può essere mostrata esattamente nello stesso modo in cui abbiamo trovato la continuità della trasformata –trovando quindi formule del tutto analoghe alle (2.2). $\square$

Lemma 2.12 (Identità forte di Parseval)**.** *Date* φ, ψ *in* $\mathscr{S}$, *si ha*

$$\int \varphi(x)\overline{\psi}(x)\,dx = \int \widehat{\varphi}(\xi)\overline{\widehat{\psi}(\xi)}\,d\xi\,,$$

indicando con $\overline{z}$ *il coniugato di un qualunque numero* $z \in \mathbb{C}$.

Proof. Visto che la trasformata è invertibile, e visto che $\overline{\psi}$ ovviamente sta in $\mathscr{S}$, esiste una funzione $f \in \mathscr{S}$ tale che $\widehat{f} = \overline{\psi}$; l'identità debole di Parseval (2.4) assicura allora che

$$\int \varphi\overline{\psi} = \int \varphi\widehat{f} = \int \widehat{\varphi} f\,;$$

d'altra parte, osserviamo che per la formula (2.3) dell'antitrasformata

$$f(x) = \int e^{2\pi i x\cdot\xi}\overline{\psi(\xi)}\,d\xi = \int \overline{e^{-2\pi i x\cdot\xi}\psi(\xi)}\,d\xi = \overline{\widehat{\psi}(x)}\,,$$

e dunque abbiamo ottenuto la tesi. $\square$

Corollario 2.13. *Data* $\varphi \in \mathscr{S}$, *si ha*

$$\|\varphi\|_{L^2} = \|\widehat{\varphi}\|_{L^2}\,.$$

Proof. Basta applicare l'identità forte di Parseval ricordando che

$$\|\varphi\|_{L^2} = \int \varphi^2 = \int \varphi\overline{\varphi}\,.$$

$\square$

2.4. **La trasformata di Fourier in L^1 e in L^2.** Occupiamoci adesso di estendere la definizione di trasformata di Fourier a spazi un po' più generali di $\mathscr{S}$; prima di tutto, osserviamo che la formula (2.1) ha senso anche per $\varphi \in L^1$, visto che la funzione $e^{-2\pi i x\cdot\xi}$ è in L^∞; possiamo quindi usare esattamente la stessa formula e definire la trasformata di Fourier per funzioni in L^1. Un primo risultato interessante è la regolarità della trasformata, nel senso del seguente lemma.

Lemma 2.14 (Lemma di Riemann–Lebesgue)**.** *Se* $\varphi \in L^1$, *allora* $\widehat{\varphi}$ *è una funzione uniformemente continua che tende a* 0 *all'infinito.*

Proof. Intanto osserviamo che se $\varphi_k \in \mathscr{S}$ e $\varphi_k \xrightarrow{L^1} \varphi$, allora $\widehat{\varphi}_k$ tende uniformemente a $\widehat{\varphi}$ grazie al Lemma 2.5; allora dal Lemma 2.4 deduciamo che $\widehat{\varphi}$ è uniformemente continua, visto che il limite uniforme di funzioni uniformemente continue è uniformemente continuo. Allo stesso modo, il limite uniforme di funzioni che tendono a 0 all'infinito tende anch'esso a 0 all'infinito. □

In generale è facile osservare che non si può sperare in una maggiore regolarità per trasformate di funzioni L^1; tuttavia, si può dire molto di più nel caso di funzioni L^1 a supporto compatto.

Lemma 2.15. *Se $\varphi \in L^1$ è a supporto compatto, allora $\widehat{\varphi} \in \mathscr{E}$.*

Proof. Si ricordi la formula (2.2) per la derivata delle trasformate di funzioni in $\mathscr{S}$. Approssimando ancora φ in L^1 con funzioni di Schwartz, deduciamo che la formula per $\partial\widehat{\varphi}/\partial\xi_i$ è ancora valida purché $x_i\varphi$ sia ancora in L^1. Dunque, la funzione $\widehat{\varphi}$ è infinitamente derivabile purché $x^\alpha\varphi$ sia in L^1 per ogni multi-indice α, cosa che in particolare è sicuramente vera se φ è a supporto compatto. □

