Soluzioni della prova scritta per il corso di Analisi Matematica 2
corso di laurea in Ingegneria Biomedica
Università di Pisa
6/2/2023

Esercizio 1. Per ogni $0 < z < 1$, chiamiamo Ω_z la sezione di Ω ad altezza z, ossia scriviamo $\Omega_z = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, (x,y,z) \in \Omega\big\}$. Per definizione, si ha che $(x,y) \in \Omega_z$ se e solo se $(x/z, y/z)$ appartiene all'insieme $\Delta = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, \varphi(x) + \varphi(y) \leq 1\big\}$. Per descrivere l'insieme Δ, consideriamo separatamente i quattro quadranti: nel primo quadrante, dove $x > 0$, $y > 0$, l'equazione $\varphi(x) + \varphi(y) \leq 1$ si può scrivere come $x^2 + y^2 \leq 1$, e dunque nel primo quadrante l'insieme Δ è un quarto di cerchio di raggio 1, ed ha perciò area $\pi/4$. Nel terzo quadrante, dove $x < 0$, $y < 0$, l'equazione si riscrive come $|x| + |y| \leq 1$, e quindi in quel quadrante Δ è un quarto di un rombo di diagonale 2, ossia un triangolo rettangolo con entrambi i cateti di lunghezza 1, e allora l'area di Δ in quel quadrante è $1/2$. Per quanto riguarda il quarto quadrante, dove $x > 0$, $y < 0$, l'equazione è $x^2 + |y| \leq 1$, ovvero $y \geq -1 + x^2$. In tale quadrante, allora, Δ coincide con la parte di piano che sta sopra alla parabola $y = -1 + x^2$, e allora l'area si calcola subito come

$$\int_{x=0}^{1} \int_{y=-1+x^2}^{0} 1\, dy\, dx = \int_{x=0}^{1} 1 - x^2\, dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{1} = \frac{2}{3}\,.$$

Visto che la situazione nel secondo quadrante è simmetrica a quella del quarto quadrante, semplicemente con x ed y scambiate, deduciamo che l'area di Δ è

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3\pi + 22}{12}\,.$$

Visto che Ω_z, come detto sopra, è fatto dai punti (x,y) tali che $(x/z, y/z)$ sta in Δ, il volume di Ω si calcola subito come

$$\begin{aligned} V\big(\Omega\big) &= \int_{z=0}^{1} \left(\int_{\{(x,y)\in\Omega_z\}} 1\, dx\, dy\right) dz = \int_{z=0}^{1} \left(\int_{\{(x/z,y/z)\in\Delta\}} 1\, dx\, dy\right) dz \\ &= \int_{z=0}^{1} \left(\int_{\{(\tilde{x},\tilde{y})\in\Delta\}} z^2\, d\tilde{x}\, d\tilde{y}\right) dz = \int_{z=0}^{1} z^2 \left(\int_{\{(\tilde{x},\tilde{y})\in\Delta\}} 1\, d\tilde{x}\, d\tilde{y}\right) dz \\ &= \frac{3\pi + 22}{12} \int_{z=0}^{1} z^2\, dz = \frac{3\pi + 22}{36}\,. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il perimetro, visto che ad altezza $z = 0$ il bordo di Ω coincide con il solo punto $(0,0,0)$, mentre ad altezza $z = 1$ il bordo di Ω è l'insieme $\{(x,y,1) : (x,y) \in \Delta\}$, il perimetro di Ω è dato dall'area di Δ, ossia $\frac{3\pi+22}{12}$, più l'area della parte laterale. E l'area della parte laterale è la somma delle quattro parti corrispondenti ai quattro quadranti nel piano xy. Per quanto riguarda il primo quadrante, quello dei punti (x,y,z) per i quali $x > 0$, $y > 0$, l'insieme Ω è un quarto di un cono di altezza 1 e raggio 1, e quindi la sua superficie laterale è $\sqrt{2}\pi/4$. Per quanto riguarda il terzo quadrante, dove $x < 0$, $y < 0$, il bordo di Ω è un triangolo i cui vertici sono i punti $(0,0,0)$, $(-1,0,1)$, e $(0,-1,1)$, e la sua area quindi è $\sqrt{3}/2$. Infine, per quanto riguarda il quarto quadrante (la situazione nel secondo sarà nuovamente simmetrica), il bordo è dato da tutti i punti del tipo $(zx, z(-1+x^2), z)$ con $x \in [0,1]$ e $z \in [0,1]$. Detta quindi al solito $\Phi : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$ la funzione $\Phi(x,z) = (zx, z(-1+x^2), z)$, si ha

