Soluzioni della prova scritta per il corso di Analisi Matematica 2
corso di laurea in Ingegneria Biomedica
Università di Pisa
16/1/2023

Esercizio 1. Per ogni $0 \leq z \leq 1$, la sezione $\Big\{(x,y)\,:\,(x,y,z)\in\Omega\Big\}$ verifica l'equazione $|x-z^2|+|y|\leq z$, ed è dunque un quadrato centrato nel punto $(z^2,0)$, con le diagonali di lunghezza $2z$ parallele agli assi x ed y. L'area di tale sezione è quindi $2z^2$, e pertanto il volume di Ω è dato da

$$\int_{z=0}^{1} 2z^2\,dz = \frac{2}{3}\,.$$

Per quanto riguarda il perimetro, Ω ha una faccia inferiore consistente di un solo punto, quindi con area nulla, ed una faccia superiore di area 2, come detto sopra. Si ha quindi che il perimetro di Ω è dato da

$$P(\Omega) = 2 + L\,,$$

indicando con L l'area della superficie laterale. Per calcolare L, osserviamo che L è l'area della superficie data da

$$\Gamma = \Big\{(x,y,z):\,0\leq z\leq 1,\,|x-z^2|+|y|=z\Big\}\,.$$

Possiamo allora suddividere Γ in quattro parti, corrispondenti ai quattro lati dei quadrati visti sopra. Si avrà cioè

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \Big\{(x,y,z):\,0\leq z\leq 1,\,x-z^2+y=z,\,x\geq z^2,\,y\geq 0\Big\}\,,\\
\Gamma_2 &= \Big\{(x,y,z):\,0\leq z\leq 1,\,x-z^2-y=z,\,x\geq z^2,\,y\leq 0\Big\}\,,\\
\Gamma_3 &= \Big\{(x,y,z):\,0\leq z\leq 1,\,-(x-z^2)+y=z,\,x\leq z^2,\,y\geq 0\Big\}\,,\\
\Gamma_4 &= \Big\{(x,y,z):\,0\leq z\leq 1,\,-(x-z^2)-y=z,\,x\leq z^2,\,y\leq 0\Big\}\,.
\end{aligned}$$

Indichiamo allora con L_1, L_2, L_3 ed L_4 le aree delle superfici Γ_1, Γ_2, Γ_3 e Γ_4 e calcoliamole separatamente.

Per quanto riguarda Γ_1, è immediato parametrizzarlo come

$$\Gamma_1 = \Big\{(z^2+z-y,y,z),\,0\leq z\leq 1,\,0\leq y\leq z\Big\}\,,$$

e quindi Γ_1 è l'immagine biunivoca di T tramite Φ, dove $T=\Big\{0\leq z\leq 1,\,0\leq y\leq z\Big\}$ e $\Phi(y,z)=(z^2+z-y,y,z)$. Calcolando

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \big(-1,1,0\big)\,, \qquad\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \big(2z+1,0,1\big)\,,$$

si ha

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial y}\wedge\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right| = \sqrt{(2z+1)^2+2}\,,$$

e quindi, grazie anche al cambio di variabile $t = (2z+1)/\sqrt{2}$,

$$\begin{aligned}
L_1 &= \int_{z=0}^{1}\int_{y=0}^{z} \sqrt{(2z+1)^2+2}\,dy\,dz = \int_{z=0}^{1} z\sqrt{(2z+1)^2+2}\,dz \\
&= \int_{z=0}^{1}\left(z+\frac{1}{2}\right)\sqrt{(2z+1)^2+2}\,dz - \frac{1}{2}\int_{z=0}^{1}\sqrt{(2z+1)^2+2}\,dz \\
&= \left[\frac{1}{12}\left((2z+1)^2+2\right)^{3/2}\right]_{z=0}^{1} - \frac{1}{2}\int_{t=1/\sqrt{2}}^{3/\sqrt{2}}\sqrt{t^2+1}\,dt \\
&= \left[\frac{1}{12}\left((2z+1)^2+2\right)^{3/2}\right]_{z=0}^{1} - \frac{1}{4}\left[\operatorname{arcsinh} t + t\sqrt{t^2+1}\right]_{t=1/\sqrt{2}}^{3/\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Un conto assolutamente analogo assicura che $L_2 = L_1$, e che $L_3 = L_4$ essendo

