Soluzioni della prova scritta per il corso di Analisi Matematica 2
corso di laurea in Ingegneria Biomedica
Università di Pisa
9/6/2022

Esercizio 1. L'insieme T è una sorta di "torre inclinata", in particolare la sua sezione ad altezza $z \in [0,1]$ è un cerchio di centro in $(z,0,z)$ e raggio 1. Il bordo di T è quindi composto da tre parti, ossia il cerchio superiore, il cerchio inferiore, e la parte inclinata. Possiamo cioè scrivere $\partial T = A \cup B \cup C$ dove A e B sono i cerchi

$$A = \Big\{(x,y,1) \in \mathbb{R}^3,\, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\Big\}, \qquad B = \Big\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3,\, x^2 + y^2 \leq 1\Big\},$$

e C è la parte laterale, che si può comodamente esprimere in forma parametrica come

$$C = \Big\{(z + \cos\theta,\, \operatorname{sen}\theta, z) \in \mathbb{R}^3,\, \theta \in [0, 2\pi],\, 0 \leq z \leq 1\Big\}.$$

Gli integrali della funzione $|y|$ su A e B sono uguali, quindi possiamo calcolarne solo uno, ad esempio quello su B, che è un cerchio nel piano xy di raggio 1 e centrato nell'origine. Utilizzando coordinate polari si ha quindi

$$\int_A |y| = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{1} |\operatorname{sen}\theta| \rho^2 \, d\rho \, d\theta = \frac{1}{3} \int_{\theta=0}^{2\pi} |\operatorname{sen}\theta| \, d\theta = \frac{2}{3} \int_{\theta=0}^{\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta = \frac{4}{3}.$$

Per quanto riguarda l'integrale su C, definendo $\Phi(z,\theta) = (z + \cos\theta,\, \operatorname{sen}\theta, z)$, e notando che

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}(z,\theta) = (1,0,1), \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(z,\theta) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0),$$

e quindi

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial z}(z,\theta) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(z,\theta) \right| = \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + 2\cos^2\theta} = \sqrt{1 + \cos^2\theta},$$

possiamo calcolare, utilizzando il cambio di variabile $t = -\cos\theta$,

$$\begin{aligned}
\int_C |y| &= \int_{z=0}^{1} \int_{\theta=0}^{2\pi} |\operatorname{sen}\theta| \sqrt{1+\cos^2\theta} \, d\theta \, dz = \int_{\theta=0}^{2\pi} |\operatorname{sen}\theta| \sqrt{1+\cos^2\theta} \, d\theta \\
&= 2 \int_{\theta=0}^{\pi} \operatorname{sen}\theta \sqrt{1+\cos^2\theta} \, d\theta = 2 \int_{t=-1}^{1} \sqrt{1+t^2} \, dt = 4 \int_{t=0}^{1} \sqrt{1+t^2} \, dt \\
&= 2 \Big[\operatorname{arcsenh} t + t\sqrt{1+t^2} \Big]_{t=0}^{1} = 2 \operatorname{arcsenh} 1 + 2\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Mettendo tutto insieme si trova quindi che

$$\int_{\partial T} |y| = \frac{8}{3} + 2 \operatorname{arcsenh} 1 + 2\sqrt{2}.$$

Esercizio 2. In quanto somma, prodotto e composizione di funzioni continue, la f è continua su tutto $\mathbb{R}^2$. Dal momento che la funzione modulo è derivabile fuori dall'origine, la f è anche senz'altro differenziabile in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ con $y \neq 0$, ossia in tutti i punti fuori dall'asse x; la differenziabilità sull'asse x invece va investigata meglio. In effetti, si nota che

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{\partial f}{\partial y}(x,t) = \frac{e^{-x}}{x^2+1}\,, \qquad\qquad \lim_{t \nearrow 0} \frac{\partial f}{\partial y}(x,t) = -\frac{e^{-x}}{x^2+1}\,,$$

e visto che l'esponenziale non si annulla mai deduciamo che i due limiti esistono ma sono diversi, e dunque f non è differenziabile in $(x,0)$ per nessun $x \in \mathbb{R}$. In altre parole, i punti di differenziabilità sono esattamente i punti di $\mathbb{R}^2$ fuori dall'asse x.

Per quanto riguarda il segno di f, esso chiaramente dipende solo dal numeratore, ed è positivo se e solo se $e^{|y|-x} > 1$, ossia se e solo se $|y| > x$. Si ha quindi che f è positiva su $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |y| > x\}$, è negativa su $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |y| < x\}$, ed è nulla su $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |y| = x\}$. Si noti che il secondo insieme è il quadrante del piano compreso tra le semirette di direzione $45°$ e $-45°$, mentre il primo insieme sono i restanti tre quadranti, che in particolare contengono tutto il semipiano delle x negative, ed il terzo insieme sono le due semirette di direzioni $\pm 45°$. Per comodità successiva, definiamo A il quadrante chiuso in cui la f è negativa o nulla.

Quando $|(x,y)| \to \infty$, il denominatore di f tende all'infinito. Per tutte le direzioni comprese (strettamente) tra $-45°$ e $45°$, il numeratore è sempre negativo, ma comunque maggiore di -1 visto che l'esponenziale è sempre positiva. Di conseguenza, il limite direzionale di f è nullo per tutte le direzioni comprese tra $-45°$ e $45°$. E' chiaro che il limite direzionale di f sia nullo anche per le direzioni $\pm 45°$, visto che su quelle semirette la f è costantemente nulla. Se invece prendiamo una direzione $45° < \theta < 315°$, per la quale quindi $|\operatorname{sen}\theta| > \cos\theta$, si ha che

$$\lim_{\lambda \to +\infty} f(\lambda\cos\theta, \lambda\operatorname{sen}\theta) = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{e^{\lambda(|\operatorname{sen}\theta| - \cos\theta)} - 1}{\lambda^2+1} = +\infty\,,$$

visto che $|\operatorname{sen}\theta| - \cos\theta > 0$ e l'esponenziale cresce più velocemente di qualsiasi potenza. Il limite direzionale in tali direzioni θ è quindi $+\infty$.

