

Prova scritta per il corso di Analisi Matematica 2
corso di laurea in Ingegneria Biomedica
Università di Pisa
6/2/2023

Tempo a disposizione: 110 minuti.

E' richiesto lo svolgimento degli esercizi con tutte le necessarie spiegazioni e motivazioni, in modo il più possibile rigoroso e leggibile.

Nome:

Cognome:

Numero di matricola:

Esercizio 1 (15 punti). Sia $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ la funzione definita da

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^2 & \text{se } t \geq 0 \\ -t & \text{se } t < 0, \end{cases}$$

e si definisca l'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \varphi\left(\frac{x}{z}\right) + \varphi\left(\frac{y}{z}\right) \leq 1, 0 < z < 1 \right\}.$$

- (i) Si calcoli il volume di Ω .
- (ii) Si esprima il perimetro di Ω (senza concludere il calcolo conti di integrali se non si riesce).

Esercizio 2 (15 punti). Si consideri la funzione $f : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = x^x \left(y(y-x) + \frac{5}{4}x^2 + 1 \right).$$

- (i) Si dica se e dove, nel suo dominio, f è continua e differenziabile.
- (ii) Si studi il segno di f .
- (iii) Si dimostri che f tende a $+\infty$ per $|(x, y)| \rightarrow +\infty$ nel dominio.
- (iv) Si dimostri che esiste almeno un punto critico per f .
- (v) Si dimostri che esiste esattamente un punto critico per f e si discuta la sua natura.