$$\begin{aligned}
L_3 &= \int_{z=0}^{1}\int_{y=0}^{z} \sqrt{(2z-1)^2+2}\,dy\,dz = \int_{z=0}^{1} z\sqrt{(2z-1)^2+2}\,dz \\
&= \int_{z=0}^{1}\left(z-\frac{1}{2}\right)\sqrt{(2z-1)^2+2}\,dz + \frac{1}{2}\int_{z=0}^{1}\sqrt{(2z-1)^2+2}\,dz \\
&= \left[\frac{1}{12}\left((2z-1)^2+2\right)^{3/2}\right]_{z=0}^{1} + \frac{1}{2}\int_{t=-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}}\sqrt{t^2+1}\,dt \\
&= \left[\frac{1}{12}\left((2z-1)^2+2\right)^{3/2}\right]_{z=0}^{1} + \frac{1}{4}\left[\operatorname{arcsinh} t + t\sqrt{t^2+1}\right]_{t=-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}},
\end{aligned}$$

e si è quindi espresso $P(\Omega)$ dalle formule di sopra.

Infine, per calcolare $\int_{\partial\Omega} y+z$, si può osservare subito per simmetria che l'integrale di y su $\partial\Omega$ fa 0, e quindi ciò che si vuole calcolare è solo l'integrale di z. Sulla faccia superiore di $\partial\Omega$ si ha costantemente $z=1$, quindi su tale faccia l'integrale di z non è altro che l'area della faccia, ossia 2. Sulla faccia Γ_1, invece, per quanto già osservato si ottiene

$$\int_{\Gamma_1} z = \int_{z=0}^{1}\int_{y=0}^{z} z\sqrt{(2z+1)^2+2}\,dy\,dz = \int_{z=0}^{1} z^2\sqrt{(2z+1)^2+2}\,dz\,,$$

e tale integrale, così come l'analogo su Γ_3, si calcola ragionando in modo molto simile a prima (rispetto a prima si deve in aggiunta solo calcolare l'integrale di $z^2\sqrt{1+z^2}$, il che può essere fatto molto semplicemente con il consueto cambio di variabile con l'arcoseno iperbolico...).

Esercizio 2. La funzione f è data da somme, prodotti e composizioni di funzioni continue, quindi è continua. Per lo stesso motivo, è senz'altro differenziabile se $y \neq 0$, visto che il modulo è una funzione differenziabile fuori da 0. Per quanto riguarda la differenziabilità sull'asse delle x, si può notare che

$$\nabla f(x,y) = \begin{cases} \Big(e^x\big(x^2+y^2-xe^{-y}+2x-e^{-y}\big), e^x(2y+xe^{-y})\Big) & \text{se } y>0\,, \\ \Big(e^x\big(x^2+y^2-xe^{y}+2x-e^{y}\big), e^x(2y-xe^{y})\Big) & \text{se } y<0\,. \end{cases}$$

Di conseguenza, la derivata nella direzione x si estende in modo continuo all'asse x, mentre la derivata nella direzione y ha un salto in $y=0$ per ogni $x \neq 0$, mentre si estende in modo continuo al punto $(0,0)$. Abbiamo quindi che f è differenziabile anche in $(0,0)$, mentre non è differenziabile in nessun altro punto dell'asse x.

Per quanto riguarda i limiti direzionali, visto che vale sempre $e^{-|y|} \leq 1$, osserviamo che il fattore $(x^2 + y^2 - xe^{-|y|})$ è sicuramente positivo per $|(x,y)| > 1$, e tende all'infinito per $|(x,y)| \to +\infty$. Di conseguenza, il limite direzionale $\lim_{t\to+\infty} f(tv)$ con $|v| = 1$ vale $+\infty$ se $v_1 > 0$ e vale 0 se $v_1 < 0$, visto che l'esponenziale tende all'infinito nel primo caso, ed a zero più velocemente dei polinomi nel secondo caso; se $v_1 = 0$, ossia se $v = (0,\pm 1)$, si ha che $f(tv) = t^2$ e quindi si tende a $+\infty$ anche in questo caso.