Osservazione 2.16. *Si osservi che, se $\varphi \in L^1 \setminus \mathscr{S}$ è a supporto compatto, allora è vero che $\widehat{\varphi}$ sta in $\mathscr{E}$, ma non sarà mai vero che $\widehat{\varphi}$ sia a supporto compatto; più in generale, non potrà essere $\widehat{\varphi} \in \mathscr{S}$, visto che altrimenti grazie all'antitrasformata dedurremmo che $\varphi \in \mathscr{S}$. Più in generale, si osservi che nel passaggio da una funzione alla sua trasformata vi è una sorta di "dualità" tra la regolarità e la decadenza all'infinito, nel senso che una delle due proprietà per φ assicura l'altra per $\widehat{\varphi}$.*

Concludiamo questa sezione osservando che la trasformata si può definire anche per funzioni in L^2: infatti, grazie al Corollario 2.13, se $\varphi_k \in \mathscr{S}$ e $\varphi_k \xrightarrow{L^2} \varphi$, allora $\widehat{\varphi}_k$ è una successione di Cauchy in L^2, ed è quindi sensato definire (in modo univoco!) il suo limite *trasformata di Fourier di* $\varphi \in L^2$. Tuttavia, in questo caso *non* vale la formula (2.1), visto che per una generica funzione in L^2 l'integrale a destra può tranquillamente non essere definito. Pur non essendo definita da una formula chiusa ma solo per densità, la trasformata di Fourier in L^2 è molto utile soprattutto grazie al seguente risultato.

Teorema 2.17 (Plancharel)**.** *La trasformata di Fourier è un'isometria su L^2.*

Proof. E' evidente grazie al Corollario 2.13. □

Si osservi dunque che la trasformata manda $\mathscr{S}$ in sé in modo biunivoco e bicontinuo, e lo stesso accade –per di più con un'isometria!– con L^2. La stessa cosa *non* accade né con L^1, nè con $\mathscr{D}$, né tantomeno con $\mathscr{E}$, visto che su $\mathscr{E}$ la trasformata di Fourier non si può definire.

2.5. **La trasformata di Fourier per le distribuzioni temperate.** Un'ultima estensione della trasformata di Fourier può essere data su $\mathscr{S}'$, ossia lo spazio delle distribuzioni temperate. In effetti, grazie all'identità debole di Parseval, è evidente che possiamo definire una trasformata su $\mathscr{S}'$ (che estende quella usuale nel senso dell'inclusione $\mathscr{S}' \subseteq \mathscr{S}$) come segue.

Definizione 2.18. *Sia $T \in \mathscr{S}'$. Si definisce allora $\widehat{T} \in \mathscr{S}'$ come*

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \widehat{\varphi} \rangle \,.$$

Possiamo subito generalizzare le formule (2.2) anche alle trasformate di Fourier su $\mathscr{S}'$.

Lemma 2.19. *Data una distribuzione temperata $T \in \mathscr{S}'$, si ha*

$$\frac{\partial \widehat{T}}{\partial \xi_i} = -2\pi i\, \widehat{x_i T}\,, \qquad\qquad \widehat{\frac{\partial T}{\partial x_i}} = 2\pi i \xi_i\, \widehat{T}\,. \tag{2.6}$$

Proof. Sia $\varphi \in \mathscr{S}$; allora, usando la formula (2.2) possiamo valutare

$$\begin{aligned}\langle \widehat{x_i T}, \varphi\rangle &= \langle x_i T, \widehat{\varphi}\rangle = \langle T, x_i \widehat{\varphi}\rangle = \langle T, \frac{1}{2\pi i}\, \widehat{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}\,\rangle = \frac{1}{2\pi i}\,\langle T, \widehat{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}\,\rangle = \frac{1}{2\pi i}\,\langle \widehat{T}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,\rangle \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\,\langle \frac{\partial \widehat{T}}{\partial x_i}\,, \varphi\rangle\,.\end{aligned}$$

Si noti che, per mostrare la prima formula in (2.6) abbiamo usato la seconda formula in (2.2), cioè quella non corrispondente a quella che volevamo mostrare, per dualità. La seconda formula in (2.6) si mostra esattamente allo stesso modo, scaricando derivata e trasformata sulla funzione regolare ed utilizzando la prima formula in (2.2). □

Ovviamente si possono ottenere con una banale induzione anche le formule per le derivate generiche come nel Corollario 2.8

Esempio 2.20. Usando la formula (2.6) e quanto già noto per le distribuzioni, abbiamo $\widehat{\delta} = 1$, $\widehat{1} = \delta$, $\widehat{D^\alpha \delta} = (2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha$, e così via.