$$\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right| = \left|(z, 2xz, 0) \wedge (x, -1+x^2, 1)\right| = \left|\bigl(2xz, -z, z(-1-x^2)\bigr)\right| = z\sqrt{2+6x^2+x^4}\,.$$

La superficie laterale nel quarto quadrante è quindi data da

$$\int_{x=0}^1 \int_{z=0}^1 z\sqrt{2+6x^2+x^4}\,dz\,dx = \frac{1}{2}\int_{x=0}^1 \sqrt{2+6x^2+x^4}\,dx\,.$$

Mettendo tutto insieme, il perimetro di Ω è quindi dato da

$$P\bigl(\Omega\bigr) = \frac{3\pi+22}{12} + \frac{\sqrt{2}\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \int_{x=0}^1 \sqrt{2+6x^2+x^4}\,dx\,.$$

Esercizio 2. Dal momento che la funzione è definita nel quadrante in cui entrambe le variabili sono strettamente positive, è continua e differenziabile in tutti i punti visto che è definita come somma, prodotto e composizione di funzioni elementari. Per quanto riguarda il segno, osserviamo intanto che x^x è positivo per tutti gli $x > 0$; inoltre, per un qualsiasi $x > 0$ fissato, il termine $y(y-x)$ è una parabola nella variabile y, che si annulla in $y = 0$ ed in $y = x$, e che ha come punto di minimo $y = x/2$, nel quale vale $-x^2/4$. In altre parole, per ogni $y > 0$ si ha $y(y-x) \geq -x^2/4$, con uguaglianza unicamente in $y = x/2$. Ma allora il termine in parentesi soddisfa la disuguaglianza

$$y(y-x) + \frac{5}{4}x^2 + 1 \geq -\frac{x^2}{4} + \frac{5}{4}x^2 + 1 = x^2 + 1\,.$$

La parentesi ha quindi un valore pari almeno ad 1 in tutto il dominio, e perciò $f(x,y) > 0$ in tutto il dominio.

Per studiare il comportamento di f all'infinito, prima di tutto ricordiamo che la funzione x^x tende ad 1 per $x \to 0^+$, è decrescente per $0 < x < e^{-1}$, ha il suo minimo, pari a $e^{-1/e}$, nel punto $x = e^{-1}$, e poi è crescente per $x > e^{-1}$, tendendo all'infinito per $x \to +\infty$. Si possono allora fare due semplici stime: per un qualunque $y > 0$, come osservato prima, si ha che il termine in parentesi vale almeno x^2+1, e quindi in qualunque punto del dominio

$$f(x,y) \geq x^x\bigl(x^2+1\bigr)\,. \tag{1}$$

Se poi $y \geq 2x$, il termine $y(y-x)$ vale almeno $y^2/2$, e allora

$$f(x,y) \geq e^{-1/e}\left(\frac{y^2}{2}+1\right) \qquad \forall\, y \geq 2x\,. \tag{2}$$