Le osservazioni fatte prima assicurano che $\sup f = +\infty$, e dunque senz'altro non può esistere un massimo globale per f. D'altra parte, nell'insieme chiuso A si ha che la funzione f è continua, negativa, e tende a 0 all'infinito; esiste quindi un minimo globale.

Cerchiamo infine di trovare i punti di estremo globale o locale. Ciascuno di tali punti dev'essere o un punto critico contenuto nella zona in cui f è differenziabile, o un punto sull'asse x. Consideriamo intanto i punti non contenuti sull'asse x. Visto che la funzione è simmetrica rispetto all'asse x, e quindi (x,y) è un punto critico se e solo se lo è $(x,-y)$, possiamo considerare soltanto i punti con $y > 0$. Un punto (x,y) con $y > 0$ è un punto critico se e solo se

$$(x^2+y^2+1)e^{y-x} = (e^{y-x}-1)2y = -(e^{y-x}-1)2x\,,$$

cioè in particolare dev'essere $y = -x$, e dunque $x < 0$. Ma per ogni $x < 0$, le due uguaglianze di sopra nel punto $(x,-x)$ si possono riscrivere come

$$(2x^2+2x+1)e^{-2x} = 2x\,,$$

e questa uguaglianza non è mai verificata per $x < 0$ visto che il termine a sinistra è positivo e quello a destra negativo. In altre parole, abbiamo visto che f non ammette neppure un punto critico, e non ci sono quindi massimi né minimi, locali né globali, che si trovino al di fuori dell'asse x.

Verifichiamo allora l'esistenza di punti di tale tipo sull'asse x; almeno uno sappiamo già che debba esserci visto che la funzione ammette un minimo globale. Considerando la funzione sull'asse x, e chiamandola per brevità g, si ha

$$g(x) = f(x,0) = \frac{e^{-x}-1}{x^2+1}\,.$$

Un semplice conto assicura che

$$g'(x) = \frac{-e^{-x}(x+1)^2+2x}{(x^2+1)^2}\,.$$

La prima conseguenza di questo conto è che g è decrescente nella semiretta $\{x<0\}$, e quindi tutti i punti del tipo $(x,0)$ con $x<0$ non sono né massimi né minimi locali nella direzione orizzontale, e quindi a maggior ragione non lo sono su $\mathbb{R}^2$. Sulla semiretta $\{x>0\}$, invece, basta osservare che il segno di g' coincide con il segno di $h(x) = -e^{-x}(x+1)^2+2x$. Inoltre, per ogni $x>0$ si ha

$$h'(x) = e^{-x}(x^2-1)+2>0\,,$$

visto che $h'(x)$ è somma di due pezzi positivi se $x\geq 1$, mentre per $0\leq x<1$ il primo pezzo è negativo ma comunque maggiore di -1. Visto che $h(0)=-1$ e che $h(x)$ tende all'infinito per $x\to+\infty$, deduciamo che vi è un unico zero per h, cioè un unico punto critico per g, chiamiamolo $\bar{x}>0$. Dal momento che già sappiamo che deve esistere un minimo globale per f, deduciamo che tale punto è $(\bar{x},0)$, e questo conclude l'analisi dei punti di estremo locali o globali.

Esercizio 3. L'insieme P è una sorta di "piramide curva sdraiata". Più precisamente, la sua sezione con prima coordinata $0\leq x\leq 1$ è un quadrato centrato in $(x,0,0)$ e di lato $2(1-x^2)$. Il volume è quindi semplicemente

$$\int_{x=0}^1 4(1-x^2)^2\,dx = \frac{32}{15}\,.$$

Per quanto riguarda il perimetro, il bordo della piramide è composto da un quadrato di lato 2 come base, e da una parte laterale formata da quattro parti di uguale superficie, una delle quali è ad esempio

$$L = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\,0\leq x\leq 1,\,y\in\big(-(1-x^2),1-x^2\big),\,z=1-x^2\Big\}\,.$$

Detta quindi A l'area di L, il perimetro sarà $4+4A$, e per concludere dobbiamo calcolare A. Un modo comodo per parametrizzare L è usare x ed y come coordinate, ottenendo quindi

$$L = \Big\{(x,y,1-x^2),\,0\leq x\leq 1,\,-(1-x^2)\leq y\leq 1-x^2\Big\}\,.$$

Definendo $\Phi(x,y)=(x,y,1-x^2)$, ed osservando che

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y)\wedge\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y)\right| = |(1,0,-2x)\wedge(0,1,0)| = \sqrt{1+4x^2}\,,$$

si ha allora che l'area di L è

$$A = \int_{x=0}^{1} \int_{y=-(1-x^2)}^{1-x^2} \sqrt{1+4x^2}\, dy\, dx = 2 \int_{x=0}^{1} (1-x^2)\sqrt{1+4x^2}\, dx\,.$$

Con la sostituzione $2x = \operatorname{senh} t$, questo diventa

$$A = \int_{t=0}^{\operatorname{arcsenh} 2} \left(1 - \frac{\operatorname{senh}^2 t}{4}\right) \cosh^2 t\, dt = \int_{t=0}^{\operatorname{arcsenh} 2} \cosh^2 t - \frac{\operatorname{senh}^2 (2t)}{16}\, dt\,,$$

e quest'ultimo è un integrale elementare da calcolare.