Soluzioni della prova scritta per il corso di Analisi Matematica 2
corso di laurea in Ingegneria Biomedica
Università di Pisa
21/7/2022

Esercizio 1. Dal momento che f è definita come somma, prodotto e composizione di funzioni che sono continue, e che sono anche differenzabili eccetto sulla retta $\{x = 0\}$, deduciamo che f è continua dappertutto, ed è differenziabile al di fuori dell'asse y. Per quanto riguarda la differenziabilità lungo l'asse y, è immediato osservare che la derivata parziale $\partial f/\partial y$ è continua su tutto $\mathbb{R}^2$; nei punti al di fuori dell'asse y, inoltre, si ha

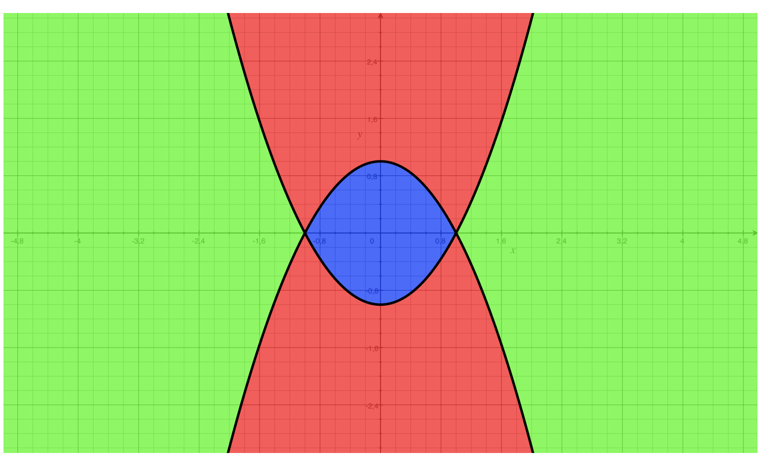
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^{|x|}(4x^3 - 4x) - \frac{x}{|x|}\, e^{|x|}(y - x^2 + 1)(-y - x^2 + 1)}{e^{2|x|}}\,.$$

In un generico punto $(0, y)$ sull'asse y, quindi, si ha che la derivata parziale lungo la direzione x si estende in modo continuo se

$$(y + 1)(-y + 1) = 0\,,$$

ossia se $y = \pm 1$, mentre in caso contrario si ha un salto nella derivata vicino al punto. Di conseguenza, f è differenziabile nei punti $(0, -1)$ e $(0, 1)$, e non lo è in un nessun altro punto dell'asse y.

Per quanto riguarda il segno di f, esso è determinato solo dal numeratore, visto che il denominatore è sempre positivo. Il primo termine è nullo lungo la parabola $\{y = x^2 - 1\}$, strettamente positivo sopra e negativo sotto, ed il secondo termine è nullo lungo la parabola $\{y = -x^2 + 1\}$, strettamente positivo sotto e negativo sopra. Di conseguenza, la funzione è nulla in tutti e soli i punti delle due parabole, ed il resto del piano risulta diviso in cinque zone: nella zona tra le due parabole (blu in figura) la funzione è strettamente positiva, così come nelle due zone sopra la parabola rivolta verso il basso e sotto quella rivolta verso l'alto (verdi in figura), mentre la funzione è strettamente negativa nelle due zone sopra entrambe le parabole e sotto entrambe le parabole (rosse in figura).



Studiamo adesso l'esistenza di massimi e minimi globali per la funzione. Per quanto riguarda il minimo globale, è immediato notare che non esiste visto che, ad esempio, $f(0,y) \to -\infty$ per $y \to +\infty$; concentriamoci dunque sul massimo globale. Detta $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) > 0\}$ la zona in cui f è positiva, ossia l'unione delle zone verdi e blu della figura, si ha chiaramente che

$$|(x,y)| \to +\infty,\ (x,y) \in P \qquad \Longrightarrow \qquad |x| \to +\infty\,.$$

Si può osservare che

$$f(x,y) = \frac{(x^2-1)^2 - y^2}{e^{|x|}} \leq \frac{(x^2-1)^2}{e^{|x|}}\,.$$

Visto che

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{(x^2-1)^2}{e^{|x|}} = 0\,,$$

deduciamo che

$$\lim_{|(x,y)|\to+\infty,\,(x,y)\in P} f(x,y) = 0\,,$$

ossia la funzione tende a zero all'infinito nella zona in cui è positiva. Questo assicura l'esistenza di un massimo globale.

