

Prova scritta per il corso di Analisi Matematica 2  
corso di laurea in Ingegneria Biomedica  
Università di Pisa  
21/7/2022

*Tempo a disposizione: 105 minuti.*

*E' richiesto lo svolgimento degli esercizi con tutte le necessarie spiegazioni e motivazioni, in modo il più possibile rigoroso e leggibile.*

**Esercizio 1** (15 punti). Si consideri l'insieme

$$A_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, x^2 + y^2 \leq \left(1 - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^n \right\},$$

dove  $n$  è un numero naturale.

- (i) Si calcoli l'area di  $A_n$  per  $n = 0, 1, 2$ .
- (ii) Si calcoli il perimetro di  $A_2$ .
- (iii) Definito l'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x/z, y/z) \in A_2, 0 < z \leq 1 \right\},$$

se ne calcoli il volume e se ne esprima il perimetro.

**Esercizio 2** (15 punti). Si consideri la funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita come

$$f(x, y) = x^4 + 2y^4 - (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}.$$

- (i) Si discutano la continuità e la differenziabilità di  $f$ , ed i suoi limiti all'infinito.
- (ii) Si discuta l'esistenza di massimi e minimi globali per  $f$ .
- (iii) Si dica quanti sono i punti critici di  $f$ , e si valuti la loro posizione.
- (iv) Si discuta per quanto possibile la natura dei punti critici.