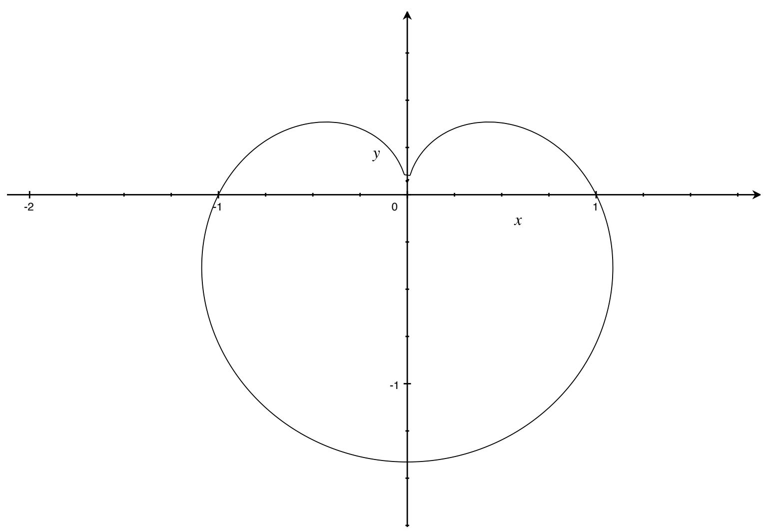
Soluzioni della prova scritta per il corso di Analisi Matematica 2
corso di laurea in Ingegneria Biomedica
Università di Pisa
21/7/2022

Esercizio 1. Visto che $y/\sqrt{x^2+y^2}$ è il seno dell'angolo corrispondente al punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, è facile immaginare che la scrittura in coordinate polari sia utile. Indicando quindi come al solito con (ρ, θ) le coordinate polari di un punto, si ha che appartengono all'insieme A_n i punti tali che $\rho^2 \leq (1 - \operatorname{sen}\theta)^n$. Per $n = 0$ si ha quindi il cerchio di raggio 1 centrato nell'origine, la cui area è π.

Per quanto riguarda il caso $n = 1$, l'insieme A_1 è fatto dai punti per i quali $\rho^2 \leq 1 - \operatorname{sen}\theta$, che visto che ρ e $1 - \operatorname{sen}\theta$ sono entrambi sempre positivi si può riscrivere come $\rho \leq \sqrt{1 - \operatorname{sen}\theta}$. L'insieme A_1 è quindi formato da un segmento di lunghezza $\sqrt{1 - \operatorname{sen}\theta}$ in direzione θ per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$. Tali segmenti hanno lunghezza pari a 1 per le direzioni orizzontali $\theta = 0,\ \pi$, lunghezza minore di 1 per $0 < \theta < \pi$ con un minimo di 0 per $\theta = \pi/2$, e lunghezza maggiore di 1 per $\pi < \theta < 2\pi$, con un massimo di $\sqrt{2}$ per $\theta = \frac{3}{2}\pi$. Una figura schematica dell'insieme è mostrata qui sotto.



Per calcolare l'area di A_1 basta quindi integrare in coordinate polari, ottenendo

$$\operatorname{Area}(A_1) = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{\sqrt{1-\operatorname{sen}\theta}} \rho \, d\rho \, d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} 1 - \operatorname{sen}\theta \, d\theta = \pi \,.$$

Per quanto riguarda l'insieme A_2, valgono ragionamenti molto simili a quelli relativi ad A_1, e anche la figura sarà abbastanza simile; infatti, l'insieme A_2 è fatto dai punti per i quali $\rho^2 \leq (1 - \operatorname{sen}\theta)^2$, ossia –ricordando nuovamente che sia ρ che $1 - \operatorname{sen}\theta$ sono sempre positivi– per i quali $\rho \leq 1 - \operatorname{sen}\theta$. L'area di A_2 sarà quindi data da

$$\operatorname{Area}(A_2) = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{1-\operatorname{sen}\theta} \rho \, d\rho \, d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} 1 - 2\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta = \frac{3}{2}\pi \,.$$

Calcoliamo adesso il perimetro di A_2. Da quanto osservato prima, sappiamo che il bordo di A_2 è dato da tutti i punti di coordinate polari $(1 - \operatorname{sen}\theta, \theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi]$. Possiamo quindi parametrizzare il bordo di A_2 come

$$\Big\{\big((1 - \operatorname{sen}\theta)\cos\theta,\ (1 - \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta\big),\ 0 \le \theta \le 2\pi\Big\}.$$