Abbiamo già osservato che la funzione ammette sicuramente un massimo globale e non un minimo globale. Studiamo adesso le singole zone: nella zona blu, che è chiusa e limitata, la funzione è strettamente positiva all'interno a nulla al bordo, pertanto esiste certamente (visto che f è continua) un punto di massimo locale in tale zona. Nella zona verda di sinistra, che è chiusa ma non limitata, la funzione è continua, strettamente positiva all'interno, nulla al bordo e tende a zero all'infinito, e dunque anche in tale zona esiste un punto di massimo locale; lo stesso ragionamento assicura l'esistenza di un massimo locale anche nella zona verde di destra. Ricapitolando, esistono almeno tre massimi locali, uno in ciascuna delle tre zone di positività, e almeno uno di essi è massimo globale. Per quanto ne sappiamo al momento, potrebbero esserci o non esserci altri massimi o minimi locali.

Concludiamo adesso cercando tutti i punti di massimo e minimo (locale e/o globale). Visto che la funzione è differenziabile dappertutto eccetto nei punti dell'asse y diversi da $(\pm 1, 0)$, un punto di massimo e minimo deve essere un punto critico oppure trovarsi sull'asse y. Studiamo allora intanto la funzione sull'asse y: visto che

$$f(0,y) = 1 - y^2\,,$$

tutti i punti dell'asse y eccetto l'origine non sono certamente massimi o minimi locali in $\mathbb{R}^2$ visto che non lo sono neppure sul solo asse y. L'origine, invece, è un punto di massimo globale relativamente all'asse y, e quindi potrebbe essere un massimo locale o globale su tutto $\mathbb{R}^2$ (ma per quanto ne sappiamo al momento potrebbe anche non esserlo). Cerchiamo adesso i punti critici al di fuori dell'asse y; visto che la funzione è chiaramente simmetrica rispetto all'asse y, è sufficiente ragionare solo sul semipiano $\{x > 0\}$, il che rende più semplici i conti visto su tale semipiano $|x| = x$. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{e^x}\,,$$

e questo assicura che i punti critici si possono trovare solo sull'asse x, dove $y = 0$. Calcoliamo allora la derivata parziale di f rispetto ad x solo lungo l'asse x (più precisamente, solo lungo la metà positiva dell'asse x), trovando

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x^2-1)(4x-x^2+1)}{e^x}\,.$$

La derivata parziale si annulla quindi in tutte le radici positive di $(x^2-1)(-x^2+4x+1)$. Il termine x^2-1 si annulla solo in $x=1$, visto che la radice $x=-1$ non è interessante perché stiamo lavorando con x positivo. Tuttavia, il punto $(1,0)$ non è certamente né massimo né minimo locale, perché si trova al bordo di zone in cui f è strettamente positiva e di zone in cui f è strettamente negativa. Delle due radici di $-x^2+4x+1$, infine, l'unica positiva è $x=2+\sqrt{5}$, e quindi il punto $(2+\sqrt{5},0)$ è un punto critico all'interno della zona verde destra, e per simmetria $(-(2+\sqrt{5}),0)$ è un punto critico all'interno della zona verde sinistra.

Ricapitolando, tra i punti di differenziabilità vi sono solo quattro punti critici, ossia $(\pm 1,0)$ e $(\pm(2+\sqrt{5}),0)$, ed i primi due non sono né massimi né minimi locali. Tra i punti di non differenziabilità, l'unico punto che potrebbe essere massimo locale è l'origine. Visto che abbiamo già scoperto che ci deve essere un massimo locale in ciascuna delle tre zone di positività, deduciamo che i punti $(\pm(2+\sqrt{5}),0)$ e $(0,0)$ sono tutti e tre punti di massimo locale, e non vi sono altri punti di massimo né punti di minimo. Per determinare quale dei punti di massimo locale lo sia anche globale, si dovrebbe confrontare $f(0,0)$ e $f(2+\sqrt{5},0)$ (si ricordi che f è simmetrica rispetto all'asse y, quindi $f(2+\sqrt{5},0) = f(-(2+\sqrt{5}),0))$. Si calcola subito che $f(0,0)=1$, mentre il calcolo di $f(2+\sqrt{5},0)$ è più scomodo; tuttavia, non c'è nessun bisogno di farlo. Infatti, visto che stiamo cercando di capire se l'origine sia o meno massimo globale di f, la risposta è certamente negativa se troviamo un qualsiasi punto in cui si abbia $f>1$. Ad esempio è molto facile notare che

$$f(2,0) = \frac{9}{e^2} > 1 = f(0,0)\,,$$

visto che $2<e<3$. Questo è sufficiente per essere sicuri che l'origine non sia un punto di massimo globale, e per esclusione i punti di massimo globale sono quindi $(\pm(2+\sqrt{5}),0)$.

