Primo compitino del corso di Analisi Matematica
corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Università di Pisa
9/11/2019

(Seconda parte)

Tempo a disposizione: 120 minuti.
E' richiesto lo svolgimento degli esercizi con tutte le necessarie spiegazioni e motivazioni, in modo il più possibile rigoroso e leggibile.

Nome:
Cognome:
Numero di matricola:
Acconsento che il voto finale venga pubblicato sulla pagina web del docente (solo per i voti pari almeno a 15/30, e con il numero di matricola al posto del nome):
sì ☐ no ☐

Esercizio 1 (11 punti)**.** Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = x^2 e^x (x-1)^2 \,.$$

a) Si dimostri che f è continua e derivabile, e si discuta il segno di f ed i suoi limiti per x tendente a $+\infty$ ed a $-\infty$.
b) Si dica quanti sono i massimi globali ed i minimi globali di f.
c) Si dica quanti sono i massimi locali ed i minimi locali di f.
d) Si dica cosa cambia nelle risposte precedenti se, al posto di f, si considera $g(x) = x^4 e^x (x-1)^4$.
e) Si dica cosa cambia se, invece, si considera la funzione $h(x) = x^{2n} e^x (x-1)^{2n}$, con un qualsiasi numero naturale $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 2 (8 punti)**.** Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si discuta il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(\cos(x)) + e^{x^2/2} + \sin x - \tan\left(x - \frac{x^3}{2}\right) - \frac{3}{2}\left(x^2 + x^n\right) + \tan(x^2) - \cos x}{x^n} \,.$$

Esercizio 3 (11 punti)**.** Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} \tan\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right) & \text{se } x > 0\,, \\ 0 & \text{se } x = 0\,, \\ \ln\left(1 + \sin\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)\right) & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

a) Si dimostri che f è continua su tutto $\mathbb{R}$ e si discutano i suoi limiti a $+\infty$ ed a $-\infty$.
b) Si dimostri che f ammette almeno un massimo globale ed un minimo globale.
c) Si dica il numero totale di massimi e minimi locali e globali di f, e la loro natura.
d) Si dica se f è derivabile, ed in caso affermativo si dica se f' è continua e/o derivabile.