Detta quindi $\varphi(\theta) = \big((1 - \operatorname{sen}\theta)\cos\theta,\ (1 - \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta\big)$, il perimetro di A_2 sarà dato da

$$\operatorname{Per}(A_2) = \int_{\theta=0}^{2\pi} \big|\varphi'(\theta)\big|\, d\theta\,.$$

Riscrivendo

$$\varphi(\theta) = \left(\cos\theta - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2},\ \operatorname{sen}\theta + \frac{\cos(2\theta)}{2} + \frac{1}{2}\right),$$

un rapido conto assicura che $|\varphi'(\theta)| = \sqrt{2(1 - \operatorname{sen}\theta)}$. Si ha quindi

$$\operatorname{Per}(A_2) = \sqrt{2}\int_{\theta=0}^{2\pi} \sqrt{1 - \operatorname{sen}\theta}\, d\theta = \sqrt{2}\int_{\theta=0}^{2\pi} \sqrt{1 - \cos\theta}\, d\theta = 2\int_{\theta=0}^{2\pi} \left|\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right| d\theta = 8\,.$$

Conideriamo infine l'insieme Ω. Per ogni $0 < z \le 1$, l'intersezione di Ω con il piano orizzontale $\{(x, y, z),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ è una "copia" di A_2 moltiplicata per z, ossia è data da tutti i punti del tipo (za, zb) con $(a, b) \in A_2$. La sua area è quindi l'area di A_2 moltiplicata per z^2, cioè $\frac{3}{2}\pi z^2$. Il volume di Ω è quindi dato da

$$\operatorname{Vol}(\Omega) = \frac{3}{2}\pi \int_{z=0}^{1} z^2\, dz = \frac{\pi}{2}\,.$$

Per concludere, parametrizziamo il bordo di Ω come l'insieme

$$\Big\{\big(z(1 - \operatorname{sen}\theta)\cos\theta, z(1 - \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta, z\big),\ \theta \in [0, 2\pi],\ z \in [0, 1]\Big\}.$$

Per esprimere il perimetro di Ω, possiamo quindi definire la funzione $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ come $\psi(z, \theta) = \big(z(1 - \operatorname{sen}\theta)\cos\theta, z(1 - \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta, z\big)$, e si ha quindi

$$\operatorname{Per}(\Omega) = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{1} \left|\frac{\partial\psi}{\partial z} \wedge \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right| dz\, d\theta\,.$$

Esercizio 2. La funzione f è chiaramente continua e differenziabile, essendo somma e prodotto di funzioni elementari che lo sono. Per quanto riguarda il limite all'infinito, visto che

$$\lim_{|(x,y)|\to\infty} (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)} = 0\,,$$

deduciamo che

$$\lim_{|(x,y)|\to\infty} x^4 + 2y^4 - (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)} = \lim_{|(x,y)|\to\infty} x^4 + 2y^4 = +\infty\,.$$

Questo limite assicura subito che non possa esistere un massimo globale, e che invece debba esistere un minimo globale per il cosiddetto Teorema di Weierstrass generalizzato.

Per studiare i punti citici di f, calcoliamo

$$\nabla f(x, y) = \left(2x\Big(2x^2 + e^{-(x^2+y^2)}\big(x^2 + y^2 - 1\big)\Big),\ 2y\Big(4y^2 + e^{-(x^2+y^2)}\big(x^2 + y^2 - 1\big)\Big)\right).$$

Chiaramente l'origine è un punto critico. Per trovare gli altri, conviene considerare separatamente tre casi, ossia se $x = 0$ e $y \neq 0$, oppure se $x \neq 0$ e $y = 0$, oppure se $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

Nel primo caso, il gradiente si annulla se e solo se

$$4y^2 + e^{-y^2}\big(y^2 - 1\big) = 0$$

Chiamiamo per comodità $t = y^2$, così che l'equazione precedente diventa

$$4t + e^{-t}(t - 1) = 0\,.$$

Visto che la funzione $4t+e^{-t}(t-1)$ vale -1 in 0, tende all'infinito per $t \to +\infty$, ed è strettamente crescente per $t > 0$, l'equazione di sopra ha esattamente una soluzione per $t \geq 0$, e di conseguenza esiste un numero $\alpha > 0$ tale che, per $x = 0$ e $y \neq 0$, gli unici punti critici sono $(0, \alpha)$ e $(0, -\alpha)$. Notiamo che $0 < \alpha < 1$, visto che in $t = 1$ la funzione $4t + e^{-t}(t - 1)$ vale 4 e quindi è già positiva.

