Soluzioni della prova scritta per il corso di Analisi Matematica 2
corso di laurea in Ingegneria Biomedica
Università di Pisa
20/2/2023

Esercizio 1. Per quanto riguarda il volume di Ω, per ogni $x \geq 0$ notiamo che la sezione $\Omega_x = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2,\, (x,y,z) \in \Omega\}$ è un cerchio di raggio $\frac{x}{1+x^2}$, mentre se $x < 0$ la sezione è vuota, in quanto la radice è positiva, e quindi non può essere minore o uguale ad un numero strettamente negativo. Per trovare il volume, allora, basta calcolare

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(\Omega) &= \int_\Omega 1\,dz\,dy\,dz = \int_{x=0}^{+\infty} \left(\int_{\Omega_x} 1\,dz\,dy \right) dx = \pi \int_{x=0}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx \\ &= \pi \biggl[-\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \biggr]_{x=0}^{+\infty} + \frac{\pi}{2} \int_{x=0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} \Bigl[\arctan x \Bigr]_{x=0}^{+\infty} = \frac{\pi^2}{4}\,.\end{aligned}$$

Per quanto riguarda l'esistenza di massimi e minimi globali, come già osservato, per ogni $x \geq 0$ la sezione Ω_x è data da un cerchio di raggio $\frac{x}{1+x^2}$, per cui per ogni $(y,z) \in \Omega_x$ si ha

$$|yz| \leq \frac{x^2}{2(1+x^2)^2}\,,$$

e quindi per ogni punto di Ω si ha

$$|f(x,y,z)| \leq \frac{x^3}{2(1+x^2)^2}\,.$$

Visto che tale frazione tende a zero per x che tende a $+\infty$, e visto che f ammette sia valori strettamente positivi che strettamente negativi, deduciamo l'esistenza di massimi e minimi globali (si osservi che Ω è chiuso per definizione!).

Per trovare i punti critici di f, consideriamo un qualunque punto (x,y,z) contenuto nell'interno di Ω, quindi in particolare con $x > 0$. Si ha $\nabla f(x,y,z) = (yz, xz, xy)$, e visto che appunto $x > 0$ i punti critici sono tutti e soli i punti dell'interno di Ω in cui $y = z = 0$. I punti critici di f sono dunque dati esattamente dalla semiretta $\{(x,0,0) : \, x > 0\}$. E' immediato notare che tali punti siano tutti di flesso, visto che la funzione è positiva dove $yz > 0$ ed è negativa dove $yz < 0$, e in particolare per ogni punto critico la derivata seconda in direzione $(0,1,1)$ è strettamente positiva e quella in direzione $(0,1,-1)$ è strettamente negativa.

Come visto sopra, la funzione deve ammettere massimo e minimo globale, ma tutti i punti critici sono punti di flesso. Si deduce che i punti di massimo e minimo globale devono essere sul bordo di Ω, in particolare in punti in cui $x > 0$ visto che negli altri f è nulla. Come già notato prima, per ogni $x > 0$ la sezione Ω_x è un cerchio di raggio $r = \frac{x}{1+x^2}$: in ciascuna sezione, quindi, il massimo si ha unicamente nei due punti $(\pm r/\sqrt{2}, \pm r/\sqrt{2})$, ed il minimo unicamente nei due punti $(\pm r/\sqrt{2}, \mp r/\sqrt{2})$. Per ogni sezione Ω_x, quindi, il massimo di f nella sezione vale

$$\frac{xr^2}{2} = \frac{x^3}{2(1+x^2)^2}\,,$$

ed il minimo è esattamente l'opposto. Il massimo globale sarà quindi il massimo della funzione $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ data da

$$g(x) = \frac{x^3}{2(1+x^2)^2} .$$

Visto che la derivata di g si annulla solo in $x = \sqrt{3}$, deduciamo che esistono esattamente due punti di massimo globale, e cioè i punti

$$\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right) \qquad \text{e} \qquad \left(\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right),$$

e due punti di minimo globale, ossia i punti

$$\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right) \qquad \text{e} \qquad \left(\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right).$$

