Soluzioni della prova scritta per il corso di Analisi Matematica 2
corso di laurea in Ingegneria Biomedica
Università di Pisa
30/6/2022

Esercizio 1. Notiamo innanzitutto che il dominio contiene solo punti con $x \geq 0$, visto che se $x < 0$ si ha $1 - e^{-x} < 0$ e quindi non vi sono $0 \leq y \leq 1 - e^{-x}$. Inoltre, per ogni $(x, y) \in D$ si ha per definizione che $0 \leq y < 1$, e quindi $0 \leq xy < x$. Di conseguenza, il denominatore verifica

$$x^2 - xy + 1 \geq x^2 - x + 1 > 0\,.$$

Dal momento che il denominatore è strettamente positivo in ogni punto del dominio, e che la funzione f è ottenuta mettendo insieme funzioni continue e differenziabili, si ottiene che f è continua in ogni punto di D, ed è differenziabile in ogni punto interno a D.

Per quanto riguarda il segno, visto che il denominatore è sempre strettamente positivo dipende solo dal numeratore. Avendo già osservato che per ogni punto $(x, y) \in D$ si ha $0 \leq y < 1$, e dunque $0 \leq 4y < 4$, si deduce che f è strettamente positiva per ogni $(x, y) \in D$ con $0 < y < \pi/4$, è negativa per ogni $(x, y) \in D$ con $\pi/4 < y < 1$, ed è nulla per ogni $(x, y) \in D$ con $y = 0$ e con $y = \pi/4$.

Visto che per $(x, y) \in D$ si ha che $0 \leq y < 1$ e $x \geq 0$, allora se $|(x, y)| \to \infty$ per punti $(x, y) \in D$ si deve avere $x \to +\infty$. Si ha dunque che

$$\lim_{|(x,y)|\to\infty,\,(x,y)\in D} f(x, y) = 0\,,$$

e visto che esistono punti di D in cui f è strettamente positiva ed altri in cui è strettamente negativa si deduce l'esistenza di punti di massimo e di minimo globale.

Un semplice conto assicura che in D si ha

$$Df(x, y) = \frac{1}{(x^2 - xy + 1)^2}\Big(-\operatorname{sen}(4y)(2x - y),\, 4\cos(4y)(x^2 - xy + 1) + \operatorname{sen}(4y)x\Big)\,,$$

e di conseguenza un punto $(x, y) \in D$ verifica $\partial f/\partial x\,(x, y) = 0$ se e solo se $\operatorname{sen}(4y) = 0$ oppure $y = 2x$. Tuttavia, per $x > 0$ si ha che $1 - e^{-x} < x$ e dunque per ogni $(x, y) \in D$ per il quale $x > 0$ si ha $y \leq 1 - e^{-x} < x < 2x$, e quindi nei punti interni di D l'equazione $y = 2x$ non è mai soddisfatta. Si ha cioè che la derivata parziale in direzione x si annulla per punti interni di D se e solo se $y = \pi/4$; in questo caso, tuttavia, si ha che $\operatorname{sen}(4y) = 0$ e $\cos(4y) = 1$, per cui per tali punti la derivata parziale in direzione y si annulla solo se $x^2 - xy + 1 = 0$, cosa che d'altra parte abbiamo già visto non essere mai verificata nel dominio. Riassumendo, non esiste neppure un punto critico di f in D.

Per concludere, i punti di massimo e minimo globale (che esistono come notato sopra) devono essere sul bordo di D, e visto che se $y = 0$ allora $f = 0$ e dunque non si possono trovare punti di massimo o minimo globale, si ha che i punti di massimo e minimo globale devono essere sul "bordo superiore" di D, ossia in punti della forma $(x, 1 - e^{-x})$ con $x > 0$. In particolare, il massimo si raggiungerà in qualche punto nella parte iniziale di tale bordo superiore, ossia dove

$y < \pi/4$, mentre il minimo verrà raggiunto in qualche punto con $y > \pi/4$ (questo è chiaro, visto che il massimo deve essere in un punto in cui $f > 0$, ed il minimo in un punto in cui $f < 0$).