Da quanto detto sopra si ha già che $\sup f = +\infty$, e quindi non vi può essere massimo globale. La regione $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) < 0\big\}$, d'altra parte, è limitata perché come visto sopra è contenuta nella palla $\big\{|(x,y)| < 1\big\}$, ed è non vuota visto che ad esempio $f(1/2,0) < 0$. Si ottiene quindi l'esistenza di un minimo per la restrizione di f a tale regione, e quindi di un minimo globale visto che al di fuori di detta regione $f \geq 0$.

Consideriamo adesso i punti critici di f. Notiamo anzitutto che f è simmetrica rispetto all'asse x, e che l'origine non è un punto critico visto che $\partial f/\partial x(0,0) = -1$. Possiamo quindi limitarci a considerare il semispazio $\{y > 0\}$. Avendo già calcolato prima il gradiente in tale semispazio, si ottiene che (x,y) è un punto critico (nel semispazio) se e solo se

$$\left\{\begin{array}{c} 2y + xe^{-y} = 0\,, \\ x^2 + y^2 + 2x - (x+1)e^{-y} = 0\,. \end{array}\right.$$

La prima equazione assicura che eventuali punti critici possono trovarsi solo dove $x < 0$, e visto che in tale zona la funzione è positiva di certo non possono essere punti di minimo globale. Occupiamoci dunque subito di trovare i punti di minimo globale, che sappiamo esistere e non essere punti critici: devono quindi essere punti di non differenziabilità, cioè trovarsi sull'asse x. Considerando allora la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $g(x) = f(x,0) = e^x(x^2 - x)$, si scopre subito che tale funzione ha un minimo globale in $(-1+\sqrt{5})/2$ ed un massimo locale in $(-1-\sqrt{5})/2$. Si ottiene allora necessariamente che $\big((-1+\sqrt{5})/2, 0\big)$ è l'unico punto di minimo globale per f. Per quanto riguarda il punto $P \equiv \big((-1-\sqrt{5})/2, 0\big)$, invece, tale punto è un massimo locale relativamente alla direzione x. Relativamente alla direzione y, sappiamo che non si ha differenziabilità, tuttavia $\partial f/\partial y$ risulta positiva in un intorno del punto P intersecato con il semispazio $\{y > 0\}$, e negativa in un intorno di P intersecato col semispazio $\{y < 0\}$. Si ha perciò che P è effettivamente un massimo locale per f.

Per concludere, torniamo alla ricerca di punti critici, che sappiamo dover essere nel semispazio $\{x < 0\}$, e che possiamo studiare dove $y > 0$ per simmetria della funzione. Per quanto già detto sopra, un punto critico deve verificare

$$\left\{\begin{array}{c} x = -2ye^{y}\,, \\ y^2 + 2y\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = -x(x+2)\,. \end{array}\right.$$

Per ogni $y > 0$ esiste una ed una sola $x < 0$ che verifica la prima equazione, e se y cresce allora la relativa x decresce. Per quanto riguarda invece la seconda equazione, non esistono soluzioni $y > 0$ se $x < -2$, mentre per $-2 < x < 0$ si ha esattamente una soluzione $y > 0$.

D'altra parte, la soluzione y cresce quando x cresce, come si evince da una derivata lungo la x e lungo la y dell'equazione. Detta $y = h(x)$ per $-2 < x < 0$ tale soluzione, si ha immediatamente che h tende a 0 se $x \searrow -2$, mentre tende a $+\infty$ se $x \nearrow 0$. Visto che invece le soluzioni (x, y) della prima equazione sono limitate nella zona $-2 < x < 0$, deduciamo che esiste un'unica soluzione $Q = (\bar{x}, \bar{y})$ del sistema di sopra, con $\bar{x} < 0$ e $\bar{y} > 0$. Vi sono perciò esattamente due punti critici per f, nel punto Q e nel punto $(\bar{x}, -\bar{y})$. Si può osservare che tali punti siano di flesso, visto che Q è un minimo locale nella direzione y, ed un massimo locale nella direzione x.