Queste due stime assicurano che $f(x,y) \to +\infty$ se $|(x,y)| \to +\infty$ nel dominio. Sia infatti $M > 0$ un qualunque numero fissato; innanzitutto, visto che ovviamente $x^x(x^2+1)$ tende all'infinito per $x \to +\infty$, esiste una costante $C_1 > 0$ tale che $x^x\bigl(x^2+1\bigr) \geq M$ per ogni $x \geq C_1$. In secondo luogo, visto che $e^{-1/e}\bigl(\frac{y^2}{2}+1\bigr)$ tende all'infinito per $y \to +\infty$, esiste una costante C_2 tale che $e^{-1/e}\bigl(\frac{y^2}{2}+1\bigr) \geq M$ per ogni $y \geq C_2$. Ma allora, la stima (1) assicura che $f(x,y) \geq M$ se $x \geq C_1$, e la stima (2) assicura che $f(x,y) \geq M$ se $y \geq C_2$ e $y \geq 2x$. Ora, se $|(x,y)| > 3(C_1+C_2)$, allora sicuramente o $x > C_1$, oppure $y \geq C_2$ e $y \geq 2x$, e quindi in ogni caso $f(x,y) \geq M$. Si è quindi mostrato che f diverge all'infinito per $|(x,y)| \to \infty$.

Cerchiamo ora di studiare l'esistenza di punti di massimo o minimo globale: mentre non esiste un massimo globale visto che f diverge all'infinito, si può mostrare che esista un minimo globale. Infatti, abbiamo visto che per ogni punto (x, y) nel dominio si ha

$$f(x,y) \geq x^x\big(x^2+1\big)\,,$$

con uguaglianza se e solo se $y = x/2$. D'altra parte, se chiamiamo $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione $g(x) = x^x(x^2 + 1)$, tale funzione tende ad 1 per $x \to 0^+$, ha derivata negativa se x è positivo e piccolo, e tende all'infinito se $x \to +\infty$. Esiste quindi almeno un punto $\bar{x} \in (0, +\infty)$ di minimo globale per g, e allora di certo $(\bar{x}, \bar{x}/2)$ è un punto di minimo globale per f. Visto che f è differenziabile in tutto il suo dominio, qualunque punto di minimo globale deve essere critico, e dunque c'è almeno un punto critico.

Studiamo infine il numero e la natura dei punti critici di f. Innanzitutto si ha

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^x\big(2y-x\big)\,,$$

e quindi la derivata parziale nella direzione y si annulla esattamente nei punti per i quali $y = x/2$: questo corrisponde al fatto, già osservato prima, che per x fissato la funzione nella y è una parabola, la cui derivata si annulla solo nel suo punto di minimo. Per quanto riguarda la derivata parziale nella direzione x, non c'è quindi nessun motivo di calcolarla nei punti generici del dominio, è sufficiente calcolarla nei punti della forma $(x, x/2)$, e si trova subito

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x/2) = g'(x)\,.$$

Faremo ora vedere che g' ha un solo zero, e da questo si dedurrà che la f ha un unico punto critico, che è il suo punto di minimo globale, e che è della forma $(\bar{x}, \bar{x}/2)$ dove $\bar{x}$ è l'unico punto di minimo globale della g. Innanzitutto, possiamo calcolare

$$g'(x) = x^x\Big((\ln x+1)(x^2+1)+2x\Big)\,;$$

visto che x^x è positivo per ogni $x > 0$, per essere sicuri che $g'(x)$ sia prima negativo e poi positivo basta mostrare che sia prima negativa e poi positiva la funzione $h : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ data da

$$h(x) = (\ln x+1)(x^2+1)+2x\,.$$

Ora, è chiaro che la funzione h tenda a $-\infty$ per $x \to 0^-$ e a $+\infty$ per $x \to +\infty$, quindi avremo concluso pur di notare che $h' > 0$. E finalmente, si ha

$$h'(x) = 2x\ln x + 2x + x + \frac{1}{x} + 2\,;$$

visto che il minimo della funzione $x \ln x$, con $x > 0$, si ha per $x = 1/e$, e vale $-1/e$, otteniamo

$$h'(x) \geq -\frac{2}{e} + 3x + \frac{1}{x} + 2 > 3x + \frac{1}{x} + 1 > 0\,,$$

cioè $h' > 0$ come richiesto e dunque è mostrata l'unicità del punto critico di f.