Esercizio 2. Le sezioni orizzontali di Ω sono tutti cerchi; più precisamente, per ogni $z\in[0,2]$ l'insieme $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\,(x,y,z)\in\Omega\}$ è un cerchio di raggio $\sqrt{3z-z^2}$. Di conseguenza, il volume di Ω è pari a

$$\int_0^2 \pi(3z-z^2)\,dz = \pi\left[\frac{3}{2}\,z^2 - \frac{1}{3}z^3\right]_{z=0}^2 = \left(6-\frac{8}{3}\right)\pi = \frac{10}{3}\,\pi\,.$$

Per quanto riguarda il perimetro di Ω, per calcolarlo basta osservare che la frontiera di Ω è fatta di due parti: la parte alta è un cerchio di raggio $\sqrt{2}$, e dunque di area 2π; la parte laterale, invece, si può facilmente parametrizzare come

$$\left\{\left(\sqrt{3z-z^2}\cos\theta,\ \sqrt{3z-z^2}\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z\right),\ 0\le z\le 2,\ 0\le\theta\le 2\pi\right\}.$$

Detta quindi $\Phi:[0,2]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ la funzione data da

$$\Phi(z,\theta) = \left(\sqrt{3z-z^2}\cos\theta,\ \sqrt{3z-z^2}\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z\right),$$

si può calcolare

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial z}\wedge\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right| = \left|\left(\frac{3-2z}{2\sqrt{3z-z^2}}\cos\theta,\ \frac{3-2z}{2\sqrt{3z-z^2}}\operatorname{sen}\theta, 1\right)\wedge\left(-\sqrt{3z-z^2}\operatorname{sen}\theta,\ \sqrt{3z-z^2}\cos\theta,\ 0\right)\right|$$
$$= \left|\left(-\sqrt{3z-z^2}\cos\theta,\ -\sqrt{3z-z^2}\operatorname{sen}\theta,\ \frac{3}{2}-z\right)\right| = \frac{3}{2}\,.$$

L'area della parte laterale del bordo di Ω è pertanto data da

$$\int_{z=0}^{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{3}{2}\,d\theta\,dz = 6\pi\,.$$

Si può concludere che il perimetro di Ω è dato da $P(\Omega) = 2\pi + 6\pi = 8\pi$.

Occupiamoci infine dell'integrale della funzione $|x|$ sulla curva Γ. Per calcolarlo, iniziamo suddividendo la curva Γ come $\Gamma = \gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3$, dove $\gamma_1 : [0,2]\to\mathbb{R}^3$ e $\gamma_2 : [0,2]\to\mathbb{R}^3$ sono date da

$$\gamma_1(z) = \left(\sqrt{3z-z^2}, 0, z\right), \qquad\qquad \gamma_2(z) = \left(-\sqrt{3z-z^2}, 0, z\right),$$

e $\gamma_3 : [-\sqrt{2},\sqrt{2}]\to\mathbb{R}^3$ è data da $\gamma_3(x) = (x,0,2)$. L'integrale lungo la curva γ_3 è immediato, visto che

$$\int_{\gamma_3}|x| = \int_{x=-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}|x|\,dx = 2\int_{x=0}^{\sqrt{2}}x\,dx = \Big[x^2\Big]_{x=0}^{\sqrt{2}} = 2\,.$$

Per calcolare l'integrale lungo γ_1 basta notare che

$$\left|\gamma_1'(z)\right| = \left|\left(\frac{3-2z}{2\sqrt{3z-z^2}},\ 0,\ 1\right)\right| = \sqrt{\frac{9-12z+4z^2}{4(3z-z^2)}+1} = \frac{3}{2\sqrt{3z-z^2}}\,.$$

Ma allora

$$\int_{\gamma_1}|x| = \int_{z=0}^{2}\sqrt{3z-z^2}\,\left|\gamma_1'(z)\right|dz = \int_{z=0}^{2}\frac{3}{2}\,dz = 3\,.$$

Visto che per simmetria $\int_{\gamma_2}|x| = \int_{\gamma_1}|x|$, si ottiene quindi

$$\int_{\Gamma}|x| = \int_{\gamma_1}|x| + \int_{\gamma_2}|x| + \int_{\gamma_3}|x| = 3+3+2 = 8\,.$$