Esercizio 2. Prima di tutto, osserviamo che $x^4 \geq x^2 - 1$, per cui

$$f(x,y) \leq \big(3(x^4+1) + y^4\big)e^{-(x^2+y^2)+1} \leq \big(3 + 3(x^2+y^2)^2\big)e^{-(x^2+y^2)+1},$$

e l'ultimo termine chiaramente tende a 0 se $|(x,y)| \to +\infty$. Di conseguenza la funzione f, che ovviamente è positiva e continua, ammette massimo globale visto che tende a 0 all'infinito. Inoltre, visto che f è positiva e si annulla soltanto nell'origine, deduciamo non solo che il minimo globale esiste, ma anche che l'unico punto di minimo globale sia l'origine.

Per quanto riguarda i punti critici, visto che la funzione f è differenziabile ovunque in quanto composizione di funzioni elementari che lo sono, calcoliamo il gradiente di f in un generico punto come

$$\nabla f(x,y) = e^{-(x^4+y^2)}\Big(6x - 4x^3\big(3x^2+y^4\big), 4y^3 - 2y\big(3x^2+y^4\big)\Big).$$

Un punto è dunque critico se e solo se

$$2x\Big(3 - 2x^2\big(3x^2+y^4\big)\Big) = 2y\Big(2y^2 - \big(3x^2+y^4\big)\Big) = 0 \tag{1}$$

Cominciamo a cercare punti critici con $x \neq 0$, $y \neq 0$. In questo caso, le uguaglianze di sopra si possono riscrivere come

$$3x^2 + y^4 = \frac{3}{2x^2} = 2y^2,$$

il che implica

$$2y^2 = y^4 + 3x^2 = y^4 + \frac{9}{4y^2},$$

che moltiplicando per $4y^2$ diventa

$$4y^6 - 8y^4 + 9 = 0.$$

Possiamo vedere subito che tale equazione non ha soluzioni: infatti, ponendo $t = y^2$ per comodità, dobbiamo far vedere che per ogni $t \geq 0$ si ha

$$4t^3 - 8t^2 + 9 > 0.$$

Ma la funzione $t \mapsto 4t^3 - 8t^2 + 9$ vale 9 in 0, tende all'infinito se $t \to +\infty$, ed il suo unico punto critico in $\{t > 0\}$ è $t = 4/3$. Perciò, il minimo di tale funzione sulla semiretta $\{t \geq 0\}$ è raggiunto per $t = 4/3$, e vale quindi

$$\frac{4^4}{3^3} - \frac{2 \cdot 4^3}{9} + 9 > 0 \,.$$

Abbiamo quindi concluso che non ci sono punti critici con entrambe le coordinate diverse da 0.

Tornando a considerare l'equazione (1), se $x = 0$ si ha un punto critico se e solo se

$$2y\big(2y^2 - y^4\big) = 0 \,,$$

che è vero per $y = 0$ e per $y = \pm\sqrt{2}$. Se invece $y = 0$, un punto è critico se e solo se

$$2x\Big(3 - 6x^4\Big)\Big) = 0 \,,$$

che è vero per $x = 0$ e per $x = \pm 2^{-1/4}$. Si hanno quindi 5 punti critici, ossia

$$O \equiv (0,0)\,, \qquad A \equiv (0,\sqrt{2})\,, \qquad B \equiv (0,-\sqrt{2})\,, \qquad C \equiv (2^{-1/4},0)\,, \qquad D \equiv (-2^{-1/4},0)\,.$$

Sappiamo già che O è l'unico punto di minimo globale, ed è chiaro che la natura di A e B sia la stessa, così come quella di C e di D. Visto che

$$f(A) = \frac{4}{e^2} < 1 < \frac{3}{\sqrt{2e}} = f(C)\,,$$

deduciamo che i punti C e D sono di massimo globale. Dobbiamo allora solo discutere la natura di A e B. Senza bisogno di calcolare tutto l'Hessiano, ci basta notare che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,\sqrt{2}) = 6e^{-2}\,, \qquad\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,\sqrt{2}) = -16e^{-2}\,.$$

Questo assicura che gli autovalori dell'Hessiano nel punto A sono uno positivo ed uno negativo, e quindi A e B sono due punti di flesso.