Il caso $x \neq 0$ e $y = 0$ è praticamente identico, visto che in tale caso il gradiente si annulla se e solo se

$$2x^2 + e^{-x^2}\big(x^2 - 1\big) = 0\,.$$

Visto che anche la funzione $t \mapsto 2t + e^{-t}(t - 1)$ vale -1 in 0, tende all'infinito per $t \to +\infty$, ed è strettamente crescente per $t > 0$, avremo un numero $0 < \beta < 1$ tale che i punti critici, per $x \neq 0$ e $y = 0$, sono solo $(\beta, 0)$ e $(-\beta, 0)$.

Infine, se $x \neq 0$ e $y \neq 0$, il gradiente si annulla se e solo se

$$2x^2 + e^{-(x^2+y^2)}\big(x^2 + y^2 - 1\big) = 4y^2 + e^{-(x^2+y^2)}\big(x^2 + y^2 - 1\big) = 0\,,$$

il che in particolare implica che $x^2 = 2y^2$. Sostituendo questa equazione, l'annullarsi del gradiente si verifica se e solo se

$$4y^2 + e^{-3y^2}\big(3y^2 - 1\big) = 0\,.$$

Esattamente come nei casi precedenti, deduciamo che vi sia un unico $\gamma > 0$ tale che la precedente equazione si annulla solo in $y = \pm\gamma$. Si hanno perciò i quattro punti critici $(\pm\sqrt{2}\gamma, \pm\gamma)$. In conclusione, abbiamo scoperto che la funzione ammette esattamente 9 punti critici, molti dei quali simmetrici tra di loro.

Per andare a studiare la natura dei punti critici, iniziamo osservando che lo sviluppo al secondo ordine di f nell'origine è

$$f(x, y) = -x^2 - y^2 + o(x^2 + y^2)\,,$$

e quindi l'origine è un massimo locale, e senz'altro non globale visto che non ve ne sono.

Consideriamo adesso il punto $(\beta, 0)$. Prima di tutto, la restrizione di f all'asse delle x è la funzione $g(x) = x^4 - x^2e^{-x^2}$; per comodità, definiamo $h(t) = t^2 - te^{-t}$. Un semplice conto mostra che $h''(t) = 2 + 2e^{-t} - te^{-t}$, quindi la derivata seconda è strettamente positiva per qualunque $t > 0$ (si osservi che il massimo di te^{-t} è raggiunto in $t = 1$, e vale quindi $1/e$). Visto che $h(0) = 0$ e $h'(0) = -1$, questo significa che h, su $\mathbb{R}^+$, ha un unico minimo ed è decrescente prima di tale minimo e crescente dopo. Perciò, il punto $(\beta, 0)$ è un punto di minimo locale per f ristretta all'asse x. Valutiamo il comportamento di f nell'asse verticale $\{(\beta, y),\, y \in \mathbb{R}\}$. Su tale asse il valore di f è dato da $\beta^4 + 2y^4 - (\beta^2 + y^2)e^{-(\beta^2+y^2)}$, e quindi la derivata seconda in $y = 0$ è data da

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\beta, 0) = 2e^{-\beta^2}\big(\beta^2 - 1\big)\,.$$

Tale numero è negativo, visto che –come osservato prima– si ha $0 < \beta < 1$. Di conseguenza, il punto $(\beta, 0)$ è un punto di massimo locale per f ristretta all'asse $\{(\beta, y),\, y \in \mathbb{R}\}$; per quanto detto prima, $(\beta, 0)$ è un punto di sella per f. Lo stesso ovviamente vale per $(-\beta, 0)$, e con un ragionamento identico anche per $(0, \pm\alpha)$.

Avendo notato che f deve avere un minimo globale, tale minimo è dunque per forza raggiunto nei quattro punti $(\pm\sqrt{2}\gamma,\, \pm\gamma)$.