Esercizio 2. La curva C è una mezza circonferenza di raggio 1, situata nel semipiano $\{z = 0,\ y \geq 0\}$, dunque la sua lunghezza è π. Per quanto riguarda l'insieme E, lo possiamo suddividere come $E = E^+ \cup E^-$, dove

$$E^+ = E \cap \{y \geq 0\}\,, \qquad\qquad E^- = E \cap \{y \leq 0\}\,.$$

Se $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e $y \leq 0$, allora il punto di C più vicino a P è $(1, 0, 0)$ se $x \geq 0$, e $(-1, 0, 0)$ se $x \leq 0$; di conseguenza, E^- è l'unione di due mezze palle di raggio 1, centrate in $(1, 0, 0)$ e $(-1, 0, 0)$ rispettivamente, e quindi in particolare tangenti tra di loro nell'origine. Se invece $P = (x, y, z)$ e $y \geq 0$, allora il punto di C più vicino a P è $(x/\sqrt{x^2 + y^2}, y/\sqrt{x^2 + y^2}, 0)$. Di conseguenza, è facile descrivere anche l'insieme E^+: più precisamente, per ogni $(x, y, 0) \in C$ si ha che l'insieme dei punti di E per i quali $(x, y, 0)$ è il punto di C più vicino è dato da una circonferenza di raggio 1, centrata in $(x, y, 0)$, e situata nel piano $\{(\alpha x,\ \beta y,\ 0),\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}\}$.

E' quindi possibile parametrizzare E^+ come

$$E^+ = \Big\{\big((1 + \rho\cos\theta)\cos\phi, (1 + \rho\cos\theta)\operatorname{sen}\phi, \rho\operatorname{sen}\theta\big),\ 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq 1\Big\}\,.$$

Per calcolare il volume di E^+, allora, basta chiamare

$$f(\rho,\ \theta,\ \phi) = \big((1 + \rho\cos\theta)\cos\phi, (1 + \rho\cos\theta)\operatorname{sen}\phi, \rho\operatorname{sen}\theta\big)\,,$$

ed osservare che

$$\det Df = \det\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & -\rho\operatorname{sen}\theta\cos\phi & -(1 + \rho\cos\theta)\operatorname{sen}\phi \\ \cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & (1 + \rho\cos\theta)\cos\phi \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{pmatrix} = -\rho(1 + \rho\cos\theta)\,.$$

Di conseguenza,

$$\mathrm{Vol}(E^+) = \int_{\rho=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi}\big|\det Df\big|\,d\phi\,d\theta\,d\rho = \int_{\rho=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi}\rho(1 + \rho\cos\theta)\,d\phi\,d\theta\,d\rho = \pi^2\,.$$

Visto che E^- è dato da due mezze palle di raggio 1, il volume di E^- è $4/3\pi$, e quindi

$$\mathrm{Vol}(E) = \pi^2 + \frac{4}{3}\,\pi\,.$$

Consideriamo infine il perimetro: possiamo suddividere il bordo di E nella parte Γ^+ fatta dai punti con $y \geq 0$, e la parte Γ^- fatta dai punti con $y < 0$. Per quanto riguarda Γ^-, si tratta di due mezze sfere di raggio 1, e quindi l'area di Γ^- è 4π. Per quanto riguarda Γ^+, ricordando la parametrizzazione di E^+ si può scrivere

$$\Gamma^+ = \Big\{\big((1 + \cos\theta)\cos\phi, (1 + \cos\theta)\operatorname{sen}\phi,\ \operatorname{sen}\theta\big),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq 1\Big\}\,.$$

Chiamando allora

$$g(\theta,\ \phi) = \big((1 + \cos\theta)\cos\phi, (1 + \cos\theta)\operatorname{sen}\phi,\ \operatorname{sen}\theta\big)\,,$$

si ha

$$\left|\frac{\partial g}{\partial \theta}\wedge\frac{\partial g}{\partial \phi}\right| = \Big|\big(-\operatorname{sen}\theta\cos\phi, -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, \cos\theta\big)\wedge\big(-(1+\cos\theta)\operatorname{sen}\phi, (1+\cos\theta)\cos\phi, 0\big)\Big| = (1+\cos\theta)\,.$$

E di conseguenza, l'area di Γ^+ si può calcolare come

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi} 1+\cos\theta\, d\phi\, d\theta = 2\pi^2\,,$$

il che ricordando l'area di Γ^- ci permette di concludere che

$$\operatorname{Per}(E) = 2\pi^2 + 4